دانشگاه تهران

دانشکدهٔ علوم

گروه ریاضی و علوم کامپیوتر

عنوان

وجود و یکتایی اندازه‌های هار بر گروههای راست توپولوژیک فشرده و قضیه ساختاری فورستنبرگ-الیس-نامیوکا

نگارشِ

پیام ناصرطیوب

استاد راهنما

دکتر مسعود صباغان

۳/۱۰/۱۳۸۶

پایان‌نامه برای نیل به درجه کارشناسیِ ارشد

در

ریاضی محض

بهار ۱۳۸۱

چکیده

از آنالیز کلاسیک می‌دانیم که بر هر گروه توپولوژیک فشرده G یک اندازه هار وجود دارد. این موضوع در صورتی برای گروه‌های راست توپولوژیک صحیح است که چنین گروه‌هائی مجهز به یک سیستم از زیرگروه‌های نرمال $\{L_\xi | \xi < \xi_0\}$ باشد. که وجود چنین سیستم‌هائی خود نتیجه‌ای از اثبات قضیه ساختاری فورستنبرگ_الیس_نامیوکا می‌باشد.

فهرست مطالب

عنـــوان	صفحه

مقدمه

یکی از ساختارهای مفید و متداول که می‌توان جهت بررسی فضای حالت‌های یک سیستم در نظر گرفت ساختار گروهی و توپولوژیکی آن است. فضای حالت به بیان غیررسمی، فضایی شامل کلیه حالت‌های ممکن است که می‌تواند برای یک سیستم در حال تحول رخ دهد. وجود یک اندازه هار نرمال (اندازه احتمال) در حقیقت معیار ارزشمندی جهت توصیف احتمال وقوع حالت‌های مختلف سیستم بدست خواهد داد، بنابراین معرفی اندازه‌های هار بر چنین گروههائی راهگشای مطالعه ارگودیگی سیستم خواهد بود. از آنجائی که در برخی موارد فضاهای فاز ساختمانی ضعیف‌تر از یک گروه توپولوژیک را دارا هستند لزوم تحقیق در مورد وجود اندازه‌های احتمال بر چنین گروههایی به عنوان نوع خاصی از فضاهای حالت احساس می‌شود. در این مقاله که بیانگر سیری تاریخی در اثبات وجود چنین اندازه‌ها و بررسی شرایط وجود و یکتایی آنها می‌باشد، وجود و یکتایی چنین اندازه‌هایی را به روش استقرایی با ایده‌هایی از مقاله نامیوکا تحت عنوان « گروه‌های راست توپولوژیک، شار متباعد و قضیه نقطه ثابت» جهت قدم اول استقرا به اثبات می‌رسانیم و در واقع نشان خواهیم داد که گروههای راست توپولوژیکی که ساختمانی ضعیف‌تر از گروههای توپولوژیک را دارا هستند نیز می‌توانند

به یک اندازه هار مجهز شوند. ایده اصلی اثبات آن است که اندازه‌های هار بر گروههای خارج‌قسمتی معرفی می‌شوند و با یک دیدگاه حدی به اندازه احتمال مورد نظر دست می‌یابیم.

پیام ناصرطیوب

بهار ۱۳۸۱

فصل اول

پیشنیازهایی از نظریه مجموعه‌ها و توپولوژی

۱.۱ مقدمه‌ای بر نظریه‌مجموعه‌ها

در این بخش فرض را بر این نهاده‌ایم که خواننده با ابتدائی‌ترین مفاهیم نظریه مجموعه‌ها آشناست و تنها به تعاریفی که به شکلی مستقیم در مقاله بکارگرفته می‌شوند و بر آنها تکیه شده است بسنده کرده و تقریباً به شکلی فهرست‌وارکه گاهی خالی از یک روند منطقی است پیش خواهیم رفت. اگر چه این امر از دقتی که شایسته بحثی مانند نظریه مجموعه‌هاست می‌کاهد، اما ارائه مطالب پیشنیاز بدون خلاءهای منطقی و همراه با دقت کافی از حوصله این نوشته کوتاه خارج است.

۱.۱.۱ رابطه

یک مجموعه از زوج‌های مرتب از عناصر مجموعه X را یک روی X رابطه می‌نامیم، اگر R یک رابطه باشد. منظور از xRy آن است که $(x,y)\subset R$ و در این حالت می‌گوئیم «x Rـمربوط به y است» دامنه R عبارتست از مجموعه همه مولفه‌های اول و برد R مجموعه همه مولفه‌های دوم در R می‌باشد.

۱.۱.۲ ضرب دکارتی دو مجموعه

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند، رابطه متشکل از مجموعه همه زوج‌های (x,y)بطوریکه x (مولفه اول) عضوی از مجموعه A و y (مولفه دوم) عضوی از مجموعه B است، را ضرب دکارتی A و B نامیده و به آن را

صورت $A \times B$ نمایش می‌دهیم. بنابراین

$$A \times B = \{(x, y) : \quad x \in A, y \in B\}$$

پس هر رابطه در واقع یک زیرمجموعه از حاصلضرب دکارتی دامنه و برد خودش است.

۱.۱.۳ معکوس یک رابطه: اگر R یک رابطه باشد در این صورت

$$R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}$$

را معکوس رابطه R می‌نامیم. بنابراین xRy اگر و تنها اگر $yR^{-1}x$ و همچنین واضح است که دامنه R^{-1} همواره برد R و دامنه R همواره برد R^{-1} است.

۱.۱.۴ ترکیب دو رابطه: اگر S و R دو رابطه باشند RoS ($R.S$ یا RS) را ترکیب رابطه S با R نامیده و آن مجموعه همه زوج‌های (x, z) است بطوریکه برای yای داشته باشیم $(x, y) \in S$ و $(y, z) \in R$. به سادگی می‌توان نشان داد که ترکیب رابطه‌ها جابجائی نیست (به عنوان مثال $R = \{(۱, ۲)\}$ و $S = \{(۰, ۲)\}$ را در نظر بگیرید).

۱.۱.۵ رابطه همانی: رابطه همانی روی مجموعه X را با Δ یا $\Delta(X)$ نمایش می‌دهیم و عبارتست از

$$\Delta(X) = \{(x, x) \quad : \quad x \in X\}$$

رابطه همانی را گاهی قطر X نیز می‌نامند.

تذکر ۱.۱.۶: نام همانی برای رابطه Δ از این جهت مناسب است که روابط زیر برقرارند (R رابطه‌ای دلخواه روی X است)

$$\Delta o R = R o \Delta = R$$

تذکر ۱.۱.۷: نام قطر برای رابطه Δ نیز با توجه به وضعیت هندسی آن در بسیاری از منابع ذکر می‌شود. به عنوان مثال اگر X یک پاره‌خط باشد، Δ قطر مربعی به اضلاع X است.

تعریف ۱.۱.۸: اگر R یک رابطه روی مجموعه X باشد آنگاه می‌گوئیم:

الف_ R انعکاسی است اگر و تنها اگر $xRx \quad \forall x \in X$

ب_ R متقارن است اگر وتنها اگر $xRy \Rightarrow yRx$

ج_ R متعدی است اگر و تنها اگر xRy و $yRz \Rightarrow xRz$

د_ R هم‌ارزی است اگر و تنها اگر R انعکاسی، متقارن و متعدی باشد.

رابطه ترتیب جزئی ۱.۱.۹: رابطه $\leq$ روی مجموعه A را رابطه ترتیب جزئی می‌گوئیم اگر و تنها اگر رابطه $\leq$ روی A، انعکاسی، متعدی و پادمتقارن (یعنی اگر $a \leq b$ و $b \leq a$ آنگاه $a = b$) باشد.

بنابراین یک مجموعه جزئاً مرتب یک زوج $(A, \leq)$ است که در آن A یک مجموعه و $\leq$ یک رابطه ترتیب جزئی باشد.

رابطه ترتیب کلی ۱.۱.۱۰: یک رابطه ترتیب کلی $\leq$ روی مجموعه A یک رابطه ترتیب جزئی است به گونه‌ای که برای هر دو عنصر a و b در A، یکی از حالت‌های $a \leq b$ یا $b \leq a$ برقرار باشد (یعنی هر دو عضو در رابطه جزئی مرتب باشند). در این صورت زوج $(A, \leq)$ یک مجموعه کلاً مرتب نامیده می‌شود. رابطه‌های ترتیب کلی و مجموعه‌های کلاً مرتب را رابطه ترتیب خطی و مجموعه‌های مرتب خطی نیز می‌نامند. به عنوان مثال، اگر X یک مجموعه و $P(X)$ مجموعه توانی X، شامل همه زیرمجموعه‌های X باشد. آنگاه رابطه مشمول $\subset$ روی $P(X)$ یک رابطه جزئاً مرتب است.

۱.۲ اصل ماکسیمال هاسدورف

تعریف ۱.۲.۱ : فرض کنیم $(A, \leq)$ یک مجموعه جزئاً مرتب و B زیرمجموعه‌ای از A باشد.

الف- عنصر $u \in A$ را کران بالای B می‌گویند اگر و تنها اگر برای هر $b \in B$ داشته باشیم $b \leq u$.

ب- عنصر $u_\circ$ از کران بالای B را کوچکترین کران بالای B گوئیم اگر و تنها اگر برای هر کران بالای دیگر B مانند a داشته باشیم $u_\circ \leq a$.

ج- عنصر $e \in A$ را ماکسیمال گوئیم اگر و تنها اگر برای هر $a \in A$ از $e \leq a$ نتیجه شود که $e = a$.

مفاهیم کران پائین، کوچکترین کران پائین و عنصر مینیمال نیز مشابه مفاهیم بالا تعریف می‌شوند.

به عنوان مثال اگر X یک مجموعه غیرتهی و $\mathcal{B}$ یک زیرمجموعه از مجموعه جزئاً مرتب $(P(X), \subset)$ باشد آنگاه کوچکترین کران بالای $\mathcal{B}$ مساوی $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$ و بزرگترین کران پایین $\mathcal{B}$ مساوی $\bigcap_{B\in\mathcal{B}} B$ می‌باشد.

اکنون اصل ماکسیمال هاسدورف را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۲ اصل ماکسیمال هاسدورف: فرض کنیم T مجموعه همه زیرمجموعه‌های کلاً مرتب یک مجموعه جزئاً مرتب $(A, \leq)$ باشد. T را با رابطه مشمول $\subset$، در نظر بگیرید. در این صورت $(T, \subset)$ عنصر ماکسیمال دارد.

تعریف ۱.۲.۳ اصل تسورن: فرض کنیم $(A, \leq)$ یک مجموعه جزئاً مرتب باشد که در آن هر زیرمجموعه کلاً مرتب دارای کران بالا باشد. در این صورت A عنصر ماکسیمال دارد.

تذکر ۱.۲.۴: اصل تسورن و اصل ماکسیمال هاسدورف معادلند، در واقع این دو اصل با اصل خوش ترتیبی و اصل انتخاب نیز معادل هستند.

تعریف ۱.۲.۵: یک مجموعه کاملاً مرتب $(A, \leq)$ را خوش ترتیب می‌گوئیم اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه غیرتهی از A مانند B دارای عنصر مینیمال باشد، بدین‌معنا که عنصر $b \in B$ موجود است به قسمی که برای هر $x \in B$ داشته باشیم $b \leq x$ اگر $(A \leq)$ یک مجموعه خوش ترتیب باشد آنگاه $\leq$ را رابطه خوشترتیبی روی A می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۶ اصل استقرای ترانسفینی (Transfinite induction): فرض کنید $(A \leq)$ یک مجموعه خوش‌ترتیب و برای هر $x \in A$,$P(x)$ گزاره‌ای در بارهٔ x باشد. همچنین فرض کنید

برای هر $x \in A$، فرضِ «$P(y)$ برای هر $y \leq x$ راست است» نتیجه دهد که «$P(x)$ راست است» در این صورت $P(x)$ برای کلیه مقادیر $x \in A$ راست است.

۱.۳ اعداد اصلی Cardinal number

برای تعریف عدد اصلی ابتدا مفهوم همتوانی (equipotence) را در مورد مجموعه‌ها مطرح می‌کنیم .

تعریف ۱.۳.۱: دو مجموعه X و Y را همتوان گوئیم و آن را با نماد $X \sim Y$ نشان می‌دهیم هرگاه بین X و Y یک تناظر یک به یک مانند $f : Y \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد (منظور از یک تناظر یک به یک، تابعی یک به یک و پوشا میان X و Y است).

فرض کنید $\mathcal{A}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها و R رابطه‌ای روی $\mathcal{A}$ باشد که با «XRY اگر و تنها اگر $X \sim Y$ » تعریف شده باشد. در این صورت R یک رابطه هم ارزی روی $\mathcal{A}$ است.

تعریف ۱.۳.۲: عدد اصلی را به عنوان یک مفهوم اولیه در نظر می‌گیریم که اصول زیر در مورد آن صادق هستند.

الف- به هر مجموعه A یک عدد اصلی نظیر می‌شود که آنرا با $CardA$ نمایش می‌دهیم. همچنین برای هر عدد اصلی a، یک مجموعه A وجود دارد بطوریکه $CardA = a$.

ب- برای مجموعه A داریم $CardA = ۰$ اگر و تنها اگر $A = \phi$.

ج- اگر A یک مجموعه متناهی غیرتهی باشد، یعنی برای یک $k \in \mathbb{N}$ داشته باشیم

$A \sim \{۱, ۲, \cdots, k\}$ آنگاه داریم $CardA = K$

د- برای هر دو مجموعه A و B داریم $CardA = CardB$ اگر و تنها اگر $A \sim B$.

۱.۴ اعداد ترتیب (Ordinal number)

در محاسبات متناهی، اعداد اصلی در واقع همان اعداد شمارشی $۱, ۲, ۳, \cdots$ و اعداد ترتیب همان اعداد مرتبه‌ای، اولین و دومین و سومین و ... می‌باشند. در حالت‌های متناهی بین اعداد اصلی و اعداد ترتیب تفاوت آنقدر ناچیز است که هر دو را به عنوان اعداد طبیعی بکار می‌بریم اما همانطورکه اعداد اصلی نامتناهی (کاردینال مجموعه‌های نامتناهی) از مجموعه‌های نامتناهی گرفته می‌شوند، اعداد ترتیب نامتناهی نیز از مجموعه‌های خوشترتیب نامتناهی به وجود می‌آیند و مانند اعداد اصلی نامتناهی، به عنوان یک مفهوم اولیه که برخی اصول در مورد آنها صادق هستند، معرفی می‌شوند. در اینجا نیز مانند تعریف اعداد اصلی که نیازمند معرفی رابطه هم‌توانی بودند برای تعریف اعداد ترتیب نامتناهی نیز نیازمند مفاهیم یکریختی‌های ترتیب هستیم.

تعریف ۱.۴.۱: می‌گوئیم دو مجموعه خوشترتیب $(A \leq)$ و $(B \leq')$ همریخت ترتیب هستند اگر یک نگاشت دوسوئی مانند $f : A \longrightarrow B$ موجود باشد به قسمی که برای هر $a_۱, a_۲ \in G$ و $a_۱ \leq a_۲$ داشته باشیم $f(a_۱) \leq' f(a_۲)$. در این صورت تابع f را یک همریختی ترتیب می‌نامیم.

اکنون اعداد ترتیب متناهی یا نامتناهی را به عنوان یک مفهوم اولیه که در اصول زیر صدق می‌کنند معرفی می‌کنیم.

الف- به هر مجموعه خوشترتیب $(A, \leq)$ یک عددترتیب که آنرا با $ord(A, \leq)$ نشان می‌دهیم نسبت داده می‌شود و اگر α یک عددترتیب باشد آنگاه یک مجموعه خوشترتیب $(A, \leq)$ وجود دارد به قسمی که $ord(A, \leq) = \alpha$.

ب- فرض کنیم $(A \leq)$ و $(B \leq')$ دو مجموعه خوشترتیب باشند. در این صورت $ord(A \leq) = ord(B \leq')$ اگر و تنها اگر $(B \leq')$ با $(A, \leq)$ همریخت ترتیب باشد.

ج- برای هر مجموعه A داریم $ord(A \leq) = ۰$ اگر و تنها اگر $A = \phi$.

د- اگر $(A \leq)$ مجموعه‌ای خوش ترتیب باشد و برای عدد طبیعی k داشته باشیم

$$A \sim (۱, ۲, \cdots, k) \quad \text{آنگاه داریم} \quad ord(A \leq) = k$$

تعریف ۱.۴.۲: فرض کنیم $(A \leq)$ یک مجموعه کاملاً مرتب باشد، یک **قطعه** از A یک زیرمجموعه S از A است به گونه‌ای که اگر $y \in S$ و $x \in A$ و $x \leq y$ آنگاه $x \in S$.

یک قطعه از A را سره گوئیم هرگاه زیرمجموعه سره‌ای از A باشد. فرض کنید $(A \leq)$ یک مجموعه خوشترتیب و x یک عنصر دلخواه از A باشد. از آن صورت مجموعه تهی و مجموعه $A_x = \{a \in A : a \leq x\}$ قطعه‌هائی از A هستند.

اکنون قضیه‌های زیر را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۴.۳: فرض کنیم $(A \leq)$ یک مجموعه خوشترتیب باشد. در این صورت

الف- هر اجتماع یا اشتراک از قطعه‌های A و همچنین تمام قطعه‌های یک قطعه از A قطعه‌هائی از A هستند.

ب- اگر S قطعه سره‌ای از A باشد در این صورت عنصر x متعلق به A موجود است بطوریکه

$$S = A_x = \{a \in A : a \leq x\}$$

قضیه ۱.۴.۴: فرض کنیم $(A \leq)$ یک مجموعه خوشترتیب و S یک قطعه از A باشد به قسمی که

الف- هر اجتماع عضوهای S متعلق به S باشد.

ب- اگر $A_x \in S$ آنگاه $A_x \cup \{x\} \in S$.

در این صورت S شامل تمام قطعه‌های A است.

خواننده علاقمند می‌تواند اثبات این قضایا را در [4] ببیند.

تعریف ۱.۴.۵: فرض کنیم α و β دو عدد ترتیب و مجموعه‌های خوشترتیب $(A, \leq)$ و $(B, \leq')$ موجود باشند بطوریکه $ord(A, \leq) = \alpha$ و $ord(B, \leq') = \beta$. در این صورت گوئیم α کوچکتر از β یا مساوی آن است اگر و تنها اگر $(A \leq)$ با یک قطعه از $(B, \leq')$ همریخت‌ترتیب باشد و این رابطه را با $\alpha \leq \beta$ یا $\beta \geq \alpha$ نشان می‌دهیم.

اگر $\alpha \leq \beta$ و $\alpha \neq \beta$ باشد، می‌نویسیم $\alpha < \beta$ یا $\beta > \alpha$. به سادگی می‌توان نشان داد که رابطه $\leq$ برای اعداد ترتیبی، رابطه‌ای انعکاسی و متعدی است. این رابطه پادمتقارن نیز هست.

از آنچه گفتیم نتیجه می‌شود که رابطه $\leq$ برای اعداد ترتیب یک رابطه جزئاً مرتب است، اما می‌توان نشان داد که رابط $\leq$ برای اعداد ترتیبی رابطه‌ای کلاً مرتب نیز می‌باشد. بنابراین برای هر دو عدد ترتیبی α و β همواره یکی از گزاره‌های $\beta \leq \alpha$ یا $\alpha \leq \beta$ برقرار است.

به عنوان نتیجه ساده‌ای از آنچه تاکنون گفتیم گزاره زیر را می‌توان بیان کرد.

گزاره ۱.۴.۶: فرض کنیم $(A \leq)$ و $(B, \leq')$ دو مجموعه خوشترتیب باشند، در این صورت $ord(A, \leq) < ord(B, \leq)$ اگر و تنها اگر A با زیرقطعه سره‌ای از B همریخت ترتیبی باشد.

بنابراین به عنوان یک نتیجه‌گیری کلی از همه مطالب گفته شده، می‌توان گفت:

اگر α و β دوعددترتیبی باشند آنگاه یکی و تنها یکی از حالت‌های زیر برقرار است.

$$\alpha < \beta \quad \text{یا} \quad \alpha = \beta \quad \text{یا} \quad \alpha > \beta$$

۱.۵ پیشنیازهای توپولوژیک

نت‌ها net

در آنالیز کلاسیک با مفهوم دنباله، به عنوان تابعی از مجموعه اعداد طبیعی به یک مجموعه دلخواه (عموماً اعداد حقیقی) آشنا شده‌ایم. دنباله‌ها ابزارهای مفیدی در بررسی نقاط حدی و پیوستگی توابع و همچنین فشردگی مجموعه‌ها می‌باشند که برای کار با فضاهای متریک بی نقص می‌باشند اما در مورد فضاهای توپولوژیک دلخواه

محدودیت‌هائی در تعریف آنها وجود دارد. (مسائل بخش ۲ از [4] را ببینید) که باعث می‌شود مفهوم جدیدی به نام نت جایگزین آن گردد. ما در این قسمت تعاریف و ویژگی‌های مربوط به نت‌ها را بیان نموده و قضایای مهمی را که در موردشان وجود دارد بدون اثبات می‌آوریم.

تعریف ۱.۵.۱: رابطه دوتائی $\geq$ روی مجموعه D را یک جهت می‌نامیم هرگاه

الف- اگر m و n و p سه عضو از D باشند بطوریکه $n \geq m$ و $p \geq n$ آنگاه $m \geq P$

ب- اگر m عضوی از D باشد آنگاه $m \geq m$.

ج- اگر m و n دو عضو D باشند آنگاه عضو p از D موجود باشد بطوریکه $n \geq p$ و $m \geq p$.

در این صورت $(D \geq)$ را یک مجموعه جهت‌دار می‌نامیم و می‌گوئیم $m \in D$ نسبت به رابطه $\geq$ بعد از n قرار دارد (یا n قبل از m قرار دارد) هرگاه $m \geq n$. در واقع توجه کنیم که به زبان رابطه‌ها شرط (الف) بدین معناست که $\geq$ یک رابطه انتقالی بر مجموعه D (در واقع بر مجموعه جزئاً مرتب D) می‌باشد و شرط (ب) بدین معناست که $\geq$ انعکاسی است. اما شرط (ج) شرطی خاص بر مجموعه D است.

به عنوان مثال مجموعه اعداد طبیعی با رابطه بزرگتر یا مساوی بودن یک مجموعه جهت‌دار است. همچنین خانواده همه همسایگی‌های یک نقطه در یک فضای توپولوژیک با رابطه شمول $\supset$، مجموعه‌ای جهت‌دار است. مجموعه‌های جهت‌دار را گاهی سیستم‌های جهت‌دار نیز می‌نامند.

تعریف ۱.۵.۲: زوج $(S \geq)$ را یک نت می‌نامیم هرگاه S یک تابع است که دامنه‌اش با رابطه $\geq$ جهت‌دار شده باشد.

بنابراین یک نت در واقع تابعی تعریف شده بر یک مجموعه جهت‌دار است. اگر S نتی باشد که بر مجموعه جهت‌دار $(D \geq)$ تعریف شده باشد آنگاه آنرا به صورت $\{S_n : n \in (D, \geq)\}$ نمایش می‌دهیم.

می‌گوئیم نت $\{S_n : n \in (D, \geq)\}$ در مجموعه A قرار دارد هرگاه برای هر n داشته باشیم $S_n \in A$.

همچنین نت S را نهایتاً (eventually in) در A گوئیم هرگاه عضوی مانند m متعلق به D چنان موجود باشد که برای هر $n \in D$ با شرط $n \geq m$ داشته باشیم $S_n \in A$. نت S را **مکرراً** (frequently) در A گوئیم هرگاه برای هر m متعلق به D، عضو n در D موجود باشد که $n \geq m$ و $S_n \in A$.

تعریف ۱.۵.۳ همگرائی نت‌ها: نت $(S \geq)$ در فضای توپولوژیک (X, T) را به $s \in X$ نسبت به توپولوژی T همگرا گوئیم اگر و تنها اگر نهایتاً (eventually) در هر Tـ‌همسایگی از s قرار داشته باشد.

توجه کنید که همگرائی، وابسته به تابع S، توپولوژی T، و ترتیب $\geq$ می‌باشد. در حالتی که اشتباهی رخ ندهد معمولاً بدون ذکر توپولوژی T و یا رابطه $\geq$ به طور خلاصه گوئیم نت S (یا نت $\{S_n : n \in D\}$ یا $(\{S_n\}_{n \in D}$) به s همگرا است.

اکنون می‌توانیم نقاط حدی و بستار یک مجموعه و در حقیقت توپولوژی یک فضا را توسط همگرائی نت‌ها توصیف کنیم.

قضیه ۱.۵.۴: فرض کنیم X فضائی توپولوژیک باشد در این صورت:

الف‌ـ نقطه s را یک نقطه حدی زیرمجموعه A از X گوئیم اگر و تنها اگر یک نت در $A - \{s\}$ موجود باشد که به s همگرا باشد.

ب- نقطه s به بستار زیرمجموعه A از X متعلق است اگر و تنها اگر یک نت در A موجود باشد که به s همگرا باشد.

ج- یک مجموعه A از X را بسته گوئیم اگر و تنها اگر هیچ نتی در A به عضوی در $X - A$ همگرا نباشد. (برای اثبات [4] را ببینید)

لازم است توجه کنیم که در حالت کلی، یک نت در یک فضای توپولوژیک می‌تواند به چند نقطه مختلف همگرا باشد. اما فضاهای توپولوژیکی وجود دارد که در آنها یک نت در صورت همگرائی به حد یکتائی همگراست. چنین فضاهائی را **هاسدورف** می‌گوئیم. در واقع یک فضای توپولوژیک را هاسدورف گوئیم اگر و تنها اگر هر دو نقطه متمایز از فضا، همسایگی‌های مجزائی داشته باشند.

<u>قضیه ۱.۵.۵:</u> فضای توپولوژیک X هاسدورف است اگر وتنها اگر هر نت همگرا در X به حدی یکتا همگرا باشد. ([4] را ببینید)

مشابه قضایای پیوستگی در مورد دنباله‌ها در فضاهای متریک، برای نت‌ها در فضاهای توپولوژیک دلخواه نیز برقرار هستند.

<u>قضیه ۱.۵.۶:</u> فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک باشند. در این صورت تابع $f : X \longrightarrow Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر نت $\{x_n\}_{n\in D}$ همگرا به x در X نت $\{f(x_n)\}_{n\in D}$ در Y به $f(x)$ همگرا باشد.

تعریف ۱.۵.۷ : نت $\{T_m\}_{m\in D}$ را یک زیرنت از نت $\{S_n\}_{n\in E}$ گوئیم اگر و تنها اگر تابع $N : D \longrightarrow E$ چنان موجود باشد که

الف_ $T = SoN$ یعنی برای هر i در D داشته باشیم $T_i = S_{N_i}$.

ب_ برای هر m در E، عضو n در D موجود باشد با این ویژگی که اگر $p \geq n$ آنگاه $N_p \geq m$.

قضیه ۱.۵.۸ : فضای توپولوژیک X فشرده است اگر و تنها اگر هر نت در X دارای زیرنتی همگرا باشد.

در این بخش به معرفی روش‌های مفیدی برای ساختن فضاهای توپولوژیک جدید توسط فضاهای توپولوژیک داده شده می‌پردازیم. یکی از این روش‌ها ضرب دکارتی فضاهای توپولوژیک می‌باشد.

۱.۶ فضاهای حاصلضربی

فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک و $\mathcal{B}$ خانواده همه حاصلضرب‌های دکارتی $U \times V$ باشد که U بازی از X و V بازی از Y است. در این صورت اشتراک هر دو عضو از $\mathcal{B}$ عضوی از $\mathcal{B}$ خواهد بود « چرا که $(U \times V) \cap (R \times S) = (U \cap R) \times (V \cap S)$ » و در نتیجه $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی روی $X \times Y$ خواهد بود، این توپولوژی را **توپولوژی حاصلضربی** برای $X \times Y$ می‌نامیم.

در این حالت زیرمجموعه W از $X \times Y$ را یک باز مربوط به توپولوژی حاصلضربی می‌نامیم هرگاه برای هر $(x, y) \in W$، همسایگی باز U از x و همسایگی باز V از y چنان موجود باشند که $U \times V \subset W$. فضاهای X و Y را **فضاهای مختصات** نامیده و نگاشت‌های p_0 و p_1 که نقطه (x, y) از $X \times Y$ را به ترتیب به x و y