دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر
گروه ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض ، گرایش آنالیز

عنوان

فشردگی در فضاهای نرم‌دار نامتقارن

استاد راهنما

دکتر عبدالمحمد امین پور

استاد مشاور

دکتر عبدالمحمد فروزانفر

پژوهشگر

زهرا ارجمندنژاد

دی ماه ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: ارجمندنژاد نام: زهرا

عنوان: فشردگی در فضاهای نرم‌دار نامتقارن

استاد راهنما: دکتر عبدالمحمد امین پور

استاد مشاور: دکتر عبدالمحمد فروزانفر

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز

دانشگاه: شهید چمران اهواز دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

تاریخ فارغ‌التحصیلی: دی ماه ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۱۰۴

واژگان کلیدی: توپولوژی نامتقارن، فضای خطی نرم‌دار نامتقارن، فشردگی، پیش‌فشردگی.

چکیده

این پایان‌نامه به توصیف فشردگی و پیش‌فشردگی زیرمجموعه‌ها در فضاهای خطی نرم‌دار نامتقارن می‌پردازد. اگرچه بعضی از نتایج کلی برای موارد کلی بدست آمده‌اند، ما روی فضاهای خطی نامتقارنی تمرکز می‌کنیم که مستقیماً مربوط به مشبکه‌های باناخ $(X, \|.\|, \leqslant)$ هستند که از ترتیب $\leqslant$ برای تعریف یک نرم نامتقارن خاص با فرمول $x \in X$, $q(x) := \|x \vee \circ\|$ استفاده می‌شود. در پایان رده‌ی خاصی از زیر مجموعه‌های K از فضای خطی نرم‌دار نامتقارن (X, q) را توصیف می‌کنیم که در آن شرط وجود یک زیرمجموعه‌ی q^s–فشرده‌ی $K_\circ \subseteq X$؛ (یعنی، یک مجموعه‌ی فشرده در فضای باناخ وابسته به (X, q^s)) که

$$K_\circ \subseteq K \subseteq K_\circ + \theta_\circ$$

که در آن

$$\theta_\circ := \{x \in X : \ q(x) = \circ\},$$

q–فشردگی K را مشخص می‌کند.

تقدیم به

پدرم که از نگاهش صلابت و از صبرش ایستادگی آموختم ؛

مادرم ، فرشته ای همیشه جاوید از مهربانی و دوست داشتن ؛

خواهرانم که وجودشان شادی بخش و مایه ی آرامش من است ؛

و همسرم ، پناه خستگی ام و امید بودنم .

الهی...[1]

ای خالق بی‌مدد و ای واحد بی‌عدد، ای اول بی‌بدایت و ای آخر بی‌نهایت، ای ظاهر بی‌صورت و ای باطن بی‌سیرت، ای حیّ بی‌ذلّت، ای معطی بی‌فکرت و ای بخشنده‌ی بی‌منّت، ای داننده‌ی رازها، ای شنونده‌ی آوازها، ای بیننده‌ی نمازها، ای پذیرنده‌ی نیازها، ای شناسنده‌ی نام‌ها، ای رساننده‌ی گام‌ها، ای مبرّا از عوایق، ای مطّلع بر حقایق، ای مهربان بر خلایق، عذرهای ما بپذیر که تو غنی و ما فقیر و بر عیب‌های ما مگیر که تو قوی و ما حقیر، از بنده خطا آید و زلّت و از تو عطا آید و رحمت.

الهی دانی که بی تو هیچکسم، دستم گیر که در تو رسم، به ظاهر قبول دارم و به باطن تسلیم، نه از خصم باک دارم نه از دشمن بیم، اگر دل گوید چرا؟ گویم سرافکنده‌ام و اگر خرد گوید چرا؟ جواب دهم که من بنده‌ام...

[1] مناجاتی از خواجه عبدالله انصاری.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.
در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر عبدالمحمد امین پور، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
از جناب آقای دکتر عبدالمحمد فروزانفر که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.
از سرکار خانم منیره پیمان به پاس دلگرمی‌هایی که به من دادند و نیز راهنمایی‌های سازنده‌ی ایشان در ویرایش پایان‌نامه، بسیار سپاسگزارم.
همچنین لازم می‌دانم که از تمامی اساتید مهربانم صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که در تمامی طول تحصیل با کمک‌های بی شائبه‌ی خود مرا مورد لطف و عنایت قرار داده و زمینه را برای پیشرفت اینجانب فراهم آورده‌اند.
در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، وجود مقدسشان را ستایش می‌کنم.

زهرا ارحمندنژاد
دی ماه ۱۳۹۲

فهرست مطالب

پیشگفتار

تعیین اولین زمانی که نرم نامتقارن استفاده شد، مشکل است اما این موضوع به حدود ۱۹۶۸ میلادی بر می‌گردد که در یک مقاله، دافین[۲] و کارلوویتز[۳]، عبارت نرم نامتقارن را پیشنهاد کردند. کرین[۴] و نادلمن[۵] نیز از نرم نامتقارن در مطالعات خود در زمینه‌ی مسائل اکسترمال وابسته به مسئله‌ی گشتاور مارکوف[۶] استفاده کردند. توجه کنید که وابستگی تابعک‌های زیرخطی برای بعضی مسائل آنالیز محدب و آنالیز ریاضی نیز توسط اچ.کونیگ[۷]، تاکید شده بود. مطالعه‌ی سیستماتیک خواص فضاهای نرم‌دار نامتقارن با مقاله‌ای توسط اس.روماگوئرا[۸]، از دانشگاه پلی تکنیک والنسیا[۹] و همکارانش در همان دانشگاه و دیگر دانشگاه‌های اسپانیا:سی. آلگر[۱۰]، فرر[۱۱]، گارسیا –رافی[۱۲]، سانچز پرز[۱۳]، سانچز آلوارز[۱۴]، سانچیز[۱۵] و والرو[۱۶] آغاز شد.

---

[۲] Duffin
[۳] Karlovitz
[۴] Krein
[۵] Nudelman
[۶] Markov
[۷] H. Konig
[۸] S. Romaguera
[۹] Valencia
[۱۰] C. Alegre
[۱۱] Ferrer
[۱۲] Garcia-Raffi
[۱۳] Sanchez Perez
[۱۴] Sanchez Alvarez
[۱۵] Sanchis
[۱۶] Valero

مطالب این پایان‌نامه برگرفته از مقاله‌ای با عنوان " فشردگی در فضاهای نرم‌دار نامتقارن"[۱۷] نوشته‌ی سی.آلگر، آی. فراندو[۱۸] ، گارسیا -رافی و سانچز پرز می‌باشد که در سال ۲۰۰۸ در مجله‌ی "توپولوژی و کاربردهای آن"[۱۹] به چاپ رسید. همچنین از مقاله‌ای تحت عنوان " فشردگی و بعد متناهی در فضاهای نرم‌دار نامتقارن" [۲۰]، نوشته‌ی گارسیا رافی که در سال ۲۰۰۵ در مجله‌ی "توپولوژی و کاربردهای آن" به چاپ رسیده، استفاده شده است.

اطلاعات مورد نیاز مانند تعریف همسایگی، توپولوژی تولید شده توسط نرم نامتقارن و همگرایی در فضاهای نرم‌دار نامتقارن را از کتاب " آنالیز تابعی در فضاهای نرم‌دار نامتقارن"[۲۱] برداشت کرده‌ایم. این کتاب منبعی جامع در زمینه نرم نامتقارن و تألیف استفان کبزاس[۲۲] می‌باشد که در سال ۲۰۱۳ به چاپ رسید.

این پایان نامه را در سه فصل تنظیم کرده‌ایم. در فصل اول که شامل پنج بخش است، تعاریف و مفاهیم مقدماتی را بیان می‌کنیم که در بیشتر کتاب‌های آنالیز، توپولوژی و نظریه‌ی مشبکه یافت می‌شوند.

فصل دوم مشتمل بر دو بخش می‌باشد. در بخش اول، نرم نامتقارن تعریف می‌شود و نرم‌های معادل با آن، مثال‌هایی از فضاهای نرم‌دار نامتقارن، تعاریف و لم‌های مورد نیاز فصل‌های بعد آورده شده است. در بخش دوم، زیرمجموعه‌های کراندار، پیش‌فشرده و فشرده در یک فضای خطی نرم‌دار نامتقارن بیان شده است.

فصل سوم شامل دو بخش است. در بخش نخست، $q-$پیش‌فشردگی و $q-$فشردگی مجموعه‌ها در فضاهای نرم‌دار نامتقارن مطرح شده است. در بخش دوم این فصل که در واقع آخرین بخش از پایان‌نامه می‌باشد، رده‌ی خاصی از زیر مجموعه‌های K از فضای

[۱۷] Compactness in Asymmetric Normed Spaces
[۱۸] I. Ferrando
[۱۹] Topology and its Applications
[۲۰] Compactness and Finite Dimension in Assymmetric Normed Spaces
[۲۱] Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces
[۲۲] Stefan Cobzas

خطی نرم‌دار نامتقارن (X,q) را توصیف می‌کنیم که در آن شرط وجود یک زیرمجموعه‌ی q^s-فشرده‌ی $K_\circ \subseteq X$؛ (یعنی، یک مجموعه‌ی فشرده در فضای باناخ وابسته به (X,q^s)) که

$$K_\circ \subseteq K \subseteq K_\circ + \theta_\circ$$

که در آن

$$\theta_\circ := \{x \in X : \ q(x) = \circ\},$$

$q-$فشردگی K را مشخص می‌کند.

فصل ۱
کلیات و تعاریف مقدماتی

مقدمه

در این فصل سعی می‌کنیم مفاهیم اساسی و اصولی مورد نیازی را بیان کنیم که غالبا آن‌ها را در هر کتاب آنالیز حقیقی ، آنالیز تابعی، توپولوژی و مشبکه می‌توان یافت. این فصل را می‌توان پیش‌نیاز مطالعه فصول بعد دانست. برای بهتر شدن ارائه مطلب، این فصل را در پنج بخش تنظیم کرده‌ایم. تعاریف و قضایا برای رفع نیاز از مراجعه به منابع مختلف بیان می‌شوند. بخش اول این فصل را با مجموعه‌های مرتب آغاز می‌کنیم.
در این پایان‌نامه مجموعه‌ی اعداد طبیعی را با $\mathbb{N}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ و میدان اعداد حقیقی و مختلط را با K نشان می‌دهیم.

۱.۱ مجموعه‌ی مرتب

تعریف ۱.۱.۱. رابطه‌ی $\leqslant$ را روی مجموعه‌ی P یک رابطه‌ی ترتیب گوییم، هرگاه

(۱) $x \leqslant x$ برای هر $x \in P$؛

(۲) اگر $x \leqslant y$ و $y \leqslant x$، آن‌گاه $x = y$؛

(۳) اگر $x \leqslant y$ و $y \leqslant z$، آن‌گاه $x \leqslant z$.

مجموعه‌ی P را با رابطه‌ی ترتیب تعریف شده روی آن یک مجموعه‌ی مرتب می‌نامیم و با جفت $(P, \leqslant)$ نمایش می‌دهیم. علامت $y \geqslant x$ نماد دیگری برای $x \leqslant y$ است. اگر $x \leqslant y$ و $x \neq y$، می‌نویسیم $x < y$.

تعریف ۲.۱.۱. اگر $x \not\leqslant y$ و $y \not\leqslant x$، آن‌گاه x و y را غیرقابل مقایسه یا مقایسه‌ناپذیر می‌نامیم و دو عضو x و y را مقایسه‌پذیر گوییم، هرگاه $x \leqslant y$ یا $y \leqslant x$ باشد.

مثال ۳.۱.۱. رابطه‌ی $=$ روی مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ یک رابطه‌ی ترتیب است. در این مثال عناصر متمایز غیرقابل مقایسه هستند.

تعریف ۴.۱.۱. مجموعه‌ی مرتب P را با رابطه‌ی ترتیب $\leqslant$ یک مجموعه‌ی مرتب کامل می‌گوییم، هرگاه برای هر دو عنصر $x, y \in P$ داشته باشیم $x \leqslant y$ یا $y \leqslant x$؛ یعنی، هر دو عضو دلخواه P مقایسه‌پذیر باشند.

مثال ۵.۱.۱. اگر X یک مجموعه باشد، رابطه‌ی ترتیب $\leqslant$ روی $\mathcal{P}(X)$ را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$A, B \in \mathcal{P}(X)\ ,\ \ A \leqslant B \Longleftrightarrow A \subseteq B.$$

توجه می‌کنیم که $\mathcal{P}(X)$ با رابطه‌ی ترتیب فوق یک مجموعه‌ی مرتب کامل نیست ولی یک مجموعه‌ی مرتب است.

تذکر ۶.۱.۱. *اگر P یک مجموعه‌ی مرتب باشد، آن‌گاه هر زیرمجموعه‌ی Q از P، با همان رابطه‌ی ترتیب در P یک مجموعه‌ی مرتب خواهد بود؛ یعنی، $a \leqslant_Q b \Longleftrightarrow a \leqslant_P b$، برای هر $a, b \in Q$.*

اصطلاحاً گوییم رابطه‌ی ترتیب P به زیرمجموعه‌ی Q القا شده است.

تعریف ۷.۱.۱. اگر $(P, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب باشد، عنصر $x \in P$ را کوچکترین عنصر یا عنصر صفر P می‌نامیم، هرگاه برای هر $y \in P$, $x \leqslant y$ باشد. در صورتی که این عنصر وجود داشته باشد، آن را با ۰ نمایش می‌دهیم.
به همین ترتیب $x \in P$ را بزرگترین عنصر یا عنصر یک P می‌گوییم، هرگاه برای هر $y \in P$, $y \leqslant x$ باشد و آن را با ۱ نمایش می‌دهیم.

تذکر ۸.۱.۱. *عناصر ۰ و ۱ در مجموعه‌ی مرتب P در صورت وجود یکتا هستند.*

مثال ۹.۱.۱. فرض کنیم $X \neq \emptyset$. $\mathcal{P}(X)$ را با رابطه‌ی ترتیب شمول در نظر می‌گیریم. در این صورت $X = ۱$ و $\emptyset = ۰$.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم $(P, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب باشد و $S \subseteq P$. در این صورت مجموعه‌ی S را از بالا کراندار گوییم، هرگاه عنصری مانند $\alpha \in P$ موجود باشد که برای هر $x \in S$, $x \leqslant \alpha$. در این حالت α را یک کران بالای S می‌نامیم.
به همین ترتیب مجموعه‌ی S را از پایین کراندار می‌گوییم، هرگاه عنصری مانند $\beta \in P$ موجود باشد که برای هر $x \in S$, $\beta \leqslant x$. در این حالت β را یک کران پایین S می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیم $(P, \leqslant)$ مجموعه‌ای مرتب، $S \subseteq P$ و S از بالا کراندار باشد. در این صورت $\alpha \in P$ را کوچکترین کران بالای S یا سوپریمم S می‌نامیم، هرگاه α دارای خواص زیر باشد:

(۱) α یک کران بالای S باشد؛

(۲) اگر $\gamma < \alpha$، آن‌گاه γ یک کران بالای S نباشد.

در این حالت می‌نویسیم $\alpha = \sup S$.
بزرگترین کران پایین یا اینفیمم مجموعه‌ی S که از پایین کراندار است به همین صورت

تعریف می‌شود؛ یعنی، α، یک کران پایین S است و هیچ β با شرط $\alpha < \beta$ یک کران پایین S نمی‌باشد. در این حالت می‌نویسیم $\alpha = \inf S$.

مثال ۱۲.۱.۱. فرض کنیم $X \neq \emptyset$. مجموعه‌ی مرتب $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ را در نظر می‌گیریم. اگر $A, B \subseteq X$ باشند، آن‌گاه $\sup\{A, B\} = A \cup B$ و $\inf\{A, B\} = A \cap B$.

۲.۱ فضای متری

در این بخش ابتدا فضای متری را تعریف کرده، سپس مثال‌ها و قضایایی را که در فصل‌های بعد مورد نیاز است، بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و d تابعی حقیقی مقدار بر $X \times X$ باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(x, y, z عناصری دلخواه در X می‌باشند)

(۱) $d(x,y) \geqslant 0$؛

(۲) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$؛

(۳) $d(x,y) = d(y,x)$؛

(۴) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

در این صورت زوج (X,d) را یک فضای متری و d را یک متر بر X می‌نامیم.

مثال ۲.۲.۱. $(\mathbb{R}, d)$ یک فضای متری است که در آن $d(x,y) = |x-y|$ برای هر $x, y \in \mathbb{R}$. d را متر معمولی یا متر اقلیدسی روی $\mathbb{R}$ می‌نامیم.

مثال ۳.۲.۱. فرض کنیم $X = (0, \infty)$. در این صورت، $d(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$ برای هر y, x متعلق به X، یک متر روی X است.

تعریف ۴.۲.۱. در فضای متری (X,d)، نقطه‌ی $a \in A \subseteq X$ را یک نقطه‌ی درونی مجموعه‌ی A گوییم، هرگاه $\epsilon > 0$ی موجود باشد که $N(a,\epsilon) \subseteq A$، که در آن $N(a,\epsilon)$ به صورت زیر تعریف می‌شود و آن را گوی باز به مرکز a و شعاع ϵ می‌نامیم.

$$N(a,\epsilon) = \{x \in X : \ d(x,a) < \epsilon\}.$$

اگر هر نقطه‌ی متعلق به A، درونی باشد، A را یک مجموعه‌ی باز در فضای متری (X,d) می‌نامیم.

تعریف ۵.۲.۱. در فضای متری (X,d)، نقطه‌ی $a \in X$ را یک نقطه‌ی بستی مجموعه‌ی $A \subseteq X$ گوییم، هرگاه که برای هر $\epsilon > 0$ داشته باشیم $N(a,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$.

مجموعه‌ی نقاط بستی A را با $\bar{A}$ نشان می‌دهیم. اگر $A = \bar{A}$، A را مجموعه‌ای بسته در فضای متری (X,d) می‌نامیم.

مثال ۶.۲.۱. در فضای متری $(\mathbb{R}^2, d)$ که

$$d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \big((x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2\big)^{\frac{1}{2}},$$

مجموعه‌ی $[0,1] \times [0,1]$ بسته و مجموعه‌ی $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 < 1\}$ باز است.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنیم (X,d) یك فضای متری باشد و $A \subseteq X$. $x \in X$ را یك نقطه‌ی حدی A گوییم، هرگاه هر همسایگی از x، A را قطع کند؛ یعنی،

$$\forall r > 0, \ \exists y \in \big(A \setminus \{x\}\big) : \ d(x,y) < r.$$

مجموعه‌ی نقاط حدی A را با A' نمایش می‌دهیم.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنیم (X,d) یك فضای متری باشد و $A \subseteq X$. اگر $x \in A$ و x نقطه‌ی حدی A نباشد، آن‌گاه x نقطه‌ی تنهای A نام دارد.

مثال ۹.۲.۱. فضای متری $(\mathbb{R},d)$ را در نظر می‌گیریم که در آن d متر معمولی است. فرض کنیم $A = \{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{0\}$. در این صورت $A' = \{0\}$ و $B' = \emptyset$ ؛ یعنی، صفر یک نقطه‌ی حدی مجموعه‌ی A و یک نقطه‌ی تنهای مجموعه‌ی B است.

تعریف ۱۰.۲.۱. زیرمجموعه‌ی A از فضای متری (X,d) را در X چگال گوییم، هرگاه $\bar{A} = X$.

قضیه ۱۱.۲.۱. $A \subseteq X$ *در* X *چگال است، اگر و تنها اگر برای هر* $x \in X$ *و هر* $\epsilon > 0$ *داشته باشیم* $A \cap N(x,\epsilon) \neq \emptyset$.

برهان. فرض کنیم $\bar{A} = X$ و $x \in X$. پس x متعلق است به $\bar{A}$. در نتیجه برای هر $\epsilon > 0$، $N(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$. حال فرض کنیم برای هر $x \in X$ و هر $\epsilon > 0$، $N(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$. در این صورت $x \in \bar{A}$. بنابراین $\bar{A} = X$. $\square$

تعریف ۱۲.۲.۱. فضای متری (X,d) را جدایی‌پذیر گوییم، هرگاه شامل زیرمجموعه‌ای چگال و شمارا باشد.

مثال ۱۳.۲.۱. $\mathbb{R}$ جدایی‌پذیر است. زیرا $\mathbb{Q}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است که $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}$ شمارا است.

تعریف ۱۴.۲.۱. گوییم خانواده $\{A_i : i \in I\}$ از زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی X یک پوشش زیرمجموعه‌ی A از X است، اگر $A \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$. هرگاه زیرخانواده‌ای از $\{A_i : i \in I\}$ نیز A را بپوشاند، این زیرخانواده را یک زیرپوشش A نامیم.

تعریف ۱۵.۲.۱. اگر (X,d) یک فضای متری باشد، آن‌گاه هر پوشش یک مجموعه، مرکب از مجموعه‌های باز، یک پوشش باز آن مجموعه نام دارد.

تعریف ۱۶.۲.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متری باشد، گوییم زیرمجموعه‌ی A از X فشرده است، اگر هر پوشش باز A را بتوان به یک زیرپوشش متناهی تقلیل داد.

مثال ۱۷.۲.۱. در هر فضای متری، هر مجموعه‌ی متناهی یک مجموعه‌ی فشرده است.

تعریف ۱۸.۲.۱. دنباله‌ی $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ از فضای متری (X,d) را همگرا گوییم، هرگاه $x\in X$ی وجود داشته باشد که $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$.

x را حد دنباله‌ی $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ نامیده و می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ و یا $x_n \to x$ وقتی که $n\to\infty$.

قضیه ۱۹.۲.۱. *در فضای متری (X,d)، حد هر دنباله در صورت وجود یکتاست.*

برهان. به مرجع [۲۶] مراجعه شود. □

قضیه ۲۰.۲.۱. *فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای ناتهی از فضای متری (X,d) باشد. در این صورت $x\in \bar{A}$، اگر و تنها اگر دنباله‌ای مانند $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ در A موجود باشد که $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

برهان. به مرجع [۲۰] مراجعه شود. □

تعریف ۲۱.۲.۱. فرض کنیم $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از فضای متری (X,d) و $(n_i)_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد صحیح و مثبت باشد که $n_1<n_2<n_3<\ldots$. دنباله‌ی $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ را یک زیردنباله‌ی $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ می‌گوییم. اگر $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ همگرا باشد، حد آن را یک حد زیردنباله‌ای دنباله‌ی $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ می‌نامیم. واضح است که $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ همگرا به y است، اگر و تنها اگر هر زیردنباله‌ی $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ همگرا به y باشد.

تعریف ۲۲.۲.۱. نگاشت $f:(X,d_X)\longrightarrow (Y,d_Y)$ را در نقطه‌ی $a\in X$ پیوسته گوییم، هرگاه برای هر $\epsilon>0$ عدد $\delta>0$ موجود باشد که اگر $x\in X$ و $d_X(x,a)<\delta$، آن‌گاه $d_Y\big(f(x),f(y)\big)<\epsilon$.

f را روی X پیوسته گوییم، هرگاه در همه نقاط X پیوسته باشد. (در این تعریف، δ وابسته به x و ϵ است؛ یعنی، $\delta=\delta(x,\epsilon)$).

قضیه ۲۳.۲.۱. *فرض کنیم* $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ *یک تابع باشد. در این صورت* f *در* $a \in X$ *پیوسته است، اگر و تنها اگر برای هر دنباله مانند* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *در* X *که* $x_n \to a$ *وقتی که* $n \to \infty$*، داشته باشیم* $f(x_n) \to f(a)$ *وقتی که* $n \to \infty$.

برهان. به مرجع [۱] مراجعه شود. □

تعریف ۲۴.۲.۱. دنباله‌ی $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ در فضای متری (X, d) کراندار است، هرگاه عدد حقیقی مانند $M > 0$ و نقطه‌ای مانند $x \in X$ وجود داشته باشد که برای هر $n \in \mathbb{N}$، داشته باشیم $d(x_n, x) \leqslant M$.

تعریف ۲۵.۲.۱. در فضای متری (X, d)، دنباله‌ی $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ را کشی گوییم، هرگاه برای هر $\epsilon > 0$، $N \in \mathbb{N}$ای یافت شود که برای هر $m, n \geqslant N$ داشته باشیم $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

قضیه ۲۶.۲.۱. *در فضای متری* (X, d)، *هر دنباله‌ی همگرا، کشی است.*

برهان. به مرجع [۱] مراجعه شود. □

در مثال بعد نشان می‌دهیم که عکس قضیه‌ی قبل در حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۲۷.۲.۱. فضای متری (X, d) را در نظر می‌گیریم که در آن $X = (0, \infty)$ و d، متر معمولی است. دنباله‌ی $\{\frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\}$ یک دنباله‌ی کشی است که همگرا نیست.

تعریف ۲۸.۲.۱. فضای متری (X, d) را کامل گوییم، هرگاه هر دنباله‌ی کشی در این فضا همگرا باشد.

تعریف ۲۹.۲.۱. فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از فضای متری (X, d) و S مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی $d(x, y)$ باشد که $x, y \in A$. در این صورت سوپریمم S، قطر A نامیده می‌شود و با $diam(A)$ نشان داده می‌شود؛ یعنی،

$$diam(A) = \sup \{d(x, y) :\ x, y \in A\}.$$

تعریف ۳۰.۲.۱. فرض کنیم (X,d) یك فضای متری باشد. زیرمجموعه‌ی A از فضای متری X را پیش‌فشرده گوییم، هرگاه برای هر $\epsilon > 0$، تعداد متناهی زیرمجموعه‌ی $A_1, ..., A_n$ از X که قطر هر یك از آن‌ها از ϵ کمتر است وجود داشته باشد که

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

مجموعه‌های پیش‌فشرده، کلاً کراندار نیز نامیده می‌شوند.

مثال ۳۱.۲.۱. در فضای متری (X,d) هر مجموعه‌ی فشرده، پیش‌فشرده است. فرض کنیم $A \subseteq X$ فشرده باشد. در این صورت برای هر $\epsilon > 0$، $\{N(x, \frac{\epsilon}{3}) : x \in A\}$ پوشش بازی برای A است و از آن‌جایی که A فشرده است. پس تعداد متناهی نقطه‌ی $x_1, ..., x_n$ در A وجود دارد که $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} N(x_i, \frac{\epsilon}{3})$. اما برای هر i و هر x, y متعلق به $N(x_i, \frac{\epsilon}{3})$ داریم

$$d(x,y) \leqslant d(x,x_i) + d(x_i,y) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2}{3}\epsilon < \epsilon;$$

یعنی، برای هر i، $diam\big(N(x_i, \frac{\epsilon}{3})\big) < \epsilon$. بنابراین مجموعه‌ی A پیش‌فشرده است.

قضیه ۳۲.۲.۱. *فرض کنیم (X,d) یك فضای متری باشد. خواص زیر با پیش‌فشردگی زیرمجموعه‌ی A از X معادل هستند.*

(۱) *برای هر $\epsilon > 0$ تعداد متناهی نقطه‌ی $x_1, x_2, ..., x_n$ از A وجود دارد که*

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} N(x_i, \epsilon).$$

(۲) *برای هر $\epsilon > 0$ تعداد متناهی نقطه‌ی $x_1, x_2, ..., x_n$ از X وجود دارد که*

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} N(x_i, \epsilon).$$

برهان. به مرجع [۱۹] مراجعه شود. □

تعریف ۱.۲.۳۳. فرض کنیم (X,d) یك فضای متری باشد. $A \subseteq X$ را نسبی‌فشرده گوییم، هرگاه $\bar{A}$ در X فشرده باشد.

به طور معادل، A را نسبی فشرده است، هرگاه هر دنباله در A دارای زیردنباله‌ای همگرا در فضای X باشد.

قضیه ۱.۲.۳۴. *زیرمجموعه‌ی A از فضای متری کامل (X,d) نسبی‌فشرده است، اگر وتنها اگر پیش‌فشرده باشد.*

برهان. به مرجع [۳۲] مراجعه شود. $\square$