

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی اربیل

دانشکده علوم

گروه ریاضیات و کاربردها

روش هم محلی سینک

برای معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم منفرد به طور ضعیف

استاد راهنما

دکتر محمد ضارب نیا

توسط

نسترن علی نیا

دانشگاه محقق اردبیلی

تابستان ۱۳۹۰

تقدیم به

ساحت مقدس حضرت ولی عصر (عج)

تقدیم به

آبی نگاه همراهان همیشه زندگیم

پدر و مادرم

که هماره آسمان دلواپس چشمانشان بدرقه راهم بود

و به مهربانیهای یگانه خواهرم.

## تقدیر و تشکر:

همتم بدرقه راه کن ای طایر قدس  
که درازست ره مقصد و من نو سفرم

سپاس یگانه‌ای که آموختن را آموخت تا از آموخته‌هایمان راز آفرینش را فراگیریم. سپاس آفریننده‌ عشق را و سپاس کسانی را که آموختن را عشق می‌دانند. سپاس آنان را که روشنای ردای علمشان نردبان ناجی نادانی است. آنان که معلم میثاق مهرند و شکوفاگر شاخه‌های شباب اندیشه. تحقیق بیش از آنچه که یافتن باشد پی بردن به ندانم‌ها است و در مسیر رسیدن به این خودآگاهی، بی‌نهایت بودن احساس می‌شود.

اکنون که به یاری ایزد منان تدوین و نگارش این پایان‌نامه به پایان رسید، مشتاقانه در انتظار لحظه‌ای بودم تا نهایت سپاس خود را از کسانی که در این مدت مرا شرمنده‌ محبت‌هایشان ساخته‌اند، ابراز دارم. از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر محمد ضارب نیا که نه فقط نامشان زینت بخش پایان‌نامه من بود، بلکه با منت نهادن بر من مسئولیت این پایان‌نامه را به عهده داشتند و با نکته سنجی، دقت و زکاوت کم نظیر خویش از هیچ کمک و محبتی دریغ نکردند، بی‌نهایت سپاسگزارم. همچنین از جناب آقایان دکتر ناصر آقازاده و دکتر عبدالله برهانی فر که به ترتیب زحمات داوری خارجی و داوری داخلی پایان‌نامه بنده را تقبل کردند کمال تشکر را دارم.

و در نهایت از پدر و مادر، اولین و برترین آموزگارانم و همچنین خواهر مهربانم، که همراهی و همدلی آنان مرا در پیمودن این راه مصمم و توانا ساخت، صمیمانه قدر دانی می‌کنم.

نسترن علی نیا

شهریور ۱۳۹۰

نام خانوادگی: علی نیا	نام: نسترن
عنوان پایان نامه:	
روش هم محلی سینک برای معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم منفرد به طور ضعیف	
استاد راهنما: دکتر محمد ضارب نیا	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد	رشته: ریاضی کاربردی
دانشگاه: محقق اردبیلی	دانشکده: علوم پایه
تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۰/۰۶/۰۸	تعداد صفحه: ۱۲۳
کلید واژه ها:	
معادله انتگرالی فردهلم، هسته تکین ضعیف، تقریب سینک، مسئله حساب تغییرات	
چکیده:	
<p>در این پایان نامه، روش های عددی جدید برای معادلات انتگرالی خطی فردهلم نوع دوم با هسته تکین ضعیف را ارائه می دهیم. این روش ها توسط تقریب سینک با تبدیل هموار که تکنیک مؤثری برای نقاط تکین معادلات است، تعمیم داده شده اند. مثال های عددی نشان می دهد که روش ها به همگرایی نمایی می انجامد و از این نظر نتایج قبلی را که تاکنون فقط همگرایی چند جمله ای را گزارش کرده اند، بهبود می بخشد. همچنین جواب تقریبی برای مسائلی از حساب تغییرات با استفاده از روش سینک-گالرکین ارائه شده است. این تقریب، مسائل را به سیستم صریح معادلات جبری تبدیل می کند. در پایان از مثال های عددی برای نشان دادن دقت و کارایی روش های ارائه شده استفاده کرده ایم.</p>	

# فهرست مندرجات

ح	.....	مقدمه	
۱		تابع و تقریب سینک	۱
۲	.....	مقدمه	۱.۱
۲	.....	تابع سینک و سری ویتکر	۲.۱
۹	.....	تقریب سینک در نوار $D_d$	۳.۱
۱۴	.....	تقریب سینک در نوار $\Gamma$	۴.۱
۱۷	.....	قوانین درونیابی و کوادراتور	۵.۱
۲۱	.....	مثالهایی از حالت‌های مختلف $\Gamma$ و نگاشت همدیس	۶.۱
۲۸		معرفی تقریب $DE$	۲
۲۹	.....	مقدمه	۱.۲
۲۹	.....	نگاشت‌های $DE$ ، و تفاوت‌های آن با $SE$	۲.۲
۳۲	.....	فرمولهای کوادراتور $DE$	۳.۲
۳۸	.....	معرفی نگاشت برای بازه‌های مختلف ۱.۳.۲	
۴۵		حل مسائل حساب تغییرات با استفاده از روش سینک-گالرکین	۳

۴۶	.....	مقدمه	۱.۳
۴۷	.....	بیان مسأله	۲.۳
۴۹	.....	روش سینک-گالرکین	۳.۳
۵۲	.....	حل مسائل حساب تغییرات با استفاده از روش سینک	۱.۳.۳
۵۵		حل عددی معادله انتگرال فردهلم با روش سینک	۴
۵۶	.....	مقدمه	۱.۴
۵۷	.....	درونیابی و انتگرالگیری سینک	۲.۴
۵۷	.....	تقریب سینک	۱.۲.۴
۶۱	.....	انتگرالگیری سینک	۲.۲.۴
۶۳	.....	حل عددی معادلات انتگرالی فردهلم	۳.۴
۶۴	.....	روش SE-sinc	۱.۳.۴
۶۷	.....	روش DE-Sinc	۲.۳.۴
۶۹	.....	طریقه‌ی مشخص نمودن پارامترهای $\alpha$ و $d$	۴.۴
۸۰	.....	آنالیز خطا	۵.۴
۹۲		نتایج عددی	۵
۹۳	.....	مقدمه	۱.۵
۹۳	.....	مسائل حساب تغییرات	۲.۵
۹۸	.....	معادلات انتگرالی فردهلم	۳.۵
۱۱۵	.....	نتیجه‌گیری	۴.۵
۱۱۵	.....	پیشنهاد برای ادامه کار	۵.۵

۱۱۶

الف مراجع

۱۲۱

ب واژه نامه



# فهرست اشکال

عنوان شکل	صفحه
شکل ۱.۱. نمودار تابع سینک	۳
شکل ۲.۱. توابع پایه‌ای $S[k, \frac{\pi}{4}]$ برای $-\infty < x < \infty$ به ازای $k = -1, 0, 1$	۴
شکل ۳.۱. توابع مرکزی $S(0, h)$ به ازای $h = \pi/2, \pi/4, \pi/8$	۴
شکل ۴.۱. نمودار نوار $D_d$	۹
شکل ۵.۱. نمودار تبدیل $D$ به ناحیه‌ی $D_d$ تحت نگاشت $\phi$	۱۵
شکل ۶.۱. نمودار تبدیل $D$ به ناحیه‌ی $D_d$ تحت نگاشت $\phi$ مثال ۱.۱	۲۲
شکل ۷.۱. نمودار تبدیل $D$ به ناحیه‌ی $D_d$ تحت نگاشت $\phi$ حالت اول مثال ۲.۱	۲۳
شکل ۸.۱. نمودار تبدیل $D$ به ناحیه‌ی $D_d$ تحت نگاشت $\phi$ حالت دوم مثال ۲.۱	۲۵
شکل ۹.۱. نمودار تبدیل $D$ به ناحیه‌ی $D_d$ تحت نگاشت $\phi$ مثال ۳.۱	۲۶
شکل ۱.۲. مسیر نامتناهی $c$	۳۵
شکل ۲.۲. نمودار نگاشت $w = \arctan h z$	۳۹
شکل ۳.۲. نمودار نگاشت $w = (\arctan h z)^{\frac{1}{3}}$	۴۰
شکل ۱.۵. نمودارهای جواب دقیق و تقریبی مثال ۱.۵ به ازای $N = 3, N = 10$	۹۵
شکل ۲.۵. نمودارهای جواب دقیق و تقریبی مثال ۲.۵، $(y_1)$	۹۶
شکل ۳.۵. نمودارهای جواب دقیق و تقریبی مثال ۲.۵، $(y_2)$	۹۷
شکل ۴.۵. نمودارهای جواب دقیق و تقریبی مثال ۳.۵ به ازای $N = 3, N = 10$	۹۸
شکل ۵.۵. نمودارهای جواب دقیق و تقریبی مثال ۴.۵ روش SE	۱۰۰
شکل ۶.۵. نمودارهای جواب دقیق و تقریبی مثال ۴.۵ باروش DE	۱۰۱

- شکل ۷.۵. مقایسه نمودار روش‌های SE و DE مثال ۴.۵ ..... ۱۰۲
- شکل ۸.۵. نمودارهای جواب دقیق و تقریبی مثال ۵.۵ باروش SE ..... ۱۰۳
- شکل ۹.۵. نمودارهای جواب دقیق و تقریبی مثال ۵.۵ باروش SE ..... ۱۰۴
- شکل ۱۰.۵. نمودارهای DE و SE مثال ۵.۵ ..... ۱۰۵
- شکل ۱۱.۵. نمودارهای جواب دقیق و تقریبی مثال ۶.۵ باروش SE ..... ۱۰۶
- شکل ۱۲.۵. نمودارهای جواب دقیق و تقریبی مثال ۶.۵ باروش DE ..... ۱۰۷
- شکل ۱۳.۵. نمودارهای SE-DE مثال ۶.۵ ..... ۱۰۸
- شکل ۱۴.۵. نمودارهای جواب دقیق و تقریبی مثال ۷.۵ باروش SE ..... ۱۰۹
- شکل ۱۵.۵. نمودارهای جواب دقیق و تقریبی مثال ۷.۵ باروش DE ..... ۱۱۰
- شکل ۱۶.۵. نمودارهای SE-DE مثال ۷.۵ ..... ۱۱۱
- شکل ۱۷.۵. نمودارهای جواب دقیق و تقریبی مثال ۸.۵ باروش SE ..... ۱۱۲
- شکل ۱۸.۵. نمودارهای جواب دقیق و تقریبی مثال ۸.۵ باروش DE ..... ۱۱۴
- شکل ۱۹.۵. نمودارهای SE-DE مثال ۸.۵ ..... ۱۱۴

## مقدمه

در مطالعات اخیر، روش‌های تقریبی که در آن از تابع سینک<sup>۱</sup> استفاده شده است خانواده‌ی جدیدی از فرمول‌ها را برای محاسبه ارائه داده است. این فرمول‌ها ما را قادر به تقریب‌های دقیقی برای هر نوع عملیات حسابی مانند تقریب تابع، تقریب مشتق تابع و ... می‌سازند.

از آنجا که معادلات انتگرال نقش مهمی در ریاضیات ایفا می‌کند و کاربرد وسیعی در علوم مهندسی، شیمی، فیزیک و ... دارد و در بسیاری از موارد مسائلی مطرح هستند که دارای نقاط تکین می‌باشند. روش‌های سینک به دلیل خواص تابع پایه‌ای سینک، برای این‌گونه مسائل بسیار کارا می‌باشند. یکی از مزیت‌های روش‌های سینک آن است که حتی در مسائل منفرد نیز مرتبه دقت، نمایی است که این خاصیت در فصل چهارم این پایان‌نامه بررسی شده است. در ادامه به مختصری از تاریخچه‌ی روش‌های سینک می‌پردازیم.

تابع سینک نخستین بار در کارهای برل<sup>۲</sup> و ویتکر<sup>۳</sup> مورد استفاده قرار گرفت. ویتکر نخستین کسی بود که ارتباط بین تابع سینک و توابع تحلیلی را مورد بررسی قرار داد. در سال ۱۹۸۱، استنجر<sup>۴</sup> فرمول‌های تقریب سینک را بر اساس تابع ویتاکر برای توابع و قضایای مربوط به این تقریب بررسی کرد. در سال ۱۹۹۱، بیالکی<sup>۵</sup> تقریب سینک را با به کارگیری روش کالوکیشن برای مسائل مقدار مرزی ارائه داده است.

این پایان‌نامه شامل ۵ فصل است که در فصول اول و دوم تابع سینک و تبدیل‌های نمایی ساده و دوگانه را تعریف و قضایای مورد نیاز را ارائه می‌دهیم. در فصل سوم به روش حل

---

<sup>۱</sup> sinc

<sup>۲</sup> Borel

<sup>۳</sup> Whittaker

<sup>۴</sup> F. Stenger

<sup>۵</sup> Bialecki

مسائل حساب تغییرات با استفاده از روش سینک-گالرکین و در فصل چهارم به بیان روش حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم منفرد به طور ضعیف می‌پردازیم و سرانجام در فصل آخر تعدادی مثال برای نشان دادن کارایی و اثر بخشی روش ارائه می‌کنیم.

## فصل ۱

# تابع و تقریب سینک

## ۱.۱ مقدمه

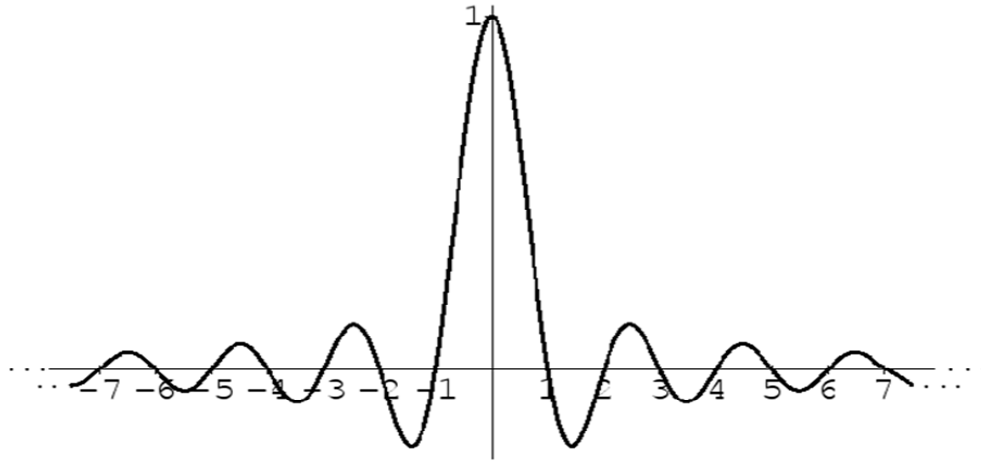
در این فصل تابع سینک و فرمول‌های تقریب بر اساس تابع سینک را که جایگاه ویژه‌ای در حل عددی مسائل فنی و مهندسی و ریاضی مانند معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال و ... به خود اختصاص داده است، معرفی می‌کنیم. در بخش دوم به معرفی تابع سینک و سری ویتکر می‌پردازیم و در بخش سوم و چهارم تعاریف و قضایای مربوط به تقریب سینک در نواحی  $D_d$  و  $\Gamma$  بررسی می‌کنیم. در بخش پنجم قوانین درونیابی و کوادراتور سینک را برای ناحیه  $\Gamma$  معرفی می‌کنیم و در بخش ششم فرمول‌های به دست آمده در بخش پنجم را برای نگاشت‌های مختلف با آوردن مثال‌هایی بررسی می‌کنیم. خطای فرمول‌های درونیابی و کوادراتور ارائه شده در این فصل با استفاده از روش سینک از مرتبه‌ی نمایی و به صورت کلی  $O(e^{-cn^{1/2}})$  می‌باشد. همه‌ی مطالب این فصل از مرجع [۲۸، ۱۱] تهیه شده است.

## ۲.۱ تابع سینک و سری ویتکر

برای تمام  $z \in \mathbb{C}$  تابع سینک به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\operatorname{sinc}(z) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}, & z \neq 0, \\ 1, & z = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

واضح است که برای مقادیر حقیقی  $|\operatorname{sinc}(z)| \leq 1$  می‌باشد. نمودار این تابع برای محور حقیقی در شکل ۱.۱ رسم شده است.



شکل ۱.۱. نمودار تابع سینک

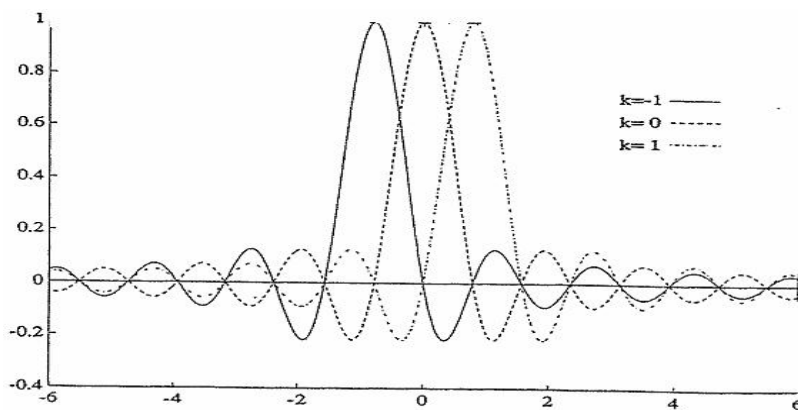
تابع سینک را می‌توان به صورت انتگرال مختلط نیز بیان نمود برای این منظور فرض کنید  $z \neq 0$ . بنابراین

$$\operatorname{sinc}(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z} = \frac{1}{\pi z} \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i} = \frac{1}{2i\pi z} [e^{itz}]_{t=-\pi}^{t=\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{itz} dt, \quad (2.1)$$

بدیهی است که برای  $z = 0$  نیز مقدار سمت راست رابطه (۲.۱) با تابع سینک برابر است.  $k$ -امین انتقال تابع سینک با طول گام  $h > 0$  برای  $k \in \mathbb{Z}$  به صورت زیر تعریف می‌گردد.

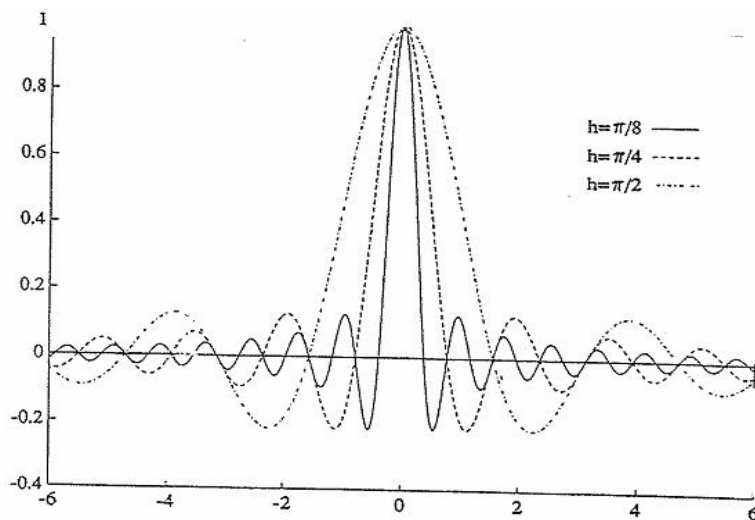
$$S(k, h)(z) = \operatorname{sinc}\left[\frac{z}{h} - k\right] = \begin{cases} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{h}(z - kh)\right]}{\left[\frac{\pi}{h}(z - kh)\right]}, & z \neq kh, \\ 1, & z = kh. \end{cases} \quad (3.1)$$

توابع پایه‌ای سینک  $S\left[k, \frac{\pi}{h}\right]$ ,  $-\infty < x < \infty$  و برای مقادیر مختلف  $k$  در شکل ۲.۱ رسم شده‌اند.



شکل ۲.۱. توابع پایه‌ای  $S[k, \frac{\pi}{4}]$  برای  $-\infty < x < \infty$  به ازای  $k = -1, 0, 1$

همچنین برای مقادیر مختلف  $h$  توابع مرکزی  $S(0, h)$  در شکل ۳.۱ رسم شده‌اند.



شکل ۳.۱. توابع مرکزی  $S(0, h)$  به ازای  $h = \pi/2, \pi/4, \pi/8$

تابع  $S(k, h)(x)$ ، یک تابع کاردینال می‌باشد. یعنی

$$S(k, h)(jk) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases} \quad (4.1)$$



خاصیت تعامد توابع سینک [۲۸]: مجموعه توابع  $\left\{ \frac{S(k,h)}{\sqrt{h}} \right\}_{k=-\infty}^{\infty}$  تشکیل یک مجموعه متعامد یکه در  $\mathbb{R}$  می دهند یعنی برای  $k, j \in \mathbb{Z}$  داریم

$$\frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} S(k,h)(x) S(j,h)(x) dx = \delta_{kj}. \quad (5.1)$$

همان دلتای کرونکر می باشد که این متعامد یکه بودن دنباله را نشان می دهد.

تعریف ۱.۱ فرض کنیم تابع  $f(x)$  روی محور حقیقی تعریف شده باشد. در این صورت برای  $h > 0$  سری

$$C(f,h)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \operatorname{sinc} \left[ \frac{x-kh}{h} \right], \quad (6.1)$$

به بسط وینکر تابع  $f$  معروف است.

سری  $C(f,h)$  نخستین بار توسط ای-تی وینکر معرفی گردید و به طور وسیع توسط جی-ام وینکر مورد مطالعه قرار گرفت. چگونگی استفاده از این سری برای تقریب توابع، تقریب انتگرال و تقریب مشتق توسط استنجر<sup>۱</sup> و دیگران بیان شده است. فرمول های زیادی همراه با کران های خطا در این قسمت موجود است. همان طور که در ادامه خواهیم دید مرتبه همگرایی روش های سینک معمولاً به صورت  $O(e(-\gamma\sqrt{n}))$  است. اخیراً برخی محققین با اضافه نمودن شرایطی خاص به مسأله مرتبه همگرایی روش های سینک را به  $O(e(-\gamma\frac{n}{\log n}))$  که  $\gamma > 0$  رسانده اند. [۲۸]

تعریف ۲.۱ تابع  $f$  از متغیر مختلط  $z$  را در نقطه  $z_0$  تحلیلی یا هولومورفیک می گویند هرگاه مشتق آن نه تنها در  $z_0$  بلکه در هر نقطه  $z$  از یک همسایگی  $z_0$  موجود باشد.

تعریف ۳.۱ فرض کنیم  $h > 0$ ، آن گاه  $W(\frac{\pi}{h})$  نمایش خانواده ای از همه توابع تحلیلی  $f$  در فضای مختلط  $\mathbb{C}$  می باشد به طوری که،

$$\begin{aligned} I) & \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty, \\ II) & |f(z)| \leq ce^{(\pi|z|)/h}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

در زیر دو قضیه اساسی را بیان می‌کنیم:

قضیه ۱.۱ قضیه پارسوال<sup>۱</sup> [۲۸]: اگر  $1 \leq p \leq \infty$  و  $q = \frac{p}{p-1}$  و اگر  $f \in L^p(\mathbb{R})$  و  $g \in L^q(\mathbb{R})$  و اگر  $F(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} f(t) dt$  و  $G(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} g(t) dt$  تبدیلات فوریه از  $f$  و  $g$  به ترتیب باشند آنگاه

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} F(x) \overline{G(x)} dx. \quad (۸.۱)$$

قضیه ۲.۱ قضیه پلی وینر<sup>۲</sup> [۲۸]: برای هر  $f \in W(\frac{\pi}{h})$  یک تابع در  $L^2(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h})$  وجود دارد به طوری که برای همه  $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} f(t) e^{izt} dt. \quad (۹.۱)$$

حال با استفاده از این دو قضیه، قضیه‌ای را بیان و اثبات می‌کنیم که یکی از مهمترین ویژگی‌های تابع وینکر یعنی  $C(f, h)$  در فضای  $W(\frac{\pi}{h})$  می‌باشد.

قضیه ۳.۱ فرض کنید  $h > 0$ ,

۱- هرگاه  $f \in W(\frac{\pi}{h})$  آن‌گاه  $f$  نمایش سری اصلی وینکر می‌باشد یعنی

$$f(x) = C(f, h)(x), \quad (۱۰.۱)$$

$$C(f, h)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) S(k, h)(x). \quad (۱۱.۱)$$

۲- دنباله متعامد یکه در  $W(\frac{\pi}{h})$  می‌باشد.

۳- هم چنین داریم

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} h \sum_{k=-N}^N f(kh). \quad (۱۲.۱)$$

---

<sup>۱</sup>Parsevals  
<sup>۲</sup>Paley-wiener

برهان :

۱- با استفاده از قضیه پلی وینر برای تابع  $f \in W(\frac{\pi}{h})$  مفروض، یک تابع  $F \in L^{\infty}(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h})$  وجود دارد به طوری که

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} F(x) e^{-ix} dt, \quad (13.1)$$

تابع  $F$  تعریف شده در بالا، در حقیقت سری فوریه در بازه  $(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h})$  می باشد، یعنی

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikh}, \quad -\frac{\pi}{h} < t < \frac{\pi}{h} \quad (14.1)$$

که در آن

$$c_k = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} F(t) e^{-ikh} dt = hf(kh).$$

اتحاد آخری از (۱۳.۱) نتیجه می شود. حال برای  $x \in \mathbb{R}$  خواهیم داشت

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{ixt} dt = \begin{cases} h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) e^{ikhx}, & |x| < \frac{\pi}{h}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{h}. \end{cases} \quad (15.1)$$

از طرفی چون

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} h e^{ikh} e^{-ixt} dt = S(k, h)(x), \quad (16.1)$$

لذا با جایگذاری (۱۵.۱) در (۱۳.۱) و محاسبه انتگرال خواهیم داشت

$$f(x) = C(f, h)(x).$$

۲- اگر  $k$  و  $l$  اعداد صحیح باشند، با استفاده از رابطه (۱۶.۱) و قضیه پارسوال داریم:

$$\int_{\mathbb{R}} S(k, h)(x) S(l, h)(x) dx = \frac{h^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{i(k-l)ht} dt = h \delta_{k-l}, \quad (17.1)$$

۳- اگر در رابطه (۱۵.۱) قرار دهیم  $x = 0$ ، آنگاه خواهیم داشت:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) dt = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \quad (18.1)$$

به این ترتیب اثبات تمام می شود.  $\square$

نتیجه ۱.۱ اگر  $f \in W(\frac{\pi}{h})$  ، آنگاه  $f' \in W(\frac{\pi}{h})$ .

برهان: اگر از رابطه ی (۱۳.۱) مشتق گیری کنیم داریم:

$$f^{(k)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} F(x) (-ix)^k e^{-ix} dt,$$

از آنجایی که  $F \in L^2(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h})$  ،  $G \in L^2(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h})$  و اگر  $G$  را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$G(x) = (-ix)^k F(x)$$

و طبق نامساوی شوارتز عبارت زیر را داریم:

$$\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |G(x)|^2 dx \leq \left( \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |x|^{2k} dx \right) \left( \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |F(x)|^2 dx \right)$$

چون  $f \in W(\frac{\pi}{h})$  پس  $f^{(k)} \in W(\frac{\pi}{h})$  برای هر  $k$  نامنفی برقرار است. □

فرض می کنیم  $m, n \in Z$  و  $\delta_{m-n}^{(k)}$  به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\delta_{m-n}^{(k)} = \left( \frac{d}{dx} \right)^k S(m, 1)(x)|_{x=n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (19.1)$$

آنگاه

$$f^{(k)}(nh) = h^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(mh) \delta_{m-n}^{(k)}. \quad (20.1)$$

حال با استفاده از رابطه ی (۴.۱) می توانیم روابط زیر را به دست آوریم:

$$\delta_{m-n}^{(0)} = S(m, h) \circ \phi(x)|_{x=x_m} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases} \quad (21.1)$$

$$\delta_{m-n}^{(1)} = h \frac{d}{d\phi} S(m, h) \circ \phi(x)|_{x=x_m} = \begin{cases} 0, & m = n, \\ \frac{(-1)^{(m-n)}}{(m-n)}, & m \neq n, \end{cases} \quad (22.1)$$

$$\delta_{m-n}^{(2)} = h^2 \frac{d^2}{d\phi^2} S(m, h) \circ \phi(x)|_{x=x_m} = \begin{cases} \frac{-\pi^2}{3}, & m = n, \\ \frac{-2(-1)^{(m-n)}}{(m-n)^2}, & m \neq n. \end{cases} \quad (23.1)$$