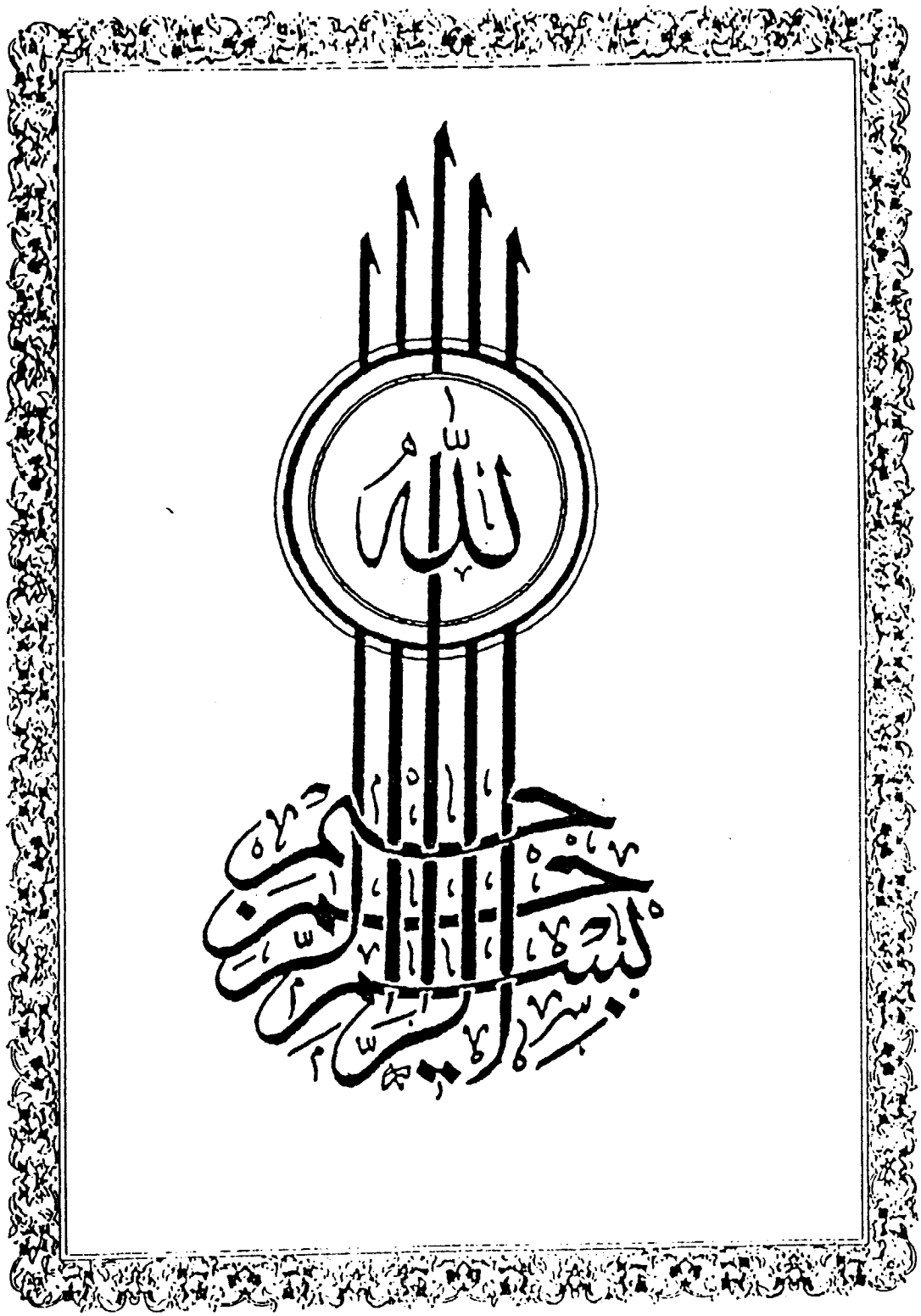

٢٩٠٦٥

مرکز اطلاعات علمی ایران
تاریخ ثبت

۱۰ /۶۱/ ۱۳۷۸

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

پایان نامه دورهٔ کارشناسی ارشد ریاضی محض (هندسه)

عنوان:

G- خمینه‌های ریمانی با فضای مداری یک بعدی

نگارش :

غلامعلی شجاعی

3810/2

استاد راهنما:

دکتر سید محمد باقر کاشانی

بهار ۱۳۷۸

۲۶۰۶

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

اعضای هیئت داوران نسخهٔ نهایی پایان نامه خانم / آقای غلامعلی شجاعی

تحت عنوان: **G - منیفلدهای ریمانی با فضای مداری یک بعدی**

را از نظر فرم و محتوی بررسی نموده و پذیرش آنرا برای تکمیل درجه کارشناسی ارشد پیشنهاد می‌کنند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبهٔ علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	آقای دکتر سید محمدباقر کاشانی	دانشیار	
۲- استاد ناظر	سرکارخانم دکتر ویدا میلانی	استادیار	
۳- استاد ناظر	آقای دکتر علی ایرانمنش	استادیار	
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر مجتبی منیری	استادیار	

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

تاریخ: .....

شماره: .....

پیوست: .....

آیین نامهٔ چاپ پایان نامه (رساله) های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظربه اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله) های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس مبیّن بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادهٔ ۱ در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طورکتبی به مرکز نشر دانشگاه اطلاع دهد.

مادهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد/~~رساله دکتری~~ نگارنده در رشتهٔ ریاضی محض است که در سال ۱۳۷۸ در دانشکدهٔ علوم پایه دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار~~خانم~~/ جناب آقای دکتر سید محمد باقر کاشانی و مشاورهٔ سرکار~~خانم~~/جناب ~~آقای دکتر~~ ـــــ از آن دفاع شده است.»

مادهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های نشریات دانشگاه تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به مرکز نشر دانشگاه اهدا کند دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادهٔ ۴ در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس تأدیه کند.

مادهٔ ۵ دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادهٔ ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادهٔ ۶ اینجانب خدیجه شجاعی دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

خدیجه شجاعی

تشکر وقدردانی

از زحمات وهمکاری ارزنده

جناب آقای دکتر سید محمد باقر کاشانی،

دانشیار دانشگاه تربیت مدرس بخاطر راهنماییهای سودمندشان در این پایان نامه، صمیمانه سپاسگزارم.

همچنین برخودم لازم می‌دانم از:

سرکارخانم دکتر ویدا میلانی، جناب آقای دکتر منیری، جناب آقای دکتر ایرانمنش، بخاطر مطالعهٔ پایان نامه وحضورشان در جلسه دفاعیه صمیمانه تشکر وقدردانی نمایم.

چکیده

دراین پایان نامه G - خمینه‌های ریمانی از نقص همگنی یک (یعنی خمینه ریمانی M که یک گروه G از ایزومتریهای آن روی M عمل میکند ودارای مداری از نقص بعد یک می‌باشد) مطالعه می‌شود.

بطور مشخصترچنین خمینه هایی (با تقریب یکسانی نرمال) توصیفی از زیر گروههای،گروه لی G را ارائه می‌دهد .همچنین پیچش (Twist) یک ژئودزیک نرمال، معرفی شده و با نشان دادن اینکه پیچش عبارتست از مرتبهٔ یک گروه وایل وابسته به G - خمینه، نتایجی راجع به مقادیر ممکن آن ارائه می‌گردد. از پیچش در توصیف جبری فوق استفاده می‌گردد.

کلمات کلیدی .

G - خمینه ریمانی، عمل گروه لی فشرده، فضا مدار، گروه وایل، ژئودزیک نرمال، برشها، خمینه از نقص همگنی یک

فهرست مطالب

عنوان - صفحه

مقدمه ۱

فصل اول تعریفها وقضیه‌های مقدماتی

۱-۱-فضا مدار ۸

۱-۲-پاره خطها در خمینه‌های با نقص همگنی یک وناوردایی آنها ۱۱

۱-۳-برشها وگروه وایل ۱۴

۱-۴-ساختن یک خمینه از نقص همگنی یک باپاره خط علامت دار ۲۰

فصل دوم خمینه‌های ریمانی از نقص همگنی

یک و ژئودزیکهای نرمال

۲-۱-متریک واستغراق ریمانی ۲۸

۲-۲-مثالهایی از خمینه‌های ریمانی با نقص همگنی یک ۳۵

۲-۳-ژئودزیک‌های نرمال ویکسانی‌های نرمال ۴۰

۲-۴-خاصیت‌های یک ژئودزیک نرمال ،پیچش ۴۶

۲-۵-یک مجموعهٔ کامل از ناورداها - قضیه اصلی ۴۸

عنوان **صفحه**

فصل سوم G- **خمینه‌های ابتدایی با فضا مدار** $Q=R, S^1, R+$ و

پیچش یک خمینه ریمانی از نقص همگنی یک‌بافضامدار $Q=[0,\pi]$

۳-۱- زوجهای قابل قبول گروهها ۶۱

۳-۲- سه تایی‌های قابل قبول گروهها ۶۷

۳-۳- مثالهایی از خمینه‌های ابتدایی با $Q=[0,\pi]$ ۶۹

۳-۴- پیچش یک خمینه ریمانی از نقص همگنی یک با فضا مدار $Q=[0,\pi]$ ۷۳

مراجع ۷۸

واژه نامه ۸۰

چکیده به فارسی .....

چکیده به انگلیسی .....

مقدمه

مطالعه G- خمینه‌های ریمانی از نقص همگنی یک اهمیت زیادی دارد.

یک G- خمینه ریمانی با فضای مداری یک بعدی (G- خمینه ریمانی با نقص همگنی یک) عبارتست از یک خمینه ریمانی تمام (M,g) همراه با یک گروه لی بسته $G \leq Iso(M)$ که روی M عمل می‌کند ودارای مداری از نقص بعد یک می‌باشد در این صورت

$M/G=R$ یا R^+ یا S^1 یا $[0,2\pi]$ (فضای مدارها). [13]

ژئودزیک کامل γ در خمینه ریمانی از نقص همگنی یک را نرمال گوئیم اگرتمام مدارها را بطور متعامد قطع کند.

پیچش یک ژئودزیک نرمال عبارتست از تعداد نقاط تقاطع آن ژئودزیک با یک مدار تکین. [4]

همچنین گروه وایل وابسته به یک ژئودزیک نرمال γ عبارتست از گروه W متشکل از کلیه ایزومتریهای γ که از گروه G القاء شده است. [3]

هنگامی که گروه عمل کننده بر خمینه، فشرده واز نقص همگنی یک باشد کارهای Bredon، Mostert [13] از اساسی‌ترین تحقیقات دراین زمینه است. توپولوژی چنین خمینه هایی با جزئیات بوسیله کسانی چون S.Halperin, K.Grove [11] مطالعه شده است. در مرجع [3] نگرشی دو مرحله‌ای و جبری برای رده بندی G- خمینه‌های با نقص همگنی یک ارائه شده وگام اول جهت شناخت این G- خمینه‌ها کامل شده است. از جمله مباحث مرجع

[4] ارائه مطالب مرجع [3] به زبان هندسه ریمانی میباشد.

همچنین در مرجع [4] مفهوم پیچش یک G- خمینه ریمانی از نقص همگنی یک مطرح شده ونتایج مفیدی در مورد مقدارممکن پیچش ارائه می‌شود.

هدف این پایان نامه شناسایی G- خمینه‌های ریمانی با نقص همگنی یک ویـافتن مـقدار ممکن برای پیچش این G- خمینه هاست. دراین پایان نامه مطالب مرجع‌های [4],[3] ارائـه و توضیح داده شده است .این پایان نامه ازسه فصل تشکیل شده است .

فصل اول شامل چهار بخش است در بخش اول پس از بیان مفهوم فضا مدار به این مهم اشاره شده است که :

۱-۱-۲ - نتیجه - یک فضا مدار یک بعدی Q بایکی از چهار فضای توپولوژیک هاسدورف زیر همانسان است. $I)Q=R \quad II)Q=R^{+} \quad III)Q=S^{1}=\frac{R}{2\pi Z}$

$IV)\ Q=[0,2\pi]$

در بخش دوم وسوم پس از ارائه چند تعریف ومعرفی پاره خطها در خمینه‌های با نقص همگنی یک وناوردایی آنها و مفهوم برش و گروه وایل، قضایای مقدماتی بیان شده است که برای اثبات بعضی از آن‌ها از جدول یک [1] کمک گرفته شده است .

در بخش پایانی این فصل پس از ارائه تعریفها وقضیه‌های مقدماتی ومفهوم یک خمینه از

۱- جدول یک در صفحه ۶۴ قرار دارد.

نقص همگنی یک با پاره خط علامت دار، گزاره اصلی بصورت زیر بیان شده است .

۱-۴-۴- گزاره - [3] - (گزاره اصلی)-الف) روی مجموعهٔ $M\theta$ یک توپولوژی هاسدورف یکتا (باتقریب هم ارزی) وجود دارد که نسبت به آن عمل گروه G روی $M\theta$ پیوسته وخم $\delta\theta$ یک پاره خط است .

ب)$M\theta$ بااین توپولوژی یک خمینه توپولوژیک است .

ج) روی $M\theta$ یک ساختار یکتای هموار وجود دارد که نسبت به آن عمل گروه G هموار وپاره خط $\delta\theta$ نیز هموار است .

فصل دوم شامل پنج بخش است .

در بخش اول مفهوم متریک واستغراق ریمانی ونتایج مربوط به آن ارائه شده است .تا در ادامه، مطالب از دیدگاه هندسه ریمانی بررسی شود.

دربخش دوم مثالهایی از خمینه‌های ریمانی با نقص همگنی یک ارائه شده است اما در بخشهای سوم وچهارم بعد از معرفی مفهوم ژئودزیکها وخاصیت‌های آن مفهوم پیچش ارائه شده است. چند قضیه جالب ومهم در این دو بخش ارائه شده است که در بخشهای بعدی استفاده شایانی از آنها شده است .از جمله :

۲-۳-۸- قضیه - [4] - فرض کنید γ یک ژئودزیک نرمال و W گروه وایل مربوط به آن باشد آنگاه یکی از حالتهای زیر را داریم :

I) $Q=R$ و $W=\{e\}$

II) $Q=R^{+}$ و $W=Z_2 = <\sigma\ (H/K)>$

که درآن $K=G_{\gamma(t)}$ پایدار ساز نقطه عادی $\gamma(t)$ که $t\neq 0$, $H=G_{\gamma(0)}$ پایدار ساز نقطه تکین یکتای $\gamma(0)$ از ژئودزیک γ است.

III) $Q=S^1 =R/2\pi Z$,$W=Z_k =<\tau>$ $k\in \hat{Z} =Z \cup \{\infty\}$

که $\tau=aK$ و عنصر $a\in G$ نقطه $x=\gamma(0)\in P_0=\Pi^{-1}(0)$ را به نقطه $x'=\gamma(2\pi)\in P_0$ تبدیل می‌کند.

IV) $Q=[0,\pi]$ $W=D_k=<\sigma=\sigma(H/K),\sigma'=\sigma(H'/K)>$

W یک گروه دو وجهی از مرتبهٔ $2k$ است که $k\in\hat{Z}$ و $H=G_{\gamma(0)}$ و $H'=G_{\gamma(\pi)}$ پایدارسازهای نقاط تکین γ و K پایدار ساز یک نقطه عادی $\gamma(t)$ است که $t\neq\pi,0$.

همچنین دو قضیه که در فصل اول به کمک جدول یک ثابت شده بود دراین بخشها مستقیماً ثابت شده است.

بالاخره در بخش پایانی این فصل پس از ارائه یک مجموعهٔ کامل از ناورداها قضیه اصلی بشرح زیر ارائه شده است.

۲-۵-۳- قضیه - [4] - (قضیه اصلی) - الف) نگاشت β یک تناظر یک به یک بین G-خمینه‌های ریمانی بطور نرمال یکسان از نقص همگنی یک وکلاس مجموعه‌های قابل قبول

یکسان (با تقریب تزویج در گروه G) برقرار می‌کند.

ب) خمینه (M_θ, g_θ) وابسته به مجموعهٔ قابل قبول θ اولیه است اگر وفقط اگر $G=G_\theta$ و عمل G موثر است اگر وفقط اگر مجموعهٔ θ موثر باشد.

ج) دو خمینه $M_\theta, M_{\theta'}$ وابرسان هستند اگر وفقط اگر فضا مدار یکسان Q داشته و دریکی از شرطهای زیر صدق کنند.

a) $Q=R$ یا R^+ ومجموعه‌های θ' و θ مزدوج باشند $(\theta \sim \theta')$.

b) $Q=S^1$ و $\theta' \sim \theta^a$ که $\theta=\{K,\tau\}, \theta^a=\{K,a\tau\}$ و a عنصری از مولفه همبندی از گروه $N=\frac{N_G(K)}{K}$، $N_\circ$ است که عضو خنثی را دربردارد.

c) $Q=[\circ,\pi]$ و $\theta' \sim \theta^a$ که $\theta=\{H,K,H'\}$ و $\theta^a=\{H,K,aH'a^{-1}\}$ و a عنصری از N° است.

فصل سوم شامل چهار بخش است که در بخشهای اول ودوم به ترتیب زوجهای قابل قبول گروهها وسه تایی‌های قابل قبول گروهها ارائه شده است. در بخش سوم مثالهایی از خمینه‌های ابتدایی (اولیه) با فضامدار $Q=[\circ,\pi]$ بیان شده است وبالاخره اینکه در بخش پایانی با استفاده از قضایای ارائه شده دراین بخش وبخشهای قبلی به خصوص قضیه اصلی فصل دوم نتایج مفید و جالبی در مورد پیچش یک خمینه ریمانی از نقص همگنی یک با فضا مدار $Q=[\circ,\pi]$ ارائه شده است.

فصل اول

تعریفها و قضیه‌های مقدماتی

بخش اول

فضا مدار

فرض کنید گروه لی G روی خمینه M بطور هموار عمل کند و x نقطه‌ای از M باشد فضای $Gx=\{gx\ ;\ g\in G\}$ را مدار x و $G_x = \{g\in G;gx=x\}$ را گروه پایدار ساز نقطه x گوئیم. علاوه براین گوئیم گروه G روی خمینه M بطور موثر عمل می‌کند اگر فقط عنصر همانی هر نقطهٔ M را ثابت نگه دارد .اگر عمل G روی M دقیقاً یک مدار داشته باشد گوئیم G بر M بطور متعدی عمل می‌کند. مجموعهٔ مدارها را با Q=M/G و نگاشت طبیعی را با

$$\Pi:M\to Q$$

$$\Pi(x) = Gx$$

نشان می‌دهیم .

اکنون فرض کنید M یک خمینه از بعد n+1 باشد وگروه لی G روی M بطور هموار چنان عمل کند که حداقل یک مدار n- بعدی وجود داشته باشد.

۱-۱-۱- قضیه - [12] - فضای مدارها، M/G بایکی از فضاهای زیر یکسان (همیومرفیک)