به نام آن که جان را فکرت آموخت

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده فیزیک

نظریه میدان همدیس و حد بی-تنش ریسمان بوزونی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد فیزیک، گرایش ذرات بنیادی

مریم عسگری

استاد راهنما

دکتر فرهنگ لران

۱۳۹۱

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده فیزیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته فیزیک خانم مریم عسگری

تحت عنوان

نظریه میدان همدیس و حد بی-تنش ریسمان بوزونی

در تاریخ ۱۳۹۱/۱۱/۲ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر فرهنگ لران
۲- استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر منصور حقیقت
۳- استاد داور	دکتر بهروز میرزا
۴- استاد داور	دکتر مسلم زارعی
سرپرست تحصیلات تکمیلی	دکتر مجتبی اعلائی

قدردانی

سپاس فراوان،
از استاد گرامی دکتر لران، برای رهنمودهای ارزنده و بی‌دریغ، و همه‌ی تلاش‌های دلسوزانه‌شان،
از مادر، پدر و خواهرانم برای حضور زیبا و لحظه‌-لحظه‌شان،
و از همه‌ی دوستان عزیزم برای یاری‌ها و حضور دلگرم‌کننده‌شان.

فهرست مطالب

چکیده

نظریه میدان همدیس یک نظریه میدان کوانتمی با تقارن‌های همدیس است. در این پایان‌نامه ابتدا به معرفی نظریه میدان همدیس در دو-بُعد می‌پردازیم و می‌بینیم جبر حاکم بر این نظریه جبر ویراسرو است. با استفاده از فرمول‌بندی نظریه میدان همدیس، تابع پارش را برای نظریه‌ی آزاد فرمیونی و بوزونی محاسبه می‌کنیم. برای نظریه‌ی میدان همدیس روی چنبره، تابع پارش تحت تبدیلات آجری ناورداست. فرض می‌کنیم میدان‌های بوزونی در بازه‌ی مشخصی فشرده‌سازی شده‌اند، بنابراین خواهیم دید که تابع پارش نظریه‌ی آزاد فرمیونی با تابع پارش نظریه‌ی آزاد بوزونی در یک بازه‌ی مشخص برابر است. به عنوان یک نظریه میدان همدیس، نظریه ریسمان بوزونی با کنش پولیاکف را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و آن را با استفاده از روش BRST کوانتیده می‌کنیم. هم‌چنین برای نظریه‌ی ریسمانی که فضای هدف آن گروه-خمینه‌ی یک گروه لی دل‌خواه است. جریان‌های مولد این گروه از جبر آفین کث-مودی پیروی می‌کنند و همان‌گونه که خواهیم دید این جبر شامل یک مقدار مشخصه به نام تراز جبر است. کنشِ این نظریه را کنش وس-زومینو-ویتن می‌نامند. با اضافه کردن یک آزادی پیمانه‌ای به این کنش، به طوری که مشاهده‌پذیرهای آن در گروه حاصلِ قسمتی مقدار گیرند، این مدل را پیمانه‌ای می‌کنند. ریسمان‌ها در این مدل در حد بحرانیِ تراز جبر رفتار ویژه‌ای دارند. با استفاده از فرمول‌بندی سوگاوارا می‌بینیم این حد، حد بی-تنشِ ریسمان بوزونی است. پس از تثبیت پیمانه‌ی کنش با زیرگروه‌های گروه تقارنیِ آن نشان داده می‌شود که در حد بی-تنش هندسه‌ی فضای هدف یک-بُعدی است و گرانش به شکل یک میدان لیوویل با بار زمینه‌ی مشخص و ثابت کیهان‌شناختیِ صفر از طیف واجفتیده می‌شود.

کلمات کلیدی:

نظریه میدان همدیس، جبر ویراسرو، ریسمان بوزونی، جبر آفین کث-مودی، ساختار سوگاوارا، کنش وس-زومینو-ویتن، حد بی-تنش، میدان لیوویل.

فصل ۱

مقدمه

نظریه میدان همدیس، یک نظریه میدان کوانتمی است که تحت تبدیلات همدیس ناورداست. یک تبدیل مهم در این نظریه، تبدیل بازمقیاس‌بندی است. در یک نظریه‌ی مقیاس-ناوردا، با چند برابر شدن طول، مشاهده‌پذیرهای فیزیکی به شکل هموردا تبدیل می‌شوند. بنابراین نظریه‌ای با این تقارن شامل هیچ مقیاس مرجّحی نیست. به طور عمومی انتظار نداریم در طبیعت شاهد چنین تقارنی باشیم، زیرا اغلب طولِ مشخصه‌هایی داریم که برحسب پارامترهای بنیادی تعریف می‌شوند، مانند طول پلانک و طول موج کامپتون که تحت بازمقیاس‌بندی ناوردا نیستند. اما اگر این طول مشخصه‌ها صفر یا بی‌نهایت باشند می‌توانیم انتظار داشته باشیم نظریه مقیاس-ناوردا باشد. این تقارن در مدل‌های آماریِ دو-بُعدی، در پدیده‌های بحرانی در گذار فاز مرتبه‌ی دوم دیده می‌شود. یکی از این مدل‌ها، مدل آیزینگ است که مدلی دو-بُعدی از یک گاز فرومغناطیس است و در گذار فاز مرتبه‌ی دوم دمای بحرانی دارد [۴، ۵]. کاربرد مهم دیگر نظریه میدان همدیس در نظریه‌ی ریسمان است.

از طرفی هر نظریه میدان همدیس شامل کمیتی به نام بارمرکزی[۱] است که متناسب با انرژیِ خلاء نظریه است. این کمیت همان‌گونه که خواهیم دید جمله‌ی نابهنجاری[۲] است. بنابراین برای این که نظریه در سطح کوانتمی سازگار باشد بار مرکزی کل باید صفر شود. در نظریه ریسمان بوزونی بار مرکزی برابر با ابعاد فضا-زمان است. زمانی که

---

[۱] central charge

[۲] anomaly

تقارن‌های اضافی نظریه ریسمان بوزونی را با استفاده از تثبیت پیمانه حذف می‌کنیم، فضای هیلبرت نظریه شامل حالت‌های شبح خواهد شد و همان‌گونه که خواهیم دید بار مرکزی برای میدان‌های شبح $c = -26$ است. بنابراین برای این که یک نظریه‌ی ریسمان بوزونی در سطح کوانتمی سازگار باشد، یعنی برای آن که بار مرکزی کل صفر باشد باید فضا-زمان، ۲۶-بُعدی باشد. هم‌چنین نظریه ریسمانی شامل میدان‌های فرمیونی نیز داریم، در این نظریه برای سازگاری در سطح کوانتمی باید فضا-زمان، ۱۰-بُعدی باشد. فضای هدف ریسمان را می‌توانیم یک گروه-خمینه[۱] در نظر بگیریم، کنش چنین نظریه‌ای با کنش وس-زومینو-ویتن (WZW)[۲] داده می‌شود. این کنش برحسب اعضای گروه تقارنیِ گروه-خمینه نوشته می‌شود و پارامتر α' در ریسمان‌های بوزونی که با وارون تنشِ ریسمان متناسب است به طور مستقیم با تراز جبرِ این گروه مربوط است. می‌توانیم به کنش وس-زومینو-ویتن یک آزادی پیمانه‌ای دهیم، طوری که مشاهده‌پذیرهای آن در گروه حاصلِ قسمتی مقدار گیرند. بررسی این نظریه در حدی که α' بزرگ باشد، هم‌ارزِ تثبیت پیمانه‌ایِ زیرگروهِ پوچ‌توان[۳] است. این حد را به‌عنوان حد بی-تنش نظریه می‌شناسیم. در این حد هندسه‌ی فضای هدف نظریه ریسمان بوزونی به یک بُعد کاهش می‌یابد.

در این پایان‌نامه در فصل دوم نظریه میدان همدیس را در d-بُعد معرفی می‌کنیم و با توجه به آن‌چه گفتیم، برای نظریه میدان در دو-بُعد به جزئیاتِ بیش‌تری می‌پردازیم. در این فصل شکل توابع چندنقطه‌ای را با استفاده از قیدهایی که تقارن همدیس روی آن اعمال می‌کند به دست می‌آوریم. سپس فضای هیلبرت نظریه‌ی آزاد بوزونی، نظریه‌ی آزاد فرمیونی و شبح‌ها را به دست می‌آوریم.

در فصل سوم تابع پارش را برای نظریه‌ی آزاد فرمیونی و بوزونی به‌دست می‌آوریم و می‌بینیم برای ذراتِ روی چنبره، ناوردایی آجری قیدهایی روی تابع پارش اعمال می‌کند. هم‌چنین در این فصل خواهیم دید که تابع پارش نظریه‌ی فرمیونی و بوزونی در شرایط خاصی برابر است و این به این معناست که این دو نظریه در حد ویژه‌ای هم‌ارزند.

در فصل چهارم می‌بینیم که نظریه ریسمان بوزونی با کنش پولیاکف[۴] شامل تقارن بازپارامتربندی و وایل[۵] است. پس از تثبیت پیمانه بخشی از تقارن‌ها که همان تقارن همدیس است باقی خواهد ماند و نیز نظریه شامل حالت‌های شبح است. برای حذف این حالت‌ها، از روش BRST[۶] استفاده می‌کنیم و در انتها طیف حالت‌ها را برای نظریه ریسمان بوزونی به دست می‌آوریم.

در فصل پنجم همان‌گونه که خواهیم دید می‌توانیم تعمیمی از جبر ویراسرو با تقارن‌های بیش‌تر بنویسیم. یکی

---

[۱] group manifold

[۲] Wess-Zumino–Witten

[۳] nilpotent

[۴] Polyakov

[۵] Weyl

[۶] Becchi-Rouet-Stora-Tyutin

از این تعمیم‌ها جبر آفین کث-مودی است و با استفاده از این جبر ساختار سوگاوارا را معرفی می‌کنیم. در این فرمول‌بندی می‌توانیم تانسور تکانه-انرژی را برحسب جریان‌های نظریه بنویسیم و بار مرکزی را برحسب تراز جبر حاکم بر نظریه به دست آوریم. در انتهای این فصل به فرآیند بوزونی کردن[۱] می‌پردازیم. طی این فرآیند خواهیم دید که جریان‌های نظریه‌ی بوزونی را می‌توانیم برحسب عناصرِ گروهی بنویسیم که این جریان‌ها مولد آن هستند و از همان جبرِ جریانِ فرمیونی تبعیت می‌کنند. برای این که این جریان‌ها دستیده[۲] باشند باید یک جمله‌ی توپولوژیک به کنشی که برحسب اعضای گروه نوشته می‌شود اضافه شود، این کنش را کنشِ وس-زومینو-ویتن می‌نامند.

در فصل آخر با توجه به این که مدل‌های وس-زومینو-ویتن، نظریه‌های میدان همدیس یکانی هستند، با استفاده از ساختار سوگاوارا خواهیم دید که بار مرکزی نظریه میدان همدیس برای ریسمان بوزونی در مقادیر بحرانیِ تراز جبر تکین است. از آن‌جا که تنش ریسمان با وارونِ α' متناسب است و از طرفی در نظریه‌های اختلالی ضرایب تصحیحات متناسب با توان‌های α' هستند، در حد بی-تنش این مقدار بسیار بزرگ خواهد شد. بنابراین در این حد نمی‌توان مسئله را به صورت اختلالی حل کرد و از ابتدا مسئله را در حد کوانتمی بررسی می‌کنیم. در این فصل هندسه‌ی جهان-رویه را در حد بی-تنش مطالعه می‌کنیم و خواهیم دید که گرانش به شکل یک میدان لیوویل با بار زمینه‌ی مشخص و ثابت کیهان‌شناختیِ صفر از بقیه‌ی طیفِ نظریه واجفتیده می‌شود.

[۱] Bosonization

[۲] chairal

فصل ۲

نظریه میدان همدیس

۱.۲ مفاهیم اولیه

نظریه میدان همدیس همان‌گونه که در مقدمه نیز اشاره کردیم، نظریه‌ی میدانی با تقارن‌های گروه همدیس است. در این فصل این تقارن‌ها را ابتدا در $d \geq ۳$ بُعد و سپس در دو-بُعد مطالعه می‌کنیم. همان‌گونه که خواهیم دید در $d = ۲$ تعداد تقارن‌ها نامتناهی، و جبر حاکم بر نظریه جبر ویراسرو است. در نظریه میدان همدیس می‌توانیم توابع همبستگی را به طور مستقیم بنویسیم. بنابراین توابع چندنقطه‌ای را با استفاده از قیدهایی که ناوردایی همدیس روی این توابع اعمال می‌کنند به دست می‌آوریم. در ادامه تانسور تکانه-انرژی را برای این نظریه به دست می‌آوریم و بسط ضرب عملگری را برای میدان‌های اولیه می‌نویسیم. هم‌چنین با بسط لوران تانسور تکانه انرژی می‌بینیم که مدهای این بسط مولدهای جبر ویراسرو[۱] هستند. این جبر که شکل کوانتمیِ جبر ویت[۲] است شامل یک جمله متناسب با بار مرکزیِ نظریه است. در انتهای فصل چند مثال از نظریه‌های میدان همدیس ذکر می‌کنیم.

[۱] Virasoro algebra

[۲] Witt algebra

۱.۱.۲ نظریه میدان همدیس در d-بُعد

در هر فضای $\mathbb{R}^d$ با متریک $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ ، المان طول به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$ds^{۲} = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \,. \tag{۱.۲}$$

تحت تبدیل مختصات $x \to x'\left(x\right)$ داریم،

$$g_{\mu\nu}(x) \to {g'}_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x)\,. \tag{۲.۲}$$

تبدیل همدیس زیرگروهی از تبدیل مختصات است که متریک را تا حد یک ضریب موضعی به شکل زیر تغییر می‌دهد،

$$ {g'}_{\mu\nu}(x') = \Omega(x) g_{\mu\nu}(x)\,. \tag{۳.۲}$$

این تبدیلات زاویه‌ی بین دو بردار v و w یعنی $v.w/(v^{۲}w^{۲})^{۱/۲}$ را ناوردا نگه می‌دارند. برای به دست آوردن تبدیلات همدیس، ابتدا تبدیل بی‌نهایت کوچک $x^\mu \to x^\mu + \varepsilon^\mu$ را در نظر می‌گیریم. تحت این تبدیل متریک به صورت زیر تغییر می‌کند،

$$ {g'}_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} = g_{\mu\nu}(x) - \left(\partial_\mu\varepsilon_\nu + \partial_\nu\varepsilon_\mu\right)\,. \tag{۴.۲}$$

با توجه به شرط همدیس بودن و مقایسه‌ی رابطه‌ی (۳.۲) با (۴.۲) داریم،

$$\partial_\mu\varepsilon_\nu + \partial_\nu\varepsilon_\mu = \frac{۲}{d}\left(\partial.\varepsilon\right)\eta_{\mu\nu}\,, \tag{۵.۲}$$

اگر از دو طرف (۵.۲) مشتق پاره‌ای بگیریم،

$$\begin{aligned} &\partial^\nu\left(\partial_\mu\varepsilon_\nu + \partial_\nu\varepsilon_\mu\right) = \frac{۲}{d}\partial^\nu\left(\partial.\varepsilon\right)\eta_{\mu\nu}\,,\\ &\Box\varepsilon_\mu = \left(\frac{۲}{d} - ۱\right)\partial_\mu\left(\partial.\varepsilon\right)\,,\\ &\left(d-۱\right)\Box\left(\partial.\varepsilon\right) = ۰\,. \end{aligned} \tag{۶.۲}$$

به همین ترتیب می‌توانیم بنویسیم،

$$\partial_\nu \Box \varepsilon_\mu = \left(\frac{2}{d} - 1 \right) \partial_\nu \partial_\mu \left(\partial . \varepsilon \right) .$$

با استفاده از این رابطه و (۵.۲) به دست می‌آوریم،

$$\left(\eta_{\mu\nu} \Box + \left(d - 2 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right) \partial . \varepsilon = 0 . \qquad (۷.۲)$$

از ضرب (۷.۲) در $(d-1)$ و (۶.۲) داریم،

$$\left(d - 1 \right) \left(d - 2 \right) \partial_\mu \partial_\nu \partial . \varepsilon = 0 . \qquad (۸.۲)$$

بنابراین برای $d > 2$ کلی‌ترین شکل ε به صورت زیر است،

$$\varepsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho \quad , \quad c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\rho\nu} . \qquad (۹.۲)$$

تبدیلاتی که این رابطه را برآورده می‌کنند تبدیلات همدیس نامیده می‌شوند، و به طور خلاصه در جدول (۱.۲) آمده‌اند.

جدول ۱.۲: تبدیلات همدیس و مولدها

تبدیلات		مولدها
انتقال	$\varepsilon^\mu = a^\mu \to x' = x + a$	$P_\mu = -i\partial_\mu$
بازمقیاس‌بندی	$\varepsilon^\mu = \lambda x^\mu \to x' = \lambda x$	$D = -ix^\mu \partial_\mu$
دوران	$\varepsilon^\mu = \omega^\mu_\nu x^\nu \to x' = \Lambda x \ , \ ({\Lambda^\mu}_\nu \in SO(p,q))$	$L_{\mu\nu} = i \left(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu \right)$
همدیس ویژه	$\varepsilon^\mu = b^\mu x^2 - 2x^\mu b.x \to x' = \frac{x + bx^2}{1 + 2b.x + b^2 x^2}$	$K_\mu = -i \left(2x_\mu x^\nu \partial_\nu - (x.x) \partial_\mu \right)$

۲.۱.۲ ناوردایی همدیس و توابع همبستگی

در هر نظریه‌ی میدان اگر کنش تحت تبدیلات همدیس ناوردا باشد در حد کلاسیک تقارن همدیس داریم، اما در حالت کلی ناوردایی همدیس در سطح کوانتمی از ناوردایی همدیس در سطح کلاسیک ناشی نمی‌شود. در این بخش می‌خواهیم قیدهایی که ناوردایی همدیس روی توابع N-نقطه‌ای در بُعدِ دل‌خواه اعمال می‌کند را شرح دهیم. در یک نظریه‌ی ناوردای همدیس میدان‌های $\varphi(x)$ را که تحت تبدیل همدیسِ $x \to x'(x)$ به صورت زیر تبدیل شوند

میدان‌های شبه–اولیه می‌نامند،

$$\varphi_j\left(x\right) \to {\varphi'}_j\left(x'\right) = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{-\Delta_j/d} \varphi_j\left(x\right) \ ,$$

و Δ_j بُعد بازمقیاس‌بندی φ_j نامیده می‌شود. بنابراین در یک نظریه میدان همدیس توابع همبستگی شامل میدان‌های $\varphi\left(x\right)$ رابطه‌ی زیر را برآورده می‌کنند،

$$\left\langle \varphi_۱\left(x_۱\right)\ldots\varphi_n\left(x_n\right)\right\rangle = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{\Delta_۱/d} \ldots \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{\Delta_n/d} \left\langle \varphi_۱\left({x'}_۱\right)\ldots\varphi_n\left({x'}_n\right)\right\rangle \ . \tag{۱۰.۲}$$

به این ترتیب با در نظر گرفتن تبدیلات همدیس و برقراری رابطه‌ی (۱۰.۲) به یک شکل عمومی برای توابع همبستگی دست می‌یابیم. بنابر آن‌چه گفته شد برای یک تابع دونقطه‌ای از دو میدان شبه–اولیه در یک نظریه میدان همدیس داریم،

$$\left\langle \varphi_۱\left(x_۱\right)\varphi_۲\left(x_۲\right)\right\rangle = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{\Delta_۱/d} \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{\Delta_۲/d} \left\langle \varphi_۱\left({x'}_۱\right)\varphi_۲\left({x'}_۲\right)\right\rangle \ . \tag{۱۱.۲}$$

اگر ناوردایی تحت تبدیل انتقال، دوران، بازمقیاس‌بندی و همدیس ویژه را در نظر بگیریم، شکل عمومی توابع همبستگی به صورت زیر در خواهد آمد،

$$\left\langle \varphi_۱\left(x_۱\right)\varphi_۲\left(x_۲\right)\right\rangle = \begin{cases} \frac{C_{۱۲}}{{r_{۱۲}}^{۲\Delta}} & \Delta_۱ = \Delta_۲ = \Delta \\ ۰ & \Delta_۱ \neq \Delta_۲ \end{cases} \tag{۱۲.۲}$$

$C_{۱۲}$ ضریب ثابتی است که از بهنجارش میدان‌ها تعیین می‌شود. به طور مشابه با اعمال این شرایط بر توابع سه‌نقطه‌ای به رابطه‌ی زیر می‌رسیم،

$$\left\langle \varphi_۱\left(x_۱\right)\varphi_۲\left(x_۲\right)\varphi_۳\left(x_۳\right)\right\rangle = \frac{C_{۱۲۳}}{{r_{۱۲}}^{\Delta_۱+\Delta_۲-\Delta_۳}{r_{۲۳}}^{\Delta_۲+\Delta_۳-\Delta_۱}{r_{۱۳}}^{\Delta_۱+\Delta_۳-\Delta_۲}} \tag{۱۳.۲}$$

همان‌گونه که می‌بینیم، شکل عمومیِ توابع دونقطه‌ای و سه‌نقطه‌ای تنها با استفاده از تقارن‌های همدیس تا حد یک ضریب ثابت به دست می‌آید. اما برای همه‌ی توابع Nنقطه‌ای این‌طور نیست. دیدیم که توابع Nنقطه‌ای با $|x_i - x_j|$ متناسب‌اند. کمیت دیگری به شکل $\frac{r_{ij}r_{kl}}{r_{ik}r_{jl}}$ داریم که نسبت تقاطعی[۱] نامیده می‌شود و تحت تبدیلات

[۱] cross-ratios

همدیس ناورداست. برای N مختصه‌ی مستقل، $N\left(N-۳\right)/۲$ از این نسبت وجود دارد. توابع Nنقطه‌ای برای $N \geq ۴$ را می‌توانیم تا حد تابع دل‌خواهی از نسبت‌های تقاطعی تعیین کنیم. برای مثال عمومی‌ترین شکل توابع چهارنقطه‌ای به صورت زیر است،

$$G^{۴}\left(x_{۱},x_{۲},x_{۳},x_{۴}\right)=F\left(\frac{r_{۱۲}r_{۳۴}}{r_{۱۳}r_{۲۴}},\frac{r_{۱۲}r_{۳۴}}{r_{۲۳}r_{۴۱}}\right)\prod_{i<j}{r_{ij}}^{\frac{\left(\Delta_i+\Delta_j\right)+\Delta}{۳}} \qquad (۱۴.۲)$$

در این رابطه F تابع دل‌خواهی از $۲ = ۲/(۳ - ۴)۴$ نسبت تقاطعیِ مستقل و $\Delta = \sum_{i=۱}^{۴}\Delta_i$ است.

۳.۱.۲ نظریه میدان همدیس در دو–بُعد

در دو–بُعد با توجه به رابطه‌ی (۸.۲)، شرط درجه‌ی دو بودن برای تبدیلات همدیس برقرار نیست. رابطه‌ی (۵.۲) در فضای اقلیدسی با متریک $g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}$ شرط کوشی–ریمان را روی تبدیلات اعمال می‌کند، یعنی

$$\partial_{۰}\varepsilon_{۰}=\partial_{۱}\varepsilon_{۱} \quad , \quad \partial_{۰}\varepsilon_{۱}=-\partial_{۱}\varepsilon_{۰}\,.$$

درنتیجه‌ی این شرط ε تابعی تحلیلی از x است و می‌توانیم صفحه‌ی حقیقی را روی صفحه‌ی مختلط بنگاریم. برحسب مختصات مختلط داریم،

$$z=x^{۰}+ix^{۱}\,, \qquad \bar{z}=x^{۰}-ix^{۱} \qquad (۱۵.۲)$$

بنابراین تبدیلات همدیس در دو–بُعد به صورت تبدیل‌های مختصات تحلیلی هستند،

$$z\to f\left(z\right) \quad , \quad \bar{z}\to \bar{f}\left(\bar{z}\right)\,. \qquad (۱۶.۲)$$

این‌جا z و $\bar{z}$ به صورت متغیرهایی مستقل رفتار می‌کنند، و به بیان کلی‌تر توابع تحلیلی و پادتحلیلی رفتاری مستقل دارند. چنین نظریه‌ی میدانی به جای آن که روی فضای $\mathbb{C}\simeq\mathbb{R}^{۲}$ در نظر گرفته شود روی فضای $\mathbb{C}^{۲}$ تعریف می‌شود. برای محاسبه‌ی روابط جابه‌جاییِ مولدهای جبر همدیس، یعنی تبدیلات بی‌نهایت کوچکی به شکل (۱۶.۲)، فرض می‌کنیم،

$$z\to z'=z+\varepsilon_n\left(z\right) \quad , \quad \bar{z}\to\bar{z}'=\bar{z}+\bar{\varepsilon}_n\left(\bar{z}\right) \qquad \left(n\in\mathbb{Z}\right)\,, \qquad (۱۷.۲)$$

$$\varepsilon_n\left(z\right)=-z^{n+۱} \quad , \quad \bar{\varepsilon}_n\left(\bar{z}\right)=-\bar{z}^{n+۱}\,. \qquad (۱۸.۲)$$

و مولدهای چنین تبدیلاتی عبارت‌اند از،

$$l_n = -z^{n+1}\partial_z \quad , \quad \bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}} \,. \tag{۱۹.۲}$$

این مولدها جبر زیر را برآورده می‌کنند،

$$[l_n,\ l_m] = (n-m)\, l_{n+m} \quad , \quad [\bar{l}_n,\ \bar{l}_m] = (n-m)\, \bar{l}_{n+m} \quad , \quad [l_n,\ \bar{l}_m] = 0 \,. \tag{۲۰.۲}$$

این جبر، جبر ویت یا شکل کلاسیک جبر ویراسرو است. با توجه به این که l_n و $\bar{l}_n$ جابه‌جا می‌شوند، جبر همدیس موضعی را می‌توانیم به صورت جمعِ مستقیمِ دو زیرجبرِ مستقل بنویسیم. اما این مولدها به طور سرتاسری روی کره‌ی ریمانیِ $S^2 = \mathbb{C} \cup \infty$ خوش‌تعریف نیستند، و به آسانی می‌توان دید تنها برای $n = 0, \pm 1$ به صورت سرتاسری تعریف می‌شوند [۱، ۲]. بنابراین گروه همدیس در دو-بُعد گروهی از تبدیلات همدیس است که روی کره‌ی ریمانی خوش‌تعریف و وارون‌پذیر است، و با $\{l_{-1}, l_0, l_1\} \cup \{\bar{l}_{-1}, \bar{l}_0, \bar{l}_1\}$ تولید می‌شود. در صفحه‌ی مختلط $l_{-1}, \bar{l}_{-1}$ مولدهای انتقال، $(l_0 + \bar{l}_0)$ مولد بازمقیاس‌بندی، $i\,(l_0 - \bar{l}_0)$ مولد دوران و $l_1, \bar{l}_1$ مولدهای تبدیل همدیس ویژه هستند. به این دلیل که $(l_0 + \bar{l}_0)$ بازمقیاس‌بندی و $i\,(l_0 - \bar{l}_0)$ دوران را تولید می‌کنند، ویژه مقادیر آن‌ها را به ترتیب بُعدِ بازمقیاس‌بندی $\Delta = h + \bar{h}$ و اسپین $s = h - \bar{h}$ می‌نامیم.

در صفحه‌ی مختلط شکل محدود تبدیلات همدیس به صورت زیر است،

$$z \to \frac{az+b}{cz+d} \,, \quad , \quad a,b,c,d \in \mathbb{C} \qquad ad - bc = 1 \,.$$

این گروه معرف $SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(3,1)$ است.

توابع همبستگی

از آن‌جا که عنصر طول تحت تبدیل (۱۶.۲) به صورت زیر تبدیل می شود،

$$ds^2 \to \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right) ds^2 \,. \tag{۲۱.۲}$$

بنابراین تبدیلات میدان‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\varphi\,(z,\bar{z}) \to \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^h \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{h}} \varphi\left(f\,(z)\,, \bar{f}\,(\bar{z})\right) \,. \tag{۲۲.۲}$$

h و $\bar{h}$ هر دو مقادیری حقیقی هستند که آن‌ها را وزن‌های همدیس می‌نامیم ($\bar{h}$ همیوغ مختلط h نیست).

تحت تبدیلات بی‌نهایت کوچکِ (۱۷.۲) وردش تابع دونقطه‌ای $G^{(2)}(z_i, \bar{z}_i) = \langle \varphi_1(z_1, \bar{z}_1)\varphi_2(z_2, \bar{z}_2)\rangle$ برابر است با،

$$\delta_{\varepsilon,\bar{\varepsilon}} G^{(2)}(z_i, \bar{z}_i) = \langle \delta_{\varepsilon,\bar{\varepsilon}}\varphi_1, \varphi_2\rangle + \langle \varphi_1, \delta_{\varepsilon,\bar{\varepsilon}}\varphi_2\rangle = 0\,, \qquad (۲۳.۲)$$

و

$$\delta_{\varepsilon,\bar{\varepsilon}}\varphi(z,\bar{z}) = \left((h\partial\varepsilon + \varepsilon\partial) + \left(\bar{h}\bar{\partial}\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}\bar{\partial}\right)\right)\varphi(z,\bar{z})\,, \qquad (۲۴.۲)$$

که $\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}$ است. با استفاده از این معادلات و مشابه با محاسباتی که به رابطه‌ی (۱۲.۲) منجر شد با اعمال قیدهای همدیس، تابع دونقطه‌ای در مختصات مختلط به صورت زیر درخواهد آمد،

$$G^{(2)}(z,\bar{z}) = \frac{C_{12}}{{z_{12}}^{2h}\bar{z}_{12}^{2\bar{h}}}\,. \qquad (۲۵.۲)$$

۲.۲ تانسور تکانه-انرژی و جبر ویراسرو

در این بخش کوانتش نظریه میدان همدیس را در دو-بُعد بررسی می‌کنیم، و می‌بینیم که ترتیب زمانی[1] در نظریه میدان کوانتمی با ترتیب شعاعی[2] در نظریه میدان همدیس روی صفحه‌ی مختلط هم‌ارز است. تانسور تکانه-انرژی اطلاعات مهمی از هر نظریه را در بر دارد. در نظریه میدان همدیس با استفاده از آن بسط ضرب عملگری را می‌نویسیم، و درنتیجه به وزن همدیس میدان‌ها و بار مرکزی دست می‌یابیم.

۱.۲.۲ کوانتش شعاعی و تانسور تکانه-انرژی

یک فضای تخت اقلیدسی در نظر می‌گیریم. مختصه‌ی زمانی را با τ و مختصه‌ی فضایی را با σ نشان می‌دهیم. اگر مختصه‌ی فضایی را دوره‌ای کنیم $\sigma \equiv \sigma + 2\pi$ ، فضای حاصل یک استوانه است. از آن‌جا که τ و σ مختصات اقلیدسی هستند، مختصات مختلط به صورت $\zeta, \bar{\zeta} = \tau \pm i\sigma$ تعریف می‌شود. می‌توانیم با نگاشت زیر استوانه را

[1] time ordering

[2] radial ordering

روی یک صفحه‌ی مختلط بنگاریم،

$$\zeta \to z = \exp \zeta = \exp (\tau + i\sigma)$$

بنابراین $\infty > \tau > -\infty$ که روی استوانه مختصه‌ی زمان است روی صفحه‌ی مختلط روی $\infty > z > 0$ نگاشته می‌شود، و صفحه‌های زمان-برابر ($\tau = const.$) روی صفحه‌ی z دایره‌هایی با شعاع ثابت‌اند. در چنین نگاشتی باید ارتباط بین تبدیل‌های همدیس روی صفحه و استوانه را بشناسیم. برای مثال بازمقیاس‌بندی روی صفحه‌ی مختلط ($z \to e^a z$) با انتقال در راستای زمان روی استوانه ($\tau \to \tau + a$) هم‌ارز است، بنابراین مولد بازمقیاس‌بندی روی صفحه‌ی همدیس را می‌توانیم به‌عنوان هامیلتونی سیستم در نظر بگیریم، و درنتیجه فضای هیلبرت روی سطوحی با شعاع ثابت ساخته می‌شود. این شیوه‌ی تعریفِ نظریه میدان کوانتمی روی صفحه را کوانتش شعاعی[1] می‌نامند.

در نظریه‌های کوانتمی زمانی که شکل عملگری میدان‌ها را در نظر می‌گیریم، در ضرب دو عملگر ترتیب زمانی آن‌ها باید لحاظ شود،

$$T\left(A\left(t_1\right) B\left(t_2\right)\right)=\begin{cases} A\left(t_1\right) B\left(t_2\right) & \left|t_1\right|>\left|t_2\right| \\ B\left(t_2\right) A\left(t_1\right) & \left|t_1\right|<\left|t_2\right| \end{cases} . \tag{۲۶.۲}$$

همان‌گونه که گفتیم پس از نگاشت استوانه روی صفحه‌ی مختلط، مختصه‌ی زمانی روی مختصه‌ی شعاعی نگاشته می‌شود. بنابراین عملگر ترتیب زمانی در نظریه‌های میدان کوانتمی، با عملگر ترتیب شعاعی (R) در صفحه‌ی مختلط هم‌ارز است.

$$R\left(A\left(z\right) B\left(w\right)\right)=\begin{cases} A\left(z\right) B\left(w\right) & \left|z\right|>\left|w\right| \\ B\left(w\right) A\left(z\right) & \left|z\right|<\left|w\right| \end{cases} . \tag{۲۷.۲}$$

از این مفهوم در محاسبه‌ی روابط جابه‌جایی استفاده خواهیم کرد. برای نوشتن جابه‌جاگرِ زمان-برابرِ عملگرِ موضعی

[1] radial quantization