دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

ارائه شده جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی

عنوان :

روش حل عددی معادلات اختلال تکین مقدار مرزی با استفاده از روش $B-$اسپلاین هم محلی

استاد راهنما :

دکتر جعفر صابری نجفی

استاد مشاور :

دکتر زهرا افشار نژاد

نگارنده :

تکتم حافظی نیا

پیشگفتار

نظریه اختلال تکین از جهات خاصی در ریاضیات مطرح است و روش های گسترش آن جالب می باشد.با گسترش سریع علم و تکنولوژی، در بسیاری از مسائل کاربردی مانند فرضیه لایه مرزی ریاضی یا تقریب جواب مسائل مختلف که با معادلات دیفرانسیلی که با پارامتر کوچک یا بزرگ درگیراست توصیف می شود، پیچیدگی بیشتری پیدا می کند. بنابراین، در تحلیل آنها از روشهای مجانبی استفاده می شود. اگر چه که، تحلیل های مجانبی برای عملگرهای دیفرانسیلی اساساً برای اختلال منظم گسترش یافته است. در بسیاری از مسائل، اختلال ها روی یک ناحیه خیلی باریک عمل می کنند که متغیر وابسته متحمل تغییرات خیلی سریعی می شود. این نواحی باریک غالباً به کران های دامنه مورد علاقه می پیوندند به این علت که یک پارامتر کوچک در بالاترین مرتبه مشتق ضرب می شود. در نتیجه، این لایه ها معمولا به عنوان لایه‌های مرزی در مکانیک سیالات، لایه های کناری در مکانیک جامدات، لایه های پوستی در کاربردهای الکتریکی، لایه های ضربه ای در مکانیک سیالات وجامدات، نقاط انتقال در مکانیک کوانتوم و خط های استوکس و سطوح در ریاضیات کاربرد دارند.

مسائل اختلال اولین بار در سومین همایش ریاضیات در هیدل برگ در۱۹۰۴ مطرح شد. گزارش هفت صفحه‌ای پرندتل که در آن اصطلاح لایه مرزی در آن معرفی شد.

تحلیل عددی و تحلیل مجانبی دو روش اصلی برای حل مسائل اختلال تکین می باشند. چون رده این نوع مسائل و اهداف آنها نسبتاً متفاوت هستند بین آنها رابطه‌ای وجود ندارد. تحلیل های عددی سعی می کنند اطلاعاتی درباره کمیت مساله ویژه فراهم می کند، در حالی که تحلیل مجانبی سعی می کند اطلاعاتی در مورد چگونگی رفتار خانواده‌ای از مسائل پیدا کند و اطلاعات کمی در باره کمیت جواب هر عضو ویژه این گروه مسائل می دهد.

کتاب های مفید بسیار زیادی در این زمینه وجود دارد که هم یافته های مجانبی و هم یافته های عددی در آن موجود است. مجموعه این کتاب ها در لیست بسیار طولانی درمرجع [۱۸] آمده است که در این جا فقط به ذکر چند مورداز آن ها می پردازیم:
اردلی [۱] [۸]، وندیک [۲] [۴۵]، بلمن [۳] [۴]، کپلان [۴] [۲۱]، نیفه [۵] [۲۷]، امالی [۶] [۳۱] و[۳۲] همکر [۷] [۱۲]، میلر [۸] [۲۶].

در این پایان نامه، یک روش عددی برای حل معادلات اختلال تکین مقدار مرزی با استفاده از روش $B-$اسپلاین هم محلی ارائه می دهیم. در فصل اول روش $B-$ اسپلاین هم محلی را برای معادلات دیفرانسیل معمولی با شرایط مرزی مطرح می کنیم. در فصل دوم با ذکر یک مثال معادله اختلال تکین و لایه مرزی را توضیح می دهیم. فصل سوم به یک تقریب برای جواب معادله اختلال انتشار هم-بردار با استفاده از روش $B-$اسپلاین هم محلی پرداخته است و در فصل چهارم حل عددی معادله اختلال خود الحاق را با استفاده از روش $B-$اسپلاین هم محلی ذکر می کنیم.

---

[۱] Erdelyi
[۲] Van Dyke
[۳] Bellman
[۴] Kaplaun
[۵] Nayfeh
[۶] O'Mally
[۷] Hemker
[۸] Miller

فهرست مندرجات

فصل ۱

روش B—اسپلاین هم محلی

۱–۱ مقدمه

در این فصل روش $B-$ اسپلاین هم محلی را معرفی می کنیم. در بخش (۱–۲) تعاریف، قضایا و لم های مورد نیاز برای تعریف تابع B–اسپلاین را ارائه می کنیم. در بخش (۱–۳) تابع B–اسپلاین را معرفی می کنیم. در بخش (۱–۴) روش $B-$ اسپلاین را با استفاده از روش ریلی – ریتز بر روی یک مسأله مقدار مرزی مورد بررسی قرار می دهیم. در بخش (۱–۵) روش $B-$ اسپلاین را با استفاده از روش هم محلی برای یک مسأله مقدار مرزی حل می کنیم. مطالب گفته شده در این بخش از مرجع [۳٦] انتخاب شده است.

۱–۲ تعاریف و پیش نیازها

در این بخش تعاریف و قضایا و لم هایی را که برای معرفی روش B–اسپلاین هم محلی مورد نیاز است را بیان می کنیم.

۱.۲.۱ تعریف X را یک فضای برداری می گوییم، هر گاه به ازای x، y، و z های متعلق به X و همه اعداد حقیقی α و β داشته باشیم:

۱. αx متعلق به X باشد،
۲. $x+y$ متعلق به X باشد،
۳. $x+y=y+x$،
۴. $x+(y+z)=(x+y)+z$،
۵. $1.x=x$،
٦. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$،
۷. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$،
۸. یک بردار یکتای صفر $\odot$ در X وجود دارد به طوری که به ازای هر x داشته باشیم: $x+\odot=x$،
۹. به ازای هر بردار x یک بردار یکتای $-x$ وجود دارد به طوری که $-x+x=\odot$.

۲.۲.۱ تعریف فرض کنید X و Y فضاهای برداری باشند، تابع T که یک

تبدیل خطی از X به توی Y است، یک عملگر خطی می گویند اگر به ازای هر اسکالر α و بردارهای x، y متعلق به X داشته باشیم:

الف) $T(x+y) = T(x) + T(y)$،

ب) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

۳.۲.۱ تعریف یک تابع حقیقی مقدار که بر روی فضای خطی X تعریف می شود را نرم می گوییم هرگاه سه خاصیت زیر را داشته باشد:

برای هر عدد حقیقی α و به ازای عناصر x و y های متعلق به X

الف) $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر وفقط اگر $x = 0$،

ب) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$،

پ) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

۴.۲.۱ تعریف فرض می کنیم $f \in C[a,b]$ باشد، آن گاه نرم ماکزیمم را بر روی f چنین تعریف می کنیم:

$$\|f\|_{\infty} = \max |f(x)| \, , x \in [a,b] \, .$$

۵.۲.۱ تعریف فرض کنید X یک فضای برداری باشد، هر تابع حقیقی مقدار که روی بردارهای متعلق به X تعریف شود را یک ضرب داخلی روی X تشکیل می دهد، هر گاه برای x، y و z های متعلق به X، و α و β های حقیقی در سه شرط زیر صدق کند:

الف) $(x,x) > 0$ با شرط این که $x \neq 0$ باشد،

ب) $(x,y) = (y,x)$،

پ) $(x, \alpha y + \beta z) = \alpha(x,y) + \beta(x,z)$.

۶.۲.۱ تعریف یک عملگر خطی A که نگاشتی از فضای حاصل ضرب داخلی X به توی خودش باشد را معین مثبت می گوییم، اگربه ازای هر $x \in X$ و $x \neq 0$ داشته باشیم

$$(Ax, x) > 0 \, .$$

.

۷.۲.۱ تعریف یک عملگر خطی A که نگاشتی از فضای ضرب داخلی X به توی خودش باشد را متقارن می گوییم اگر داشته باشیم:

$$(Ax, y) = (x, Ay), \qquad \forall x, y \in X.$$

۸.۲.۱ نتیجه یک فضای حاصل ضرب داخلی یک فضای خطی است که روی آن یک ضرب داخلی تعریف شود.

۹.۲.۱ تعریف فرض کنید $f(t) \in C[a, b]$ باشد، تابع حقیقی مقدار $\|f\|_۲$ که این چنین تعریف می شود:

$$\|f\|_۲ = \sqrt{\int_a^b [f(t)]^۲ \, dt},$$

را نرم $L_۲[a, b]$ از f می گویند.

۱۰.۲.۱ قضیه فرض می کنیم عملگر خطی معین مثبت متقارن A از فضای خطی X به توی فضای خطی Y با ضرب داخلی $(. \, , \, .)$ همراه باشد، هرگاه $X \subset Y$ باشد می توان یک ضرب داخلی جدید $(. \, , \, .)_A$ را چنین تعریف نمود:

$$(x, y)_A = (Ax, y), \qquad \forall x, y \in X.$$

همچنین هر ضرب داخلی $(. \, , \, .)$ که روی یک فضای خطی X وجود داشته باشد نرم $\| \, . \, \|$ را چنین تعریف می کند

$$\| \, . \, \| = \sqrt{(x, x)}.$$

۱۱.۲.۱ قضیه معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی زیر

$$y''(x) = p(x)y(x) + q(x)y'(x) + r(x)$$

با شرایط مرزی

$$y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta,$$

وقتی که α، β، a و b اعداد حقیقی و $r(x)$، $p(x)$ و $q(x)$ بر روی بازه $[a, b]$ پیوسته باشند و $p(x)$ بر روی بازه $[a, b]$ مثبت باشد، دارای جواب یکتا است [۴۶].

۱–۳ اسپلاین مکعبی

۱.۳.۱ تعریف تابع s تعریف شده بر بازه ی $[a,b]$ یک اسپلاین مکعبی با گره های $\pi=\{a=t_{0},t_{1},...,t_{n}=b\}$ نامیده می شود، هر گاه
الف)در هر زیر بازه $[t_i,t_{i+1}]$، $i=0,1,...,n-1$، s یک چند جمله ای حداکثر از درجه سه باشد.
ب)s، s' و s'' بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشند، به عبارت دیگر $s\in C^{2}[a,b]$.

فرض می کنیم $X=C^{2}[0,1]$ یک زیر فضای خطی از فضای ضرب داخلی $Y=C[0,1]$ باشد و فرض می کنیم A یک عملگر خطی از X بتوی Y باشد. همچنین فرض می کنیم برای $y\in X$ داده شده، معادله

$$Ax=y$$

جواب یکتای $x\in X$ را دارد. می خواهیم یک جواب تقریبی این معادله را برای زیر فضای N بعدی داده شده X_N از X با استفاده از تابع $x_N\in X_N$ تقریب بزنیم. بنابراین به دنبال پیدا کردن

$$x_N=C_{1}\Phi_{1}+C_{2}\Phi_{2}+\cdots+C_N\Phi_N,$$

هستیم که متعلق به X_N باشد به طوری که $\|x-x_N\|$ کوچک باشد.
اگر فرض کنیم که A یک عملگر خطی معین مثبت و متقارن که روی X تعریف می شود، باشد با توجه به قضیه (۱–۲–۱۰) می توانیم یک ضرب داخلی جدید $(.\ ,\ .)_A$ در X را چنین تعریف کنیم:

$$(u,v)_A=(Au,v)\qquad u,v\in X.$$

بنابراین نرم زیر را تعریف می کنیم

$$\|u\|_A=\sqrt{(u,u)_A}.$$

۲.۳.۱ تعریف جواب یکتای $x_N\in X_N$ که مسأله مینیمم سازی زیر را حل می کند

$$\|x-x_N\|_A=\min_{\bar{x}\in X_N}\|x-\bar{x}\|_A\,,$$

یک تقریب ریلی – ریتز [1] x از X_N می نامند، وقتی که $\{\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_N\}$ یک زیر مجموعه مستقل خطی از X باشد، $X_N = span\{\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_N\}$ و $x_N = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + \cdots + C_N\Phi_N$ باشد، که در آن $(C_1, C_2, ..., C_N)$ دستگاه خطی زیر را حل کند.

$$\sum_{j=1}^{N}(\Phi_i, \Phi_j)_A C_j = (x, \Phi_i)_A, \qquad 1 \leq i \leq N.$$

با توجه به تعریف فوق اگر x متعلق به دامنه A باشد، داریم

$$(x, \Phi_i)_A = (Ax, \Phi_i) = (y, \Phi_i).$$

در این صورت، تقریب ریلی – ریتز x_N از جواب یکتای معادله خطی معین مثبت $Ax = y$ به صورت زیر تبدیل می شود

$$\sum_{j=1}^{N}(\Phi_i, \Phi_j)_A C_j = (y, \Phi_i), \qquad 1 \leq i \leq N,$$

که در آن ماتریس $\sum_{j=1}^{N}(\Phi_i, \Phi_j)_A$، $1 \leq i, j \leq N$، معین مثبت و متقارن می باشد بنابراین وارون پذیر است.

۳.۳.۱ تعریف فرض می کنیم $\pi = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ یک افراز از بازه $[a, b]$ باشد، چندجمله‌ای های مکعبی که بر روی زیر بازه $[t_i, t_{i+1}]$ از بازه $[a, b]$ که $0 \leq i \leq n-1$ تعریف می شوند، تشکیل یک فضا می دهند که آن را با $S_3(\pi)$ نمایش می دهیم.

۴.۳.۱ تعریف فرض می کنیم L یک عملگر خطی باشد که روی X تعریف می شود و X یک زیر فضای خطی از $L_2[a, b]$ باشد، فرض می کنیم $\{\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_N\}$ یک زیر مجموعه مستقل خطی از X باشد، و قرار می دهیم

$$X_N = span\{\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_N\}$$

که X_N یک زیر فضای N بعدی از X باشد. عملگر خطی

$$Lx = y$$

[1] Rayleigh-Ritz

داده شده است، یک جواب تقریبی $x(t)$ ازمعادله $Lx = y$ با استفاده از روش هم محلی [۲] پیدا کردن تابعی مانند $x_N(t)$ است به طوری که

$$x_N(t) = a_1\Phi_1(t) + a_2\Phi_2(t) + \cdots + a_N\Phi_n(t),$$

دستگاهی با N معادله خطی و N مجهول زیر را حل می کند

$$Lx_N(t_i) = \sum_{j=1}^{N} a_j L(\Phi_j(t_i)) = y(t_i), \qquad 1 \le i \le N,$$

که در آن t_1، t_2،...،t_N نقاطی متمایز از دامنه $[a,b]$ هستند. بنابراین می گوییم تابع $x_N(t)$ در نقاط t_1، t_2،...،t_N با $y(t)$ هم محل است.

می دانیم که $S_3(\pi)$ یک فضای خطی می باشد و از این که شامل مجموعه همه چند جمله‌ای های مکعبی می باشد بی شمار تابع در $S_3(\pi)$ وجود دارد. در این بخش اثبات خواهیم کرد که یک تابع یکتای $s(t)$ در $S_3(\pi)$ که در قیدهای درونیابی زیر صدق می کند وجود دارد.

$$\begin{cases} s'(t_0) = f'(t_0), \\ s(t_i) = f(t_i), \qquad 0 \le i \le n, \\ s'(t_n) = f'(t_n). \end{cases} \tag{۱-۱}$$

در مرجع [۱] اثبات شده است که درونیابی معادلی نزدیک به اسپلاین مکعبی، یک چند جمله‌ای مکعبی قطعه به قطعه $s(t)$ می باشد که علاوه بر شرط (۱-۱)، در $3(n-1)$ قید دیگر زیر نیز صدق می کند که این قیود عبارتند از:

$$s^{(j)}(t_i) = f^{(j)}(t_i), \qquad 1 \le i \le n-1; \quad j = 0, 1, 2. \tag{۲-۱}$$

بنابراین $s(t)$ درونیاب مکعبی اسپلاین $f(t)$ می باشد. برای اثبات وجود $s(t)$ ابتداء آن را می سازیم. بازه $[a,b]$ را به صورت $\pi = \{a = t_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_n = b\}$ افراز می کنیم به طوری که $1 \le i \le n, t_i = t_0 + i(b-a)/n$ و $h = (b-a)/n$ باشد. لذا، با اضافه کردن چهار نقطه

[۲] Collocation method

اضافی t_{-2}، t_{-1}، t_0، t_n، t_{n+1} و t_{n+2} که در آن $t_0 > t_{-1} > t_{-2}$ و $t_n < t_{n+1} < t_{n+2}$ است، تابع $B_i(t)$ را چنین معرفی می کنیم:

$$B_i(t) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (t-t_{i-2})^3, & t \in [t_{i-2}, t_{i-1}] \text{ اگر} \\ h^3 + 3h^2(t-t_{i-1}) + 3h(t-t_{i-1})^2 - 3(t-t_{i-1})^3, & t \in [t_{i-1}, t_i] \text{ اگر} \\ h^3 + 3h^2(t_{i+1}-t) + 3h(t_{i+1}-t)^2 - 3(t_{i+1}-t)^3, & t \in [t_i, t_{i+1}] \text{ اگر} \\ (t_{i+2}-t)^3, & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}] \text{ اگر} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (۱-۳)$$

بنابراین داریم

$$B_i(t_j) = \begin{cases} 4, & j = i \text{ اگر} \\ 1, & j = i \pm 1 \text{ اگر} \\ 0, & j = i \pm 2 \text{ اگر} \end{cases} \qquad (۱-۴)$$

از(۱–۴) نتیجه می شود که وقتی $t \geq t_{i+2}$ و $t \leq t_{i-2}$ باشد، $B_i(t) \equiv 0$ است. در نتیجه هر اسپلاین $s(t)$ با افراز π در خارج از بازه (t_{i-2}, t_{i+2}) باید صفر شود.
با توجه به (۱–۳) می توان دید که هر کدام از $B_i(t)$ ها دو بار به طور پیوسته مشتق پذیرند. مشتقات اول و دوم $B_i(t)$ در نقاط t_j به صورت زیر می باشند

$$B_i'(t_j) = \begin{cases} 0, & j = i \text{ اگر} \\ \mp\frac{3}{h}, & j = i \pm 1 \text{ اگر} \\ 0, & j = i \pm 2 \text{ اگر} \end{cases} \qquad (۱-۵)$$

و همچنین داریم

$$B_i''(t_j) = \begin{cases} -\frac{12}{h^2}, & j = i \text{ اگر} \\ \frac{6}{h^2}, & j = i \pm 1 \text{ اگر} \\ 0, & j = i \pm 2 \text{ اگر} \end{cases} \qquad (۱-۶)$$

به این علت که مقادیر $B_i(t)$، $B_i'(t)$ و $B_i''(t)$ به ازای بقیه نقاط t_j صفر می شوند، این مقادیر در (۱–۴) و (۱–۵) و (۱–۶) حذف شده‌اند. چون $B_i(t)$ ها $-1 \leq i \leq n+1$ چند جمله‌ای های مکعبی می باشند که نقاطشان در π می باشد بنابراین هر $B_i(t) \in S_3(\pi)$ می باشد.
قرار می دهیم $\omega = \{B_{-1}, B_0, ..., B_{n+1}\}$ و همچنین قرار می دهیم $\Gamma_3(\pi) = span\ \omega$. تابع های ω روی $[a,b]$ مستقل خطی هستند، بنابراین $\Gamma_3(\pi)$، $n+3$ بعدی می باشد. اثبات یکتائی $s(t)$ نیاز به ذکر دو قضیه زیر و نتایج آن دارد، که ذیلاً فقط به بیان صورت قضایا و ذکر مراجع

آن ها می پردازیم.

۴.۳.۱ قضیه یک جواب یکتای $s(t)$ در $\Gamma_3(\pi)$ وجود دارد که مسأله درونیابی (۱—۱) را حل می کند.
برای اثبات به مرجع [۳۶] مراجعه شود.

۵.۳.۱ قضیه $\Gamma_3(\pi) = S_3(\pi)$.
برای اثبات به مرجع [۳۶] مراجعه شود.

۶.۳.۱ نتیجه بعد $S_3(\pi)$، $n+3$ می باشد و $\omega = \{B_{-1}, B_0, ..., B_{n+1}\}$ یک پایه برای $S_3(\pi)$ می باشد.
برای اثبات به مرجع [۳۶] مراجعه شود.

۷.۳.۱ نتیجه یک اسپلاین مکعبی یکتای $s(t)$ در $S_3(\pi)$ وجود دارد که مسأله درونیابی (۱—۱) را حل می کند.
برای اثبات به مرجع [۳۶] مراجعه شود.

۱—۴ روش B—اسپلاین

در این بخش روش B—اسپلاین را برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی به کار می بریم. معادله دیفرانسیل معمولی زیر را در نظر می گیریم

$$Ax(t) = -x''(t) + \sigma(t)x(t) = f(t), \qquad 0 \le t \le 1, \qquad (۱—۷)$$

که شرایط مرزی همگن زیر را دارد

$$x(0) = x(1) = 0, \qquad (۱—۸)$$

به طوری که بر روی $[0,1]$، $\sigma(t) > 0$ باشد. توجه داریم، فرض صفر بودن مقادیر مرزی با عمومیت مسأله تناقضی ندارد. حال، فرض می کنیم که $\bar{x}(t)$ جواب مسأله $Ax(t) = \bar{f}(t)$ با

مقادیر مرزی $x(\circ) = \alpha$ و $x(\text{۱}) = \beta$ باشد، که در آن $\bar{f}(t)$ داده شده است. فرض می کنیم $u(t)$ تابعی متعلق به $C^{\text{۲}}[\circ, \text{۱}]$ به طوری که $u(\circ) = \alpha$ و $u(\text{۱}) = \beta$ باشد، و قرار می دهیم $Au(t) = \tilde{f}(t)$. بنابراین $\bar{x}(\circ) - u(\circ) = \circ = \bar{x}(\text{۱}) - u(\text{۱}) = \circ$. اگر $x(t)$ جواب مسأله مقدار مرزی $Ax(t) = A(\bar{x} - u)(t) = \bar{f}(t) - \tilde{f}(t)$ باشد، آن گاه $\bar{x}(t) = x(t) + u(t)$، $A\bar{x} = \bar{f}$ را با شرایط $\bar{x}(\circ) = \alpha$ و $\bar{x}(\text{۱}) = \beta$ حل می کند. اگر $\sigma(t)$ و $f(t)$ روی $[\circ, \text{۱}]$ پیوسته باشند، قضیه (۱–۲–۱۱) نتیجه می دهد که یک جواب یکتای $x(t)$ برای این مسأله که متعلق به $C^{\text{۲}}[\circ, \text{۱}]$ است، وجود دارد.

حال می خواهیم یک جواب تقریبی با روش ریلی – ریتز برای مسأله (۱–۷) و (۱–۸) پیدا کنیم.

در ابتداء فرض می کنیم

$$X = \{x(t) \in C^{\text{۲}}[\circ, \text{۱}] : x(\circ) = x(\text{۱}) = \circ\}. \qquad (\text{۱}-\text{۹})$$

بنابراین X یک زیر فضای خطی از $C^{\text{۲}}[\circ, \text{۱}]$ است که شامل جواب $x(t)$ از مسأله (۱–۷) می باشد. به آسانی نتیجه می شود A یک عملگر خطی از $Y = C[\circ, \text{۱}]$ بروی فضای خطی Y می باشد. از این که X یک زیر فضای $C^{\text{۲}}[\circ, \text{۱}]$ است، نتیجه می شود که زیر فضای Y نیز می باشد.

فرض می کنیم که یک ضرب داخلی در Y چنین تعریف شود

$$(f, g) = \int_{\circ}^{\text{۱}} f(t)g(t)dt. \qquad (\text{۱}-\text{۱}\circ)$$

چون در بازه $[\circ, \text{۱}]$ $\sigma(t) > \circ$ است، می توانیم ثابت کنیم که A یک عملگر خطی معین مثبت از X بتوی Y است. فرض می کنیم $x \in X$ باشد، در این صورت

$$(Ax, x) = \int_{\circ}^{\text{۱}} [-x''(t) + \sigma(t)x(t)]x(t)dt. \qquad (\text{۱}-\text{۱۱})$$

با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء بدست می آوریم

$$-\int_{\circ}^{\text{۱}} x''(t)x(t)dt = -x'(t)x(t)|_{\circ}^{\text{۱}} + \int_{\circ}^{\text{۱}} [x'(t)]^{\text{۲}} dt$$

$$= -[x'(\text{۱})x(\text{۱}) - x'(\circ)x(\circ)] + \int_{\circ}^{\text{۱}} [x'(t)]^{\text{۲}} dt,$$

$$= \int_0^1 [x'(t)]^2 dt, \qquad (۱۲-۱)$$

از این که $x \in X$ است نتیجه می شود $x(1) = x(0) = 0$. خاصیت پیوستگی به سادگی نتیجه می دهد که

$$(Ax, x) = \int_0^1 \sigma(t)[x(t)]^2 dt + \int_0^1 [x'(t)]^2 dt > 0, \qquad (۱۳-۱)$$

بنابراین A معین مثبت است. برای اثبات این که A بر روی X متقارن است، فرض می کنیم $x(t)$ و $y(t)$ هر دو متعلق به X باشند، بنابراین

$$(Ax, y) = \int_0^1 [-x''(t) + \sigma(t)x(t)]y(t)dt$$

حال انتگرال گیری جزء به جزء را بر روی این معادله انجام می دهیم، بنابراین داریم

$$(Ax, y) = -x'(t)y(t)|_0^1 + \int_0^1 x'(t)y'(t)dt + \int_0^1 \sigma(t)x(t)y(t)dt$$

$$= x(t)y'(t)|_0^1 - \int_0^1 x(t)y''(t)dt + \int_0^1 \sigma(t)x(t)y(t)dt$$

$$= \int_0^1 x(t)[-y''(t) + \sigma(t)y(t)]dt,$$

$$= (x, Ay). \qquad (۱۴-۱)$$

بنابراین A معین مثبت و یک عملگر خطی متقارن از X بتوی Y است. لذا بنا به قضیه (۱–۲–۱۰) A یک ضرب داخلی جدید $(.\ ,\ .)_A$ را روی X تعریف می کند، که عبارت است از:

$$(x, y)_A = (Ax, y). \qquad (۱۵-۱)$$

فرض می کنیم $\{\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_N\}$ یک زیر مجموعه مستقل خطی از X باشد و قرار می دهیم $X_N = span\{\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_N\}$. توجه می کنیم که هر کدام از $\Phi_i(t)$ در شرایط مرزی

$\circ = \Phi_i(\circ) = \Phi_i(1)$ صدق می کند(زیرا در غیر این صورت، X_N یک زیرفضای X نیست).
فرض می کنیم جواب تقریبی مسأله مقدار مرزی (۱—۷) یک ترکیب خطی به صورت زیر باشد

$$x_N = c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x) + \cdots + c_N\Phi_N, \qquad (۱—۱۶)$$

که در آن $C = (c_1, c_2, ..., c_N)^t$ جواب دستگاه خطی زیر می باشد

$$\sum_{j=1}^{N}(\Phi_i, \Phi_j)_A \ \ c_j = (y, \Phi_i), \qquad 1 \leq i \leq N, \qquad (۱—۱۷)$$

یا

$$A_N C = b, \qquad (۱—۱۸)$$

که در آن $b = (b_1, b_2, ..., b_N)^t$ ،$b_i = (y, \Phi_i)$ ،و A_N ماتریس $(\Phi_i, \Phi_j)_A$ است که در آن $1 \leq i, j \leq N$ می باشد. باتوجه به این که $Ax(t) = -x''(t) + \sigma(t)x(t)$ می باشد،

$$(\Phi_i, \Phi_j)_A = (A\Phi_i, \Phi_j) = \int_{\circ}^{1}[-\Phi_i''(t) + \sigma(t)\Phi_i(t)]\Phi_j(t)dt$$

با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء داریم

$$= \int_{\circ}^{1}[\Phi_i'(t)\Phi_j'(t) + \sigma(t)\Phi_i(t)\Phi_j(t)]dt. \qquad (۱—۱۹)$$

برای محاسبه کردن جواب تقریبی x_N که در (۱—۱۶) آورده شده است ، ابتداء باید تابع‌های $\Phi_i(t)$،$1 \leq i \leq N$ را مشخص کرد. برای این منظور تابع های تقریبی از یک زیر فضای N بعدی را انتخاب می کنیم. برای مثال زیر فضای $\tilde{X}_N$ از تابع های اسپلاین مکعبی با نقاطی با فاصله های برابر $\pi : \circ = t_\circ < t_1 < ... < t_n = 1$ از $[\circ, 1]$ را در نظر می گیریم. می دانیم $S_3(\pi)$ مجموعه همه اسپلاین های مکعبی می باشد که نقاطشان در افراز π است. $S_3(\pi)$ یک زیر فضای خطی $n + 3$ بعدی است، که با استفاده از مجموعه مستقل خطی B—اسپلاین های $\{B_{-1}, B_\circ, B_1, ..., B_n, B_{n+1}\}$ گسترش داده می شود، که $B_i(t)$ در (۱—۳) تعریف شده است.
توجه داریم که $S_3(\pi)$ یک زیر فضای خطی X نیست زیرا شامل تابع های اسپلاین $s(t)$ می

باشد، که $s(t)$ درشرط مرزی مورد نظر صدق نمی کنند. بنابراین فقط به قسمتی از $S_{۳}(\pi)$ نیاز داریم. لذا، قرار می دهیم

$$\tilde{X}_N = \{s(t) \in S_{۳}(\pi) : s(۰) = s(۱) = ۰\}. \qquad (۲۰-۱)$$

اکنون یک پایه برای $\tilde{X}_N$ پیدا می کنیم. از این که $B_i(t)$ ها برای $۲ \leq i \leq n-۲$ در $t = ۰$ و $t = ۱$ صفر می شوند، بنابراین این B_i ها متعلق به $\tilde{X}_N$ می باشند. در نتیجه $B_{۲}, B_{۳}, \cdots, B_{n-۲}$ قسمتی از پایه $\tilde{X}_N$ را تشکیل می دهد. هیچ کدام از تابع های $B_{-۱}$، $B_{۰}$، $B_{۱}$، $B_{n-۱}$، B_n و $B_{n+۱}$ در $t = ۰$ و $t = ۱$ صفر نمی شوند، بنابراین واضح است که متعلق به X یا $\tilde{X}_N$ نیستند. به هر حال، با استفاده از شش تابع $B_{-۱}$، $B_{۰}$، $B_{۱}$، $B_{n-۱}$، B_n و $B_{n+۱}$ می توانیم چهار تابع دیگر پیدا کنیم، تا یک پایه برای $\tilde{X}_N$ بسازیم. لذا، ثابتهای a، b، c، d، α، β، γ و δ را طوری پیدا می کنیم که روابط زیر برقرار باشند:

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_{۰}(t) &= aB_{-۱}(t) + bB_{۰}(t),\\
\tilde{B}_{۱}(t) &= cB_{۰}(t) + dB_{۱}(t),\\
\tilde{B}_{n-۱}(t) &= \alpha B_{n-۱}(t) + \beta B_n(t),\\
\tilde{B}_n(t) &= \gamma B_n(t) + \delta B_{n+۱}(t),
\end{aligned} \qquad (۲۱-۱)$$

که در آن $\tilde{B}_{۰}, \tilde{B}_{۱}, \tilde{B}_{n-۱}$ و $\tilde{B}_n$ در شرایط زیر صدق می کنند

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_{۰}(t_{۰}) &= ۰,\\
\tilde{B}_{۰}(t_{۱}) &= ۱,\\
\tilde{B}_{۱}(t_{۰}) &= ۰,\\
\tilde{B}_{۱}(t_{-۱}) &= ۱,\\
\tilde{B}_{n-۱}(t_{n+۱}) &= ۱,
\end{aligned} \qquad (۲۲-۱)$$

$$\tilde{B}_{n-1}(t_n) = 0,$$

و

$$\tilde{B}_n(t_{n-1}) = 1,$$

$$\tilde{B}_n(t_n) = 0.$$

بدیهی است که از دستگاه (۱–۲۱) و (۱–۲۲) دستگاه معادلاتی برای مجهولات a، b، c، d، α، β، γ و δ بدست خواهد آمد. انتخاب های دیگری نیز امکان پذیر است، اما این انتخاب برای محاسبه آسانتر است. پس از حل کردن دستگاه معادلات حاصل، مقادیر a، b، c، d، α، β، γ و δ بدست می آید. بنابراین (۱–۲۱) را می توان چنین نوشت

$$\tilde{B}_0(t) = B_0(t) - 4B_{-1}(t)$$

$$\tilde{B}_1(t) = B_0(t) - 4B_1(t)$$

$$\tilde{B}_{n-1}(t) = B_n(t) - 4B_{n-1}(t) \qquad (۱–۲۳)$$

$$\tilde{B}_n(t) = B_n(t) - 4B_{n+1}(t).$$

و با قرار دادن $\tilde{B}_i(t) = B_i(t)$ برای $2 \leq i \leq n-2$، می توان اثبات کرد که مجموعه $\{\tilde{B}_0, \tilde{B}_1, ..., \tilde{B}_n\}$ یک پایه برای $\tilde{X}_N$ تشکیل می دهد. در نتیجه تقریب $x_N(t)$ از جواب یکتای $x(t)$ مسأله مقدار مرزی (۱–۷) و (۱–۸) را می توان چنین نوشت

$$x_N(t) = c_0\tilde{B}_0(t) + c_1\tilde{B}_1(t) + \cdots + c_n\tilde{B}_n(t), \qquad (۱–۲۴)$$

که در آن $c = (c_0, c_1, ..., c_n)^t$ جواب دستگاه خطی زیر می باشد

$$\sum_{j=0}^{n}(A\tilde{B}_i, \tilde{B}_j)c_j = (f, \tilde{B}_i), \qquad 0 \leq i \leq n, \qquad (۱–۲۵)$$

از این که $Ax(t) = -x''(t) + \sigma(t)x(t)$ می باشد

$$(A\tilde{B}_i, \tilde{B}_j) = \int_0^1 [-\tilde{B}_i''(t) + \sigma(t)\tilde{B}_i(t)]\tilde{B}_j(t)dt,$$