دانشگاه کردستان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

عنوان:

روش فوق‌تخفیف شتاب‌دار اصلاح‌شده‌ی متقارن (SMAOR) برای حل دستگاه معادلات خطی

پژوهشگر:

محمد خوش‌کام

استاد راهنما:

دکتر مراد احمد نسب

استاد مشاور:

دکتر کمال شانظری

پایان نامه‌ی کارشناسي ارشد رشته‌ی ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

دی ماه ۱۳۹۱

چکیده

در این پایان‌نامه به مطالعه‌ی روش فوق‌تخفیف شتاب‌دار اصلاح شده‌ی متقارن (SMAOR) برای حل دستگاه معادلات خطی تنک می‌پردازیم. سپس ناحیه‌ی همگرایی این روش را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

نتایج عددی حاصل از به کارگیری روش SMAOR، به همراه روش‌هایی هم‌چون فوق‌تخفیف شتاب‌دار(AOR) و فوق‌تخفیف شتاب‌دار اصلاح شده (MAOR) مؤید کوچک‌تر بودن شعاع طیفی ماتریس تکرار روش SMAOR نسبت به شعاع‌های طیفی دو روش دیگر می‌باشند که توضیحی برای همگرایی سریع‌تر روش SMAOR می‌باشد.

کلمات کلیدی: دستگاه معادلات خطی، روش AOR ، روش MAOR ، روش SMAOR، شعاع طیفی، ماتریس تکرار، همگرایی.

Abstract

In this thesis, we study a class of symmetric modified accelerated overrelaxation (SMAOR) methods for solving large sparse linear systems. Our study includes a review of accelerated overrelaxation method (AOR), modified accelerated overrelaxation method (MAOR) and SMAOR.

The convergence region of SMAOR is discussed. Numerical results show that the iteration matrix of SMAOR has spectral radius less than those of the iteration matrices of AOR and MAOR. They also display faster convergence of SMAOR for the considered examples.

key words: Systems of linear equations, Basic iterative methods, AOR method, MAOR method, SMAOR method, Convergence, Matrix coefficient, Spectral radius

کلیه حقوق مادی و معنوی مرتبط بر نتایج مطالعات،

ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این

پایان‌نامه (رساله) متعلق به دانشگاه کردستان است.

تعهد نامه

اینجانب محمد خوش‌کام دانشجوی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشگاه کردستان، دانشکده‌ی علوم پایه گروه ریاضی تعهد می‌نمایم که محتوای این پایان‌نامه نتیجه‌ی تلاش و تحقیقات خود بوده و از جایی کپی‌برداری نشده و به پایان رسانیدن آن نتیجه‌ی تلاش و مطالعات مستمر اینجانب و راهنمایی و مشاوره‌ی اساتید بوده است.

با تقدیم احترام

محمد خوش‌کام

۱۳۹۱ / ۱۰/۳

دانشگاه کردستان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسي ارشد رشته‌ی ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان:

روش فوق‌تخفیف شتاب‌دار اصلاح‌شده‌ی متقارن (SMAOR) برای حل دستگاه معادلات خطی

پژوهشگر:
محمد خوش‌کام

در تاریخ ۳ /۱۰ / ۱۳۹۱ توسط کمیته‌ی تخصصی وهیات داوران زیر مورد بررسی قرار گرفت و با نمره‌ی ... و درجه‌ی ...... به تصویب رسید.

هیات داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱ـ استاد راهنما	دکتر مراد احمدنسب	استادیار	
۲ـ استاد مشاور	دکتر کمال شانظری	دانشیار	
۳ـ استاد داور داخلی	دکتر فردین ساعدپناه	استادیار	
٤ـ استاد داور داخلی	دکتر امجد علی‌پناه	استادیار	

مهر و امضاء گروه

مهر و امضاء معاون آموزشی و تحصیلات تکمیلی دانشکده

University of Kurdistan
Faculty of Science
Department of Mathematics

A Thesis Submitted to the Postgraduate Studies Office in Partial Fulfillment
of the Requirements for the Degree of M.Sc.
in Applied Mathematics

Title:

Symmetric modified accelerated overrelaxation method for solving systems of linear equations

By:
Mohammad Khoshkam

The above thesis was evaluated and approved by the following members of the thesis committee with mark …. and …… quality on December 23, 2012.

Position	Title and Name	Signature
1. Supervisor:	Dr. Morad Ahmadnasab	
2. Advisor. :	Dr. Kamal Shanazari	
3. Internal Examiner:	Dr. Fardin Saedpanah	
4. Internal Examiner:	Dr. Amjad Alipanah	

Head of Department: Faculty Graduate Coordinator:

University of Kurdistan
Faculty of Science
Department of Mathematics

Title:

Symmetric modified accelerated overrelaxation method for solving systems of linear equations

By:
Mohammad Khoshkam

Supervisor:
Dr. Morad Ahmadnasab

Advisor:
Dr. Kamal Shanazari

A Thesis
Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of
M.Sc. in Applied Mathematics

December 2012

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به...

خانواده‌ی عزیزم

و

پرعمه‌های نازنینم؛

محمد بهرامی و مرحوم مریوان بهرامی

چکیده

در این پایان‌نامه به مطالعه‌ی روش فوق‌تخفیف شتاب‌دار اصلاح شده‌ی متقارن ($SMAOR$) برای حل دستگاه معادلات خطی تنک می‌پردازیم. سپس ناحیه‌ی همگرایی این روش را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

نتایج عددی حاصل از به کارگیری روش $SMAOR$، به همراه روش‌هایی هم‌چون فوق‌تخفیف شتاب‌دار (AOR) و فوق‌تخفیف شتاب‌دار اصلاح شده‌ی ($MAOR$) مؤید کوچک‌تر بودن شعاع طیفی ماتریس تکرار روش $SMAOR$ نسبت به شعاع‌های طیفی دو روش دیگر می‌باشند که توضیحی برای همگرایی سریع‌تر روش $SMAOR$ می‌باشد.

کلمات کلیدی: دستگاه معادلات خطی، روش AOR، روش $MAOR$، روش $SMAOR$، شعاع طیفی، ماتریس تکرار، همگرایی.

فهرست مطالب

[1] General

لیست جداول

لیست تصاویر

مقدمه

روش فوق‌تخفیف متوالی[۱] (SOR) از جمله روش‌های تکراری پایه‌ای برای حل دستگاه معادلات خطی به حساب می‌آید. این روش و نسخه‌های بعدی آن [۱۴، ۱۵] به سبب حضور پارامتر کنترل‌کننده در ساختار فرمول تکرارشونده‌ی آنها موجب هموارشدن راه برای روش‌های جدیدی هم‌چون روش‌های پیش‌بهبود دهنده‌ی چندشبکه‌ای شده‌اند [۹].
روش فوق‌تخفیف متوالی اصلاح‌شده[۲] $(MSOR)$ نخستین بار در [۱۴، ۳۱] پیشنهاد گردید. مطالعات مربوط به نوع همگرایی این روش برای دستگاه‌هایی با ساختارهای مختلف برای ماتریس ضرایب A (شامل معین مثبت یا اکیداً قطر غالب و چند حالت دیگر) در [۱۷، ۲۲، ۲۳، ۲۹، ۳۱] انجام شده است. در [۱۴، ۱۵] تعمیم روش $MSOR$ برای ماتریس ضرایب به‌طور سازگار مرتب شده‌ی تعمیم‌یافته مطرح گردید که به روش‌های فوق‌تخفیف شتاب[۳] داده شده‌ی تعمیم یافته $(MAOR)$ معروف هستند.
در این پایان‌نامه به بررسی ویژگی‌های روش فوق‌تخفیف شتاب‌دار اصلاح شده‌ی متقارن[۴] $(SMAOR)$ برای حل دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ می‌پردازیم که در آن ماتریس A دارای ساختار بلوکی

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & H \\ K & D_2 \end{pmatrix}$$

بوده، که در آن D_1 و D_2 ماتریس‌های قطری و نامنفرد هستند و $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. سپس خواص مربوط به ناحیه‌ی همگرایی و شرایط همگرایی این روش را با خواص مشابه روش‌های AOR و $MAOR$ مورد مقایسه قرار خواهیم داد و در نهایت، با استفاده از کدنویسی توسط $MATLAB$ و آزمایش‌های عددی، ویژگی‌های این روش‌ها در محیط حساب ممیز شناور مورد بررسی قرار خواهند گرفت.
نحوه‌ی چیدمان فصل‌های این پایان‌نامه به شرح زیر است. ابتدا در فصل یک مقدمات و پیش‌نیازهایی از جبرخطی ارائه خواهد شد. فصل دوم به معرفی روش‌های تکراری پایه‌ای اختصاص یافته است. در فصل سوم ضمن معرفی

[۱] Successive overrelaxation
[۲] Modified
[۳] Accelerated
[۴] Symmetric

روش‌های AOR و $MAOR$، به معرفی و مطالعه‌ی خواص روش $SMAOR$ می‌پردازیم. درنهایت، در فصل چهارم با استفاده از جداول و شکل‌ها، نتایج عددی حاصل از پیاده‌سازی سه روش معرفی شده در فصل سوم توسط $MATLAB$، به نمایش در آمده و مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته‌اند.

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

۱.۱ مقدمه

مهم‌ترین ابزار در بسیاری از زمینه‌های آنالیز عددی، جبرخطی و نظریه‌ی ماتریسی است. این مسئله یقیناً به طور طبیعی برای مسائل محاسباتی که در جبرخطی حاصل می‌شوند، نیز برقرار است. از جمله این مسائل می‌توان به حل دستگاه‌های معادلات خطی، محاسبات مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی یک ماتریس اشاره کرد.
هم‌چنین این واقعیت برای شمار زیادی از مسائل به طور شگفت انگیزی صادق است. از جمله در زمینه‌ی معادلات غیرخطی، معادلات دیفرانسیل و نظریه‌ی تقریب که در آنها اغلب، تحلیل روش‌های عددی متناظر با آنها، به نتایجی که از جبرخطی به دست می‌آیند، بستگی دارد.
در این فصل به مرور مفاهیم، تعاریف و قضایای پایه‌ای مربوط به ماتریس‌ها خواهیم پرداخت که برای درک مطالب فصل‌های بعدی لازم هستند.

۲.۱ مقادیر ویژه و فرم‌های کانونی

فضای nبعدی حقیقی و مختلط از بردارهای ستونی $\mathbf{x}$ با عناصر $\mathbf{x}_۱, \dots, \mathbf{x}_n$ را به ترتیب با $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{C}^n$ نمایش می‌دهیم. برای $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$، ترانهاده‌ی $\mathbf{x}$ را با $\mathbf{x}^T$ نمایش می‌دهیم که بردار سطری $(\mathbf{x}_۱, \dots, \mathbf{x}_n)$ می‌باشد. در حالتی که $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ باشد، ترانهاده‌ی مزدوج $\mathbf{x}$ را با $\mathbf{x}^H$ نشان می‌دهیم، که عبارت است از $\mathbf{x}^H = (\bar{\mathbf{x}}_۱, \dots, \bar{\mathbf{x}}_n)$.
گردایه‌ی عملگرهای خطی از $\mathbb{R}^m$ به $\mathbb{R}^n$ یا به طور معادل، مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های $n \times m$ حقیقی را با $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ نمایش می‌دهیم. برای سادگی مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ را با $L(\mathbb{R}^n)$ نشان می‌دهیم. به طور مشابه مجموعه‌ی ماتریس‌های $n \times m$ مختلط را با $L(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ یا هنگامی که $n = m$ باشد، با $L(\mathbb{C}^n)$ نشان می‌دهیم.

عناصر $A \in L(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ را با a_{ij} نشان می‌دهیم. توجه کنید وقتی که می‌نویسیم $A \in L(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ به این معنی نیست که احتمال حقیقی بودن A از بین می‌رود.

اگر $A \in L(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ باشد، آنگاه ترانهاده‌ی A را با A^T نشان می‌دهیم و اگر A مختلط باشد، آنگاه مزدوج ترانهاده‌ی A را با A^H نشان می‌دهیم. اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد، دترمینان A را با $detA$ و وارون A را با A^{-1} نشان می‌دهیم. A را نامنفرد گوییم، هرگاه A^{-1} موجود باشد. برای وارون‌پذیری A، قضیه‌ی پایه‌ای زیر را که در اکثر کتاب‌های جبرخطی از جمله [۲۵] آمده است، یادآوری می‌کنیم.

قضیه ۱.۱. فرض کنید $A \in L(\mathbb{C}^n)$، آنگاه گزاره‌های زیر معادلند:

۱. A نامنفرد است.

۲. $detA \neq 0$.

۳. دستگاه معادلات خطی $A\mathbf{x} = o$ تنها دارای جواب $\mathbf{x} = o$ است.

۴. برای هر بردار $\mathbf{b}$، دستگاه معادلات خطی $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ دارای جواب یکتا است.

۵. ستون‌های (سطرهای) A مستقل خطی هستند. یعنی اگر $u_1, \ldots, u_n$ ستون‌های (سطرهای) A و $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$ باشد، آنگاه اسکالرهای α_i، همگی صفر هستند.

شرط آخر در قضیه‌ی ۱.۱ تأکید بر این واقعیت است که A دارای رتبه‌ی[۱] n است. رتبه‌ی A به عنوان تعداد سطرهای (یا ستون‌های) مستقل خطی آن تعریف می‌گردد.

اگر $A \in L(\mathbb{C}^n)$، آنگاه یک اسکالر (حقیقی یا مختلط) λ و یک بردار $\mathbf{x} \neq o$ به ترتیب مقدار ویژه و بردار ویژه‌ی A هستند، هرگاه:

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \,, \tag{۱.۱}$$

و با توجه به قضیه‌ی ۱.۱، λ مقدار ویژه‌ی A است، اگر وتنها اگر:

$$det(A - \lambda I) = 0 \,. \tag{۲.۱}$$

معادله‌ی (۲.۱) را معادله‌ی مشخصه‌ی A می‌نامیم و با $P_A(\lambda)$ نشان می‌دهیم. در اینجا و از این پس، I همواره نمایانگر ماتریس همانی است. A دقیقاً n مقدار ویژه‌ی نه لزوماً متمایز دارد که ریشه‌های معادله‌ی (۲.۱) هستند.

[۱] Rank

مجموعه‌ی این n مقدار ویژه‌ی λ_1، ...، λ_n از A را طیف A و

$$\rho(A) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i| \,, \tag{۳.۱}$$

شعاع طیفی[1] A می‌باشد.

تعریف ۱.۱. [۱۸] ، فرض کنید μ یک ریشه‌ی چندجمله‌ای $P_A(\lambda)$ از مرتبه‌ی تکرار $k \leq n$ باشد، در این‌صورت k را چندگانگی جبری[2] μ گوییم. هرگاه $k = 1$ باشد، آنگاه μ را یک مقدار ویژه‌ی ساده‌ی A گویند.

در حالت کلی، محاسبه‌ی مقادیر ویژه مشکل است اما یک رده‌ی مهم از ماتریس‌ها وجود دارد که برای آنها می‌توان مقادیر ویژه را به سادگی یافت. این رده از ماتریس‌ها، ماتریس‌های بالا مثلثی با شکل ماتریسی

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} ,$$

و ماتریس‌های پایین مثلثی با شکل ماتریسی

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} ,$$

می‌باشند. به وضوح مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس مثلثی، درایه‌های روی قطر اصلی آن هستند. مورد خاصی از ماتریس‌های مثلثی، ماتریس‌های قطری هستند که آن را با D و معمولاً به صورت $D = diag(d_1, \dots, d_n)$ نمایش می‌دهیم. شکل ماتریسی D به صورت زیر می‌باشد:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} .$$

برای یک ماتریس $A \in L(\mathbb{C}^n)$، مقادیر ویژه‌ی آن می‌توانند به طور دلخواه توزیع شده باشند. اما برای دسته‌های مهم و مشترک معینی از ماتریس‌ها، مقادیر ویژه مقید به قرارگیری در بخش‌های معینی از صفحه‌ی مختلط هستند. برای مثال $A \in L(\mathbb{R}^n)$ متعامد است، هرگاه $A^T = A^{-1}$ و $A \in L(\mathbb{C}^n)$ یکانی است، هرگاه $A^H = A^{-1}$ و قدرمطلق مقادیر ویژه‌ی هر دو نوع ماتریس برابر عدد یک می‌باشد [۲۵]. به طور مشابه، $A \in L(\mathbb{R}^n)$ متقارن

[1] Spectral radius

[2] Algebraic multiplicity