دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه

جهت اخذ درجهٔ دکتری در رشتهٔ ریاضی محض

عنوان:

دیدگاه‌های توپولوژی روی خواص فانکتوری گروه‌های هموتوپی و برخی کاربردها در نظریه گروه‌ها

استاد راهنما:

آقای دکتر بهروز مشایخی فرد

استاد مشاور:

خانم دکتر فاطمه هلن قانع

توسط:

هانیه میرابراهیمی

تابستان ۱۳۸۷

Mathematics Department

Topological Viewpoints on Functorial Properties of Homotopy Groups and Some Applications in Group Theory

By:

Hanieh Mirebrahimi

A thesis submitted to Ferdowsi University of Mashhad for

the degree of Doctor of Philosophy

in Pure Mathematics

Supervisor:

Dr. Behrooz Mashayekhy Fard

Advisor:

Dr. Fateme Helen Ghane

Summer 2008

اظهارنامه

اینجانب **هانیه میرابراهیمی**دانشجوی دوره **دکتری** رشته **ریاضی محض** دانشکده **علوم ریاضی**دانشگاه **فردوسی مشهد** نویسنده رساله/پایان نامه **دیدگاه های توپولوژیکی روی خواص فانکتوری گروه های هموتوپی و برخی کاربردها در نظریه گروه ها** تحت راهنمایی **آقای دکتر بهروز مشایخی فرد** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این رساله/پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در رساله/پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه فردوسی مشهد » و یا « Ferdowsi University of Mashhad » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله/پایان نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از رساله/ پایان نامه رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این رساله/پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این رساله/پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه‌ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در رساله/پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

صمیمانه ترین سپاس خود را تقدیم می کنم به

استاد گران قدرم جناب آقای دکتر بهروز مشایخی فرد که همواره حامی من بودند

استاد مشاورم سرکار خانم دکتر فاطمه هلن قانع

و

معلم عزیزم آقای دکتر سعید کیوانفر که همواره مشوق و همراه من بودند

و

پدر و مادر عزیزم،

همسر مهربان

و

برادر دلسوزم

که هر چه هست متعلق به آنهاست و تقدیم به آنها

ملک جهان چیست که تا او به جهان فخر کند

فخر، جهان راست که او هست خداونده او

ای خنک آن دل که توئی غصه و اندیشه او

ای خنک آن ره که توئی باج ستاننده او

بس کن اگر چه که سخن سهل نماید همه را

در دو هزاران نبود یک کس داننده او

بسمه تعالی .

مشخصات رساله/پایان نامه تحصیلی دانشجویان .

دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان رساله/پایان نامه: دیدگاه های توپولوژیکی روی خواص فانکتوری گروه های بنیادین و برخی کاربردها در نظریه گروه‌ها

نام نویسنده: هانیه میرابراهیمی

نام استاد(ان) راهنما: دکتر بهروز مشایخی فرد

نام استاد(ان) مشاور: دکتر فاطمه هلن قانع

دانشکده : علوم ریاضی	**گروه:** ریاضی محض	**رشته تحصیلی:** توپولوژی جبری
تاریخ تصویب: ۱۳۸۵/۱۱/۱		**تاریخ دفاع:** ۱۳۸۷/۶/۹
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد ○	**دکتری** ●	**تعداد صفحات:** ۱۳۰

چکیده رساله/پایان نامه :

فصل اول به پیشنیازها : ۱. پیشنیازهای کتگوری ۲. پیشنیازهای جبری ۳. پیشنیازهای توپولوژی می پردازد.
در فصل دوم با تکیه بر مطالعات ادا و کانر برعکس روندی که در توپولوژی جبری وجود دارد، به روشی فانکتوری،به گروه ها فضاهای توپولوژیک نسبت می دهیم. و با این روش نسخه جدید و کاملا متفاتی از قضیه ون-کمپن ارائه می دهیم. همچنین ساختار زیبایی برای گروه های بنیادین فضاهای خارج قسمتی به دست می آوریم.
فصل سوم و چهارم به ساختار جدیدی از گروههای توپولوژیک، به نام گروههای هموتوپی توپولوژیک و بررسی خواص ساختاری و خواص توپولوژیکی آنها می پردازد.
فصل پنجم به تعبیر توپولوژیکی گروه های با نمایش متناهی و بررسی آن ها از دیدگاه توپولوژیکی می پردازد.
فصل ششم کاربرد قوی تری از ابزار توپولوژی در نظریه گروه هاست. در این فصل به از دیدگاه توپولوژیکی به مطالعه مفاهیمی چون ضربگرشور و ضربگرشور جفت گروه ها که از مفاهیم تخصصی نظریه گروه ها هستند، می پردازیم. و ضمن اثبات توپولوژیکی برخی خواص آن ها، نتایج جدیدی در این زمینه به دست می آوریم.
در فصل هفتم به بررسی ساختار گروه های پوششی می پردازیم. به ویژه ثابت می کنیم ساختار گروه های پوششی تعمیم یافته با حد مستقیم یک دستگاه جهت دار از گروه ها جابجا می شود. این نتیجه کاربرد مفیدی در تعمیم ساختار گروه های پوششی تعمیم یافته برای ضرب های متفاوت خانواده متناهی به خانواده ای دلخواه از گروه ها دارد. از جمله این نتیجه منجر به تعمیم قضایای معروفی مانند قضایای هیبیج و وایگلد می شود.

کلید واژه:

۱. گروه های هموتوپی
۲. گروه های هموتوپی توپولوژیک
۳. گروه های با نمایش متناهی
۴. ضربگر شور
۵. گروه های پوششی
۶. قضیه ون-کمپن
۷. حد مستقیم
۸. گروه های پوششی تعمیم یافته

امضای استاد راهنما:

تاریخ: ۱۳۸۷/۶/۱۳

فهرست مندرجات

مقدمه

توپولوژی‌جبری دستاوردی است که از تقابل و شاید تطابق دو دنیای جبر و توپولوژی حاصل شده‌است؛ و شاید به همین خاطر است که نمی‌توان تاریخ دقیقی برای تولد این علم تعیین کرد. با این‌حال، به‌خاطر اهمیتی که گروه بنیادین در توپولوژی‌جبری دارد، پیدایش این شاخه را همزمان با این مفهوم، سال ۱۸۹۵ میلادی، و منسوب به پدیدآور آن، هانری پوانکاره[۱]، می‌دانند.

این علم با عمر کوتاهی که دارد، به‌خاطر جایگاه و کاربردی که در سایر علوم دارد، همواره با سرعت زیادی رو به رشد و تکامل بوده؛ چنان‌چه تاکنون توجه بسیاری از اندیشمندان را به خود جلب کرده‌است. ازجمله دانشمندان علم ژنتیک که تاکنون با استفاده از مفاهیم و دستاوردهای مربوط به فضاهای خاصی در توپولوژی‌جبری، به‌نام گره‌ها [۲]، به بررسی ساختار DNAها پرداخته و در این زمینه به نتایج جالبی دست یافته‌اند؛ و بیشتر از آن‌ها می‌توان به فیزیک‌دان‌ها و به‌ویژه علاقه‌مندان به نظریه ابرریسمان‌ها اشاره کرد که به بیانی توپولوژی‌جبری را الفبای کار خود می‌دانند و ارتباط زیبایی در این زمینه برقرار کرده‌اند.

با این حال، باید گفت که در ایران این شاخه زیبا از علم دور از چشم مانده و کمتر مورد توجه قرار گرفته‌است. اما توپولوژی‌جبری جدا از کاربردهای زیبایی که دارد، به‌خاطر ارتباطی که بین دو شاخه جبر و توپولوژی برقرار می‌کند و درواقع ابزار کار آن متعلق به دو دنیای ظاهراً متفاوت جبر و توپولوژی می‌باشد، شایسته توجه است.

این رساله تلاش کوچکی است تقدیم به این علم؛ امید است که قطره‌ای باشد از دریای ریاضی.

در این رساله درواقع تلفیقی از توپولوژی‌جبری، نظریه کتگوری، نظریه گروه‌ها و البته توپولوژی

[۱] H. Poincare

[۲] not

است؛ سعی می‌کنیم از دیدگاه کتگوری به مطالعه توپولوژی‌جبری و بررسی نتایج جدید بپردازیم. این رساله شامل ۷ فصل است که از آن ۷ مقاله برای مجله‌های علمی پژوهشی مختلف و ۴ مقاله برای ارائه در سمینارها و کنفرانس‌های ریاضی به‌دست آمده‌است. در ادامه، اشاره مختصری به کل رساله خواهیم داشت.

فصل اول به پیشنیازهای رساله می‌پردازد؛ البته با این فرض که خواننده با توپولوژی‌جبری دوره‌های کارشناسی و کارشناسی‌ارشد آشنایی کافی داشته باشد. در این فصل، پیشنیازها به سه دسته پیشنیازهای کتگوری، پیشنیازهای جبری و پیشنیازهای توپولوژی تقسیم شده‌اند.

فصل دوم با تکیه بر مطالعات رساله کارشناسی ارشدم و درواقع در ادامه آن، شامل نتایج جدیدی در این زمینه می‌باشد. رساله کارشناسی ارشد من، با عنوان «گروه‌های بنیادین فرکتال‌های پئانو» مطالعه‌ای بود روی کارهای ادا[۳] و کانر[۴]؛ بویژه مقاله [٦]. ادا و کانر در این مقاله ایده جدیدی ارائه داده بودند؛ آن‌ها برعکس روندی که در توپولوژی‌جبری وجود داشت، به گروه‌ها فضاهای توپولوژیک نسبت داده و به این طریق به مطالعه خواص ساختاری گروه‌ها و فضاهای توپولوژیک خاصی پرداخته بودند. فرایندی که آن‌ها برای ساخت فضاهای توپولوژیک معرفی کرده بودند، خاصیت فانکتوری نداشت. در این فصل، در ادامه کار آن‌ها و البته با محدود شدن روی کتگوری خاصی از فضاهای توپولوژیک که آن‌ها را اصطلاحاً «پیوستار پئانو نما» خواهیم گفت، از دیدگاه کتگوری به مطالعه کارهای ادا و کانر می‌پردازیم. بویژه نشان می‌دهیم که روش ادا و کانر روی گروه‌های بنیادین فضاهای وحشی پیوستار پئانو نما، خواص فانکتوری دارد؛ و با مطالعه این فانکتور نتایج جدیدی به‌دست می‌آوریم؛ ازجمله یک قضیه ون—کمپن برای الحاق این دسته از فضاهای توپولوژیک ارائه می‌دهیم که با نسخه قبلی آن کاملاً متفاوت است. همچنین برای این سؤال مطرح و باز در توپولوژی‌جبری که از ارتباط گروه بنیادین یک فضای توپولوژیک خارج‌قسمتی با گروه بنیادین خود فضا می‌پرسد، برای این دسته از فضاها، پاسخ صریحی ارائه می‌دهیم. از این فصل مقاله‌ای با عنوان "$A\ Van-Kampen\ theorem\ for\ pseudo\ Peano\ continuum\ spaces$" [۳۵]

[۳] Eda
[۴] Conner

استخراج شده است.

فصل سوم و چهارم مجموعه مطالعاتی است که در دوره دکتری و در قالب تیمی، همراه با آقای دکتر مشایخی، خانم دکتر قانع و خانم حامد لبافیان انجام داده‌ایم و حاصل آن دو مقاله به شرح زیر می‌باشد. انگیزه اصلی این کارها، تحقیقات شخصی به نام بیس[۵] است [۳]. بیس در این مقاله، به گروه‌های بنیادین ساختار توپولوژی مناسبی داده بود به‌گونه‌ای که با ساختار جبری آن‌ها سازگار بود؛ و درواقع به این روش، مفهوم جدید گروه‌های بنیادین توپولوژیک را معرفی کرده بود. او همچنین نشان داده بود که این ساختار روی کتگوری $hTop$ خاصیت فانکتوری دارد و این اوج زیبایی کار او بود؛ درواقع فانکتوری که او معرفی کرده بود، π_1^{top}، علاوه بر اطلاعات جبری π_1، حاوی ساختار توپولوژیکی بود که بیش از پیش به مطالعه و بررسی فضاهای توپولوژیک کمک می‌کرد. او همچنین در مقاله خود به بررسی چند خاصیت فانکتوری و توپولوژیکی گروه‌های توپولوژیک π_1^{top} پرداخته بود. در ادامه کارهای بیس، شخصی به نام فابل[۶] طی سلسله مقالاتی [۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷] به بررسی خواص توپولوژیکی بیشتری در ارتباط با گروه‌های توپولوژیک پرداخت و با نتایجی که در این زمینه به دست آورد، به ارزش گروه‌های بنیادین توپولوژیک و مطالعات بیس افزود.

در فصل سوم این رساله، ابتدا مفهوم گروه بنیادین توپولوژیک را به گروه‌های هموتوپی توپولوژیک مراتب بالاتر گسترش می‌دهیم و مشابه کاری که بیس انجام داده بود، در این‌جا نیز نشان می‌دهیم این ساختار روی کتگوری $hTop$ خاصیت فانکتوری دارد. با درنظر گرفتن فانکتور π_n^{top} و بررسی خواص آن، بیشر نتایجی را که بیس به‌دست آورده بود، برای گروه‌های هموتوپی توپولوژیک نیز اثبات می‌کنیم. در فصل چهارم نیز طبیعتاً به دنبال کارهای فابل، نتایجی مشابه و البته در بعضی موارد نتایج بهتری را در ارتباط با گروه‌های هموتوپی توپولوژیک ارائه می‌دهیم.

لازم به ذکر است که برخی از نتایج این دو فصل، بدون برهان و در حد اشاره‌ای مختصر بیان شده‌اند و شرح آن‌ها بعداً در رساله خانم حامد لبافیان خواهد آمد.

از فصل سوم، مقاله‌ای با عنوان "$Topological\ homotopy\ groups$" [۱۹] و از فصل چهارم

[۵] Biss
[۶] Fabel

این رساله، مقاله "*On topological properties of topological homotopy groups*" [۲۰] به‌دست آمده‌است.

فصل پنجم کاربرد نسبتاً ساده‌ای از توپولوژی‌جبری در نظریه گروه‌هاست. درواقع با تعبیر ساده‌ای از گروه‌های با نمایش متناهی در توپولوژی آغاز می‌کنیم و با استفاده از استدلال‌ها و ابزار توپولوژی‌جبری به اثبات نتایجی در نظریه گروه‌ها می‌پردازیم. این نتایج هرچند جدید نیستند اما از آن‌جایی که برای اولین‌بار برای آن‌ها استدلال‌های توپولوژیکی ارائه شده است، می‌توان آن‌ها را از دستاوردهای جدید توپولوژی در نظریه گروه‌ها تلقی کرد. از این فصل نیز مقاله‌ای با عنوان "*Some properties of finitely presented groups with topological view points*" [۳۳] استخراج شده است.

فصل ششم کاربرد قوی‌تری از ابزار توپولوژی در نظریه گروه‌هاست. در این فصل ضمن یادآوری ضربگر شور گروه‌ها و ضربگر شور جفت گروه‌ها که درواقع مفاهیم تخصصی در نظریه گروه‌ها هستند، با استفاده از کارهایی که براون[۷] و لودی[۸] [۵] انجام داده‌اند، تعبیر توپولوژیکی زیبایی از آن‌ها ارائه می‌دهیم و با توجه به فرمول‌های قدرتمندی مانند فرمول هاپف[۹]، به مطالعه توپولوژیکی این مفاهیم می‌پردازیم. در طول این مسیر با کارهای الیس[۱۰][۱۳] در این زمینه و بویژه با مفاهیم جدیدی چون فضاهای نگاشت مخروطی، فضاهای نگاشت استوانه‌ای و دنباله‌های هم‌تار آشنا می‌شویم. همچنین جایگاه تعابیر ضربگر شور و ضربگر شور جفت گروه‌ها را در کتگوری فضاهای توپولوژیک می‌بینیم و از این دیدگاه به مطالعه آن‌ها می‌پردازیم. در ادامه تعبیر توپولوژیکی را که الیس برای ضربگر شور جفت گروه‌ها ارائه داده بود به تعبیر مناسبی برای ضربگر شور سه‌تایی گروه‌ها تعمیم می‌دهیم؛ و بالاخره نتایجی جبری را که قبلاً در این رابطه، با روش‌های نظریه گروه‌ها به اثبات رسیده‌اند، این‌بار با روش‌های توپولوژیکی اثبات کرده و در ضمن این مطالعات نتایج جدیدی در این زمینه ارائه می‌دهیم که قبلاً وجود نداشته‌اند. نتیجه کار این فصل، دو مقاله با

[۷] Brown
[۸] Loday
[۹] Hopf
[۱۰] Ellis

عناوین "$Some\ properties\ of\ the\ Schur\ multiplier\ with\ algebraic\ topological\ approach$"
و "$Some\ properties\ of\ the\ Schur\ multiplier\ of\ a\ pair\ of\ groups\ with\ topological\ approach$"
[۳۱] و [۳۴] می‌باشد.

ایده اصلی مطالعات فصل هفتم، بررسی خواص فانکتوری ساختار گروه‌های پوششی است. درواقع در این فصل به بررسی ساختار گروه‌های پوششی و البته در حالت کلی‌تر، گروه‌های $\mathcal{V}$−پوششی روی حد مستقیم یک دستگاه جهت‌دار از گروه‌ها می‌پردازیم. در این فصل با تکیه بر مقاله‌ای از مقدم[۱۱] [۳۸] که نشان داد فانکتور پایای بئر با حد مستقیم یک دستگاه جهت‌دار از گروه‌ها جابجا می‌شود، و نیز با استفاده از شکل تعمیم‌یافته فرمول هاپف برای ساختار گروه‌های $\mathcal{V}$−پوششی نسبت به یک واریته شور−بئر $\mathcal{V}$، ثابت می‌کنیم که ساختار گروه $\mathcal{V}$−پوششی با حد مستقیم یک دستگاه جهت‌دار از گروه‌ها جابجا می‌شود. این نتیجه، کاربرد مفیدی در تعمیم ساختار گروه‌های $\mathcal{V}$−پوششی برای ضرب‌های متفاوت خانواده متناهی به خانواده‌ای دلخواه از گروه‌ها دارد. از این فصل نیز مقاله‌ای با عنوان "$Generalized\ covering\ groups\ and\ direct\ limits$" [۳۲] استخراج شده‌است.

در پایان، صمیمانه‌ترین سپاس خود را تقدیم می‌کنم به استاد گران‌قدرم، آقای دکتر بهروز مشایخی‌فرد، که در تمام دوران تحصیلات دانشگاهی‌ام همواره حامی و راهنمای من بوده‌اند.
همچنین از استاد مشاور خوبم، خانم دکتر فاطمه‌هلن قانع و دوستان عزیزم، بویژه خانم زینب حامدلبافیان و خانم امیدوار که همواره مشوق من بودند کمال تشکر را دارم.

[۱۱] Moghaddam

فصل ۱

پیشنیازها

۱.۱ پیشنیازهای کتگوری

دستگاه مستقیم ([۴۸])

فرض کنیم I یک مجموعه مرتب جزئی و $\mathcal{C}$ یک کتگوری باشد. در این‌صورت یک دستگاه مستقیم در کتگوری $\mathcal{C}$ با مجموعه اندیس‌گذار I، خانواده‌ای است از اشیاً $\mathcal{C}$ به صورت $\{F_i\}_{i\in I}$ با این خاصیت که برای هر دو اندیس $i,j \in I$ که $i \leq j$، مورفیسم $\phi_i^j : F_i :\to F_j$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که در دو شرط زیر صادق باشد:

۱) برای هر $i \in I$، مورفیسم $\phi_i^i : F_i \to F_i$ همانی باشد.

۲) اگر $i \leq j \leq k$، رابطه $\phi_i^j \phi_j^k = \phi_i^k$ مطابق با نمودار جابجایی زیر در کتگوری $\mathcal{C}$ برقرار باشد:

$$\begin{array}{ccc} F_i & \xrightarrow{\phi_i^j} & F_j \\ & {\scriptstyle\phi_i^k}\searrow & \downarrow{\scriptstyle\phi_j^k} \\ & & F_k. \end{array}$$

در این صورت دستگاه مستقیم F را با نماد $F = \{F_i, \phi_i^j\}$ نشان می‌دهیم.

دستگاه جهت‌دار ([۴۸])

در تعریف دستگاه مستقیم $\{F_i, \phi_i^j\}$، اگر مجموعه اندیس‌گذار I یک مجموعه جهت‌دار باشد، یعنی برای هر دو اندیس $i, j \in I$ اندیس $k \in I$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $i, j \leq k$، آن‌گاه $\{F_i, \phi_i^j\}$ را اصطلاحاً یک دستگاه مستقیم جهت‌دار یا به‌طور خلاصه دستگاه جهت‌دار می‌نامیم.

حد مستقیم ([۴۸])

حد مستقیم برای دستگاه مستقیم $\{F_i, \phi_i^j\}$ در کتگوری $\mathcal{C}$، درصورت وجود، شیئی است در این کتگوری که آن را با نماد $\varinjlim F_i$ نشان می‌دهیم، همراه با خانواده‌ای از مورفیسم‌ها به صورت $\{\alpha_i : F_i \to \varinjlim F_i\}_{i\in I}$ به‌طوری‌که برای هر $i \leq j$، داریم $\alpha_i = \alpha_j \circ \phi_i^j$؛ و برای هر شئ دیگر X و خانواده $\{f_i : F_i \to X\}_{i\in I}$ از مورفیسم‌ها که در شرایط $f_i = f_j \circ \phi_i^j$ صدق می‌کنند، مورفیسم منحصربفرد $\beta : \varinjlim F_i \to X$ وجود دارد که برای آن، نمودار جابجایی زیر برقرار است:

$$\begin{array}{ccc} F_i & & \\ {\scriptstyle\alpha_i}\downarrow & \searrow^{f_i} & \\ \varinjlim F_i & \xrightarrow{\beta} & X \end{array}$$

پیش‌ران ([۴۸])

فرض کنیم B، $A_۱$ و $A_۲$ اشیائی در کتگوری $\mathcal{C}$ و $f_۱ : B \to A_۱$ و $f_۲ : B \to A_۲$ مورفیسم‌هایی در این کتگوری باشند؛ یک پیش‌ران برای این مجموعه، در صورت وجود، شئ C است همراه با دو مورفیسم $g_۱$ و $g_۲$ که در نمودار جابجایی زیر

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f_۱} & A_۱ \\ {\scriptstyle f_۲}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_۱} \\ A_۲ & \xrightarrow{g_۲} & C. \end{array}$$

صدق می‌کنند و به‌علاوه برای هر شئ دیگر D همراه با مورفیسم‌های $h_۱$ و $h_۲$ صادق در نمودار جابجایی زیر

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f_۱} & A_۱ \\ {\scriptstyle f_۲}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_۱} \\ A_۲ & \xrightarrow{h_۲} & D. \end{array}$$

مورفیسم منحصربفرد $\phi : C \to D$ وجود دارد که نمودار جابجایی زیر، برای هر $i \in \{۱,۲\}$، برقرار است.

$$\begin{array}{ccc} A_i & & \\ {\scriptstyle g_i}\downarrow & \searrow^{h_i} & \\ C & \xrightarrow{\phi} & D \end{array}$$

شایان ذکر است که پیش‌ران درواقع مثال خاصی از یک حد مستقیم است؛ که البته دستگاه مستقیم نظیر آن، جهت‌دار نیست.

هم‌ضرب ([۴۸])

اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از اشیاً در کتگوری $\mathcal{C}$ باشد، هم‌ضرب این خانواده، در صورت وجود، شیئی است مانند C همرا با خانواده‌ای از مورفیسم‌ها به صورت $\{\tau_i : A_i \to C\}_{i\in I}$ با این خاصیت که برای هر شئ دلخواه دیگر D در این کتگوری و مورفیسم‌های $\{\alpha_i : A_i \to D\}_{i\in I}$، مورفیسم منحصربفرد $\beta : C \to D$ وجود داشته باشد که در نمودار جابجایی زیر صدق کند:

$$\begin{array}{ccc} A_i & & \\ {\scriptstyle \tau_i}\downarrow & \searrow^{\alpha_i} & \\ C & \xrightarrow{\beta} & D \end{array}$$

شایان ذکر است که هم‌ضرب در یک کتگوری، مثال خاصی از حد مستقیم است؛ و البته متذکر می‌شویم که دستگاه نظیر این حد مستقیم جهت‌دار نیست. هم‌ضرب در کتگوری‌های معروفی مانند کتگوری گروه‌ها (ضرب آزاد گروه‌ها) و در کتگوری فضاهای توپولوژیک (الحاق فضاهای توپولوژیک) وجود دارد که به زودی با ساختار آن‌ها آشنا خواهیم شد.

دستگاه معکوس، حد معکوس و پس‌ران مفاهیمی هستند که به‌طور مشابه و البته به صورت دوگان دستگاه‌مستقیم، حد مستقیم و پیش‌ران تعریف می‌شوند.

دستگاه معکوس ([۴۸])

فرض کنیم I یک مجموعه مرتب جزئی و $\mathcal{C}$ یک کتگوری باشد. در این‌صورت یک دستگاه معکوس در کتگوری $\mathcal{C}$ با مجموعه اندیس‌گذار I، خانواده‌ای است از اشیأ $\mathcal{C}$ به صورت $\{F_i\}_{i\in I}$ با این خاصیت که برای هر دو اندیس $i,j\in I$ که $i\leq j$، مورفیسم $\psi_i^j : F_j :\to F_i$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که در دو شرط زیر صادق باشد:

۱) برای هر $i\in I$، مورفیسم $\psi_i^i : F_i\to F_i$ همانی باشد.

۲) اگر $i\leq j\leq k$، نمودار جابجایی زیر در کتگوری $\mathcal{C}$ برقرار باشد:

$$\begin{array}{ccc} F_k & \xrightarrow{\psi_i^k} & F_i \\ & {\scriptstyle\psi_j^k}\searrow & \downarrow{\scriptstyle\psi_j^i} \\ & & F_j. \end{array}$$

در این صورت دستگاه معکوس F را با نماد $F=\{F_i,\psi_i^j\}$ نشان می‌دهیم.

حد معکوس ([۴۸])

حد معکوس برای دستگاه معکوس $\{F_i,\psi_i^j\}$ در کتگوری $\mathcal{C}$، درصورت وجود، شیئی است در این کتگوری که آن را با نماد $\varprojlim F_i$ نشان می‌دهیم، همراه با خانواده‌ای از مورفیسم‌ها به صورت $\{\alpha_i : \varprojlim F_i\}_{i\in I}\to F_i$ به‌طوری‌که برای هر $i\leq j$، داریم $\alpha_i=\psi_i^j\circ\alpha_j$؛ و برای هر شیئ دیگر X همراه با خانواده $\{f_i : X\to F_i\}_{i\in I}$ از مورفیسم‌ها که در شرایط $f_i=\phi_i^j\circ f_j$ صدق می کنند، مورفیسم منحصربفرد $\beta : X\to \varprojlim F_i$ وجود دارد که برای آن، نمودار جابجایی زیر برقرار است:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\beta} & \varprojlim F_i \\ & {\scriptstyle f_j}\searrow & \downarrow{\scriptstyle\alpha_j} \\ & & F_j. \end{array}$$