بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی (گرایش جبر)

پایان نامه جهت اخذ دکترا

زیرمدولهای اولین، زیرمدولهای اولین ضعیف و نتایج وابسته

از

احمد یوسفیان دارانی

استاد راهنما

شهاب الدین ابراهیمی آتانی

۱۳۸۷/۵/۲۸

اسفند 1386

۱۰۱۸۳۴

تقدیم به همسرم نسرین اقبالی و دخترم نوژین

تقدیر و تشکر

عنایات خداوند منان و راهنماییهای اساتید و همیاریهای دلسوزانه خانواده به من این توفیق را داد که این مرحله از تحصیلات خود را به اتمام برسانم. به پایان رساندن این پایان نامه بدون کمک بسیاری از افراد در دانشگاه گیلان و در خارج از دانشگاه امکان پذیر نبود.

مراتب سپاس خود را از استاد راهنمای بسیار ارجمندم جناب آقای پروفسور شهاب الدین ابراهیمی آتانی ابراز می دارم. ایشان در طول تحصیل و در تدوین پایان نامه با پیشنهادات عالی و حمایت دائمی خود یاریگر من بودند. شخصی که کمک ها، پشت گرمی ها و شکیباییشان در فراهم کردن این پایان نامه بسیار پر بها بود. ایشان همواره با راهنمایی ها، مشورت ها، حمایت ها و تشویق هایشان باعث پیشرفت کار می شدند.

همچنین از جناب آقای پروفسور حبیب اله انصاری به خاطر راهنمایی هایشان در طول دوران تحصیل کمال تشکر را دارم. حمایت ایشان انجام چنین تحقیقاتی را ممکن می سازد.

بنده همچنین از آقایان پروفسور سیامک یاسمی، پروفسور حبیب اله انصاری، دکتر حمیدرضا میمنی و دکتر احمد عباسی، اعضای هیات داوران، به خاطر مطالعه دقیق پایان نامه و ارائه راهنماییها و پیشنهادات سازنده صمیمانه تشکر می کنم.

همچنین از مسئولین دانشگاه گیلان که در موقعیت های مختلف بنده را مورد حمایت قرار دادند سپاسگذارم. بویژه از آقایان دکتر بهروز فتحی، دکتر جعفر بی آزار و دکتر آرمان عقیلی کمال تشکر را دارم.

مایلم مراتب سپاسگذاری خود را از همسرم خانم نسرین اقبالی به خاطر صبر و شکیباییش و به خاطر کمکهایش در طول تحصیل ابراز دارم. بدون کمکهای او این کار هرگز به پایان نمی رسید.

البته از صمیم قلب از خانواده ام به خاطر حمایت هایشان قدردانی می کنم.

احمد یوسفیان دارانی

اسفند ماه 1386

فهرست مطالب

چکیده

زیرمدولهای اولین، زیرمدولهای اولین ضعیف و نتایج وابسته

احمد یوسفیان دارانی

در این پایان نامه ما خواص زیرمدولهای اولین و زیرمدولهای اولین ضعیف یک مدول را مطالعه می کنیم.
ما ایده الهای اولین و شبه-اولیه از یک نیم گروه جمعی حذفی و بی تاب با عضو همانی را بررسی خواهیم کرد.
ایده الهای اولین و شبه-اولیه از یک نیم گروه پرافر S را معین می کنیم و نشان می دهیم که در چنین نیم گروههایی، سه مفهوم اولیه، اولین و شبه-اولیه یکی اند.
بعضی خواص از زیرمدولهای اولین و زیرمدولهای شبه-اولیه از یک مدول روی یک حلقه جابجایی با عضو واحد ناصفر را مطالعه می کنیم. تجزیه اولین ایده الها را برای زیرمدولها توسیع می دهیم. نشان می دهیم که روی یک حوزه پرافر با مشخصه صفر، هر زیرمدول از یک مدول یک تجزیه اولین تقلیل یافته یکتا دارد.
برای یک حلقه جابجایی R، مفهوم مدول ضربی اولین تعریف شده است. همچنین، رابطه بین خانواده های مدولهای ضربی ضعیف، مدولهای ضربی اولین و مدولهای ضربی اولین توسیع یافته روی یک حلقه جابجایی در نظر گرفته شده است.
ما گراف مقسوم علیه های صفر نسبت به ایده الهای اولین، غیر اولین، اول ضعیف و اولین ضعیف از یک حلقه جابجایی R را در نظر می گیریم. اثر متقابل بین خواص نظریه حلقه ای R و خواص نظریه گرافی از $\Gamma_I(R)$ رابرای یک ایده ال I از R بررسی می کنیم. همچنین نشان می دهیم که گراف مقسوم علیه های صفر نسبت به ایده الهای اول با موضعی سازی جابجا می شود.

کلید واژه: اولین، اولیه، ضربی

Abstract

Primal and weakly primal submodules and related results

Ahmad Yousefian Darani

In this Thesis we study the properties of primal submodules and weakly submodules.
We study the primal ideals and quasi-primary ideals of a commutative cancellation torsion-free additive semigroup with identity. We characterize primal ideals and quasi-primary ideals of a prufer semigroup S and show that in such semigroup, the three concepts: primary, quasi-primary, and primal coincide.
We study some properties of primal submodules and quasi-primary submodules of a module over a commutative ring with a non-zero identity. We generalize the primal decomposition of ideals to that of submodules. We show that over a Prufer domain of finite character, every submodule of a module has a unique reduced primal decomposition.
For a commutative ring R, the notion of primal multiplication (resp. generalized primal multiplication module) over R is defined. Also, the relation among the families of weak multiplication modules, primal multiplication modules and generalized primal multiplication modules over a commutative ring is considered.
We define weakly primal ideals in a commutative ring. We study the relationship among the families of weakly prime ideals, prime ideals, primal ideals and weakly primal ideals.
We consider zero-divisor graphs with respect to primal, non-primal, weakly prime and weakly primal ideals of a commutative ring R with a non-zero identity. We investigate the interplay between the ring-theoretic properties of R and the graph-theoretic properties of $\Gamma_I(R)$ for some ideal I of R. Also we show that the zero-divisor graph with respect to primal ideals commutes by localization.

Key words: Primal, Primary, Multiplication.

مقدمه

در این پایان نامه همه حلقه ها جابجایی با عضو واحد ناصفر در نظر گرفته می شوند و همه مدولها یکانی اند، مگر این که خلاف آن بیان شود. مفهوم ایده الهای اولین در حلقه های جابجایی توسط Fuchs در [27] معرفی شده است. فرض کنید R یک حلقه جابجایی و I ایده الی از R باشد. عضو $a \in R$ نسبت به I اول نامیده می شود هر گاه $ra \in I(r \in R)$ بیان کند که $r \in I$. مجموعه عناصری از R را که نسبت به I اول نیستند با S(I) نشان دهید. ایده ال سره I از R اولین نامیده می شود هر گاه S(I) ایده الی از R تشکیل دهد؛ این ایده ال همواره ایده الی اول از R است، که ایده ال اول الحاقی I نامیده می شود. در اینحالت همچنین می گوییم که I یک ایده ال P-اولین از R است. Fuchs همچنین نظریه نمایش یک ایده ال بصورت اشتراکی از ایده الهای اولین را بیان کرده است. بعلاوه، نظریه نمایش اولین از زیرمدولها بطور وسیعی در [11] مطالعه شده است.

هدف ما در بخش 1 مطالعه ساختار ایده الهای اولین و شبه-اولیه از نیم گروه S است، که در آن S یک نیم گروه جمعی جابجایی حذفی بی تاب با همانی 0 خواهد بود و $S \neq \{0\}$. هدف این بخش کاوش کردن بعضی حقایق از این کلاس از ایده الهای یک نیم گروه می باشد. ما تجزیه ایده الهای S به اشتراک (یا حاصلضرب) ایده الهای شبه-اولیه را مطالعه می کنیم. بعنوان مثال، نشان می دهیم که هر ایده ال روی یک نیم گروه پرافر، شبه-اولیه است (قضیه 9.1.1 را ببینید). ایده الهای اولین از یک نیم گروه پرافر را معین می کنیم و رابطه ای بین ایده الهای اولین، شبه-اولیه و ایده الهای اولیه چنین نیم گروههایی را تعیین می کنیم.

در بخش 2، خواص زیرمدولهای یک مدول، و اشتراک آنها به زیرمدولهای اولین را بررسی می کنیم. تحقیقات در این مورد بسیار کم است و اکثر آنها محدود به این سوالند که چه موقع یا کدام زیرمدولها یک تجزیه به تعداد متناهی زیرمدول اولیه را می پذیرند؟ می دانیم که هر زیرمدول از یک مدول نوتری می تواند بصورت اشتراک تعداد متناهی از زیرمدولهای تحویلناپذیر نمایش داده شود. بعلاوه در یک مدول نوتری، هر زیرمدول تحویلناپذیر، اولیه است. پس اگر N یک زیرمدول سره از مدول نوتری M باشد، آنگاه N تجزیه ای بصورت اشتراک تعداد متناهی از زیرمدولهای اولیه دارد. این به ندرت در مدولهای غیر نوتری اتفاق می افتد، چون در حالت کلی، زیرمدولهای تحویلناپذیر لزومی ندارد که اولیه باشند. پس ما به دنبال تجزیه دیگری از زیرمدولها هستیم. ما تجزیه زیرمدولهای یک مدول روی حوزه های پرافر به اشتراک زیرمدولهای اولین را بررسی می کنیم. چون قصد داریم که مفروضاتمان را به اشتراکهای متناهی محدود کنیم، کارمان را با یک حوزه بامشخصه متناهی شروع می کنیم؛ یعنی حوزه ای که در آن هر عضو ناصفر تنها در تعداد متناهی ایده ال ماکسیمال قرار داشته باشد. چندین نتیجه در مورد اشتراک زیرمدولهای اولین بیان می کنیم. در قضیه 2.3.2 نشان داده شده است که روی یک حوزه پرافر از مشخصه متناهی، هر زیرمدول یک تجزیه بصورت اشتراک تعداد متناهی از زیرمدولهای اولین دارد. همچنین ایده الهای ماکسیمال غیر اول نسبت به N را بر اساس ایده الهای اول الحاقی آن در یک نمایش تقلیل یافته از N به زیرمدولهای اولین، تعیین می کنیم (قضیه 9.3.2 را ببینید). در قضیه 11.3.2 ثابت می کنیم که نمایشهای تقلیل یافته کوتاه یک زیرمدول از یک R-مدول یکتاست.

ایده الهای شبه-اولیه در حلقه های جابجایی توسط Fuchs در [28] معرفی شده اند و مورد مطالعه قرار گرفته اند (همچنین [29] را ببینید). ایده ال I از R شبه-اولیه نامیده می شود هر گاه رادیکالش (که ما آنرا با rad(I) نمایش می دهیم) ایده الی اول از R باشد. در بخش 3 زیرمدولهای شبه-اولین از یک مدول روی یک حلقه جابجایی را بررسی می کنیم. در واقع، هر زیرمدول اولیه، شبه-اولیه است، اما یک زیرمدول شبه-اولیه لزومی ندارد که اولیه باشد (مثال 3.1.3 را ببینید). خواص متفاوتی از زیرمدولهای شبه-اولیه در نظر گرفته شده اند. بعنوان مثال، در قضیه 11.1.3، نشان می دهیم که اگر N یک زیرمدول شبه-اولیه از R-مدول نمایش پذیر M باشد، آنگاه M/N ثانویه است. در قضیه 4.2.3، نشان می دهیم که روی یک حوزه پرافر با مشخصه متناهی R، اگر M یک R-مدول ضربی با تولید متناهی باشد، آنگاه هر زیرمدول ناصفر M بصورت حاصلضربی از تعداد متناهی از زیرمدولهای شبه-اولیه دوبدو متباین از M است. همچنین در قضیه 5.2.3، ثابت می کنیم که اگر M یک مدول باوفای ضربی روی حلقه جابجایی R باشد، آنگاه هر زیرمدول شبه-اولیه از M در یک زیرمدول اول M مشمول است.

ایده الهای اول ضعیف توسط D.D.Anderson و E. Smith در [5] معرفی و مطالعه شده اند، جایی که ایده ال سره P از R اول ضعیف نامیده می شود هرگاه $0 \neq ab \in P$ بیان کند $a \in P$ و یا $b \in P$. در بخش 4 یک تعریف جدید از ایده الها را ارائه می دهیم: *ایده الهای اولین ضعیف*. ساختار ایده الهای اولین ضعیف از یک حلقه جابجایی را مطالعه می کنیم. ایده الهای اولین ضعیف، اول ضعیف و اولین مفاهیم متفاوتی اند. در این بخش رابطه بین خانواده ایده الهای اولین ضعیف، ایده الهای اولین و ایده الهای اول ضعیف را در نظر می گیریم. تعدادی نتایج در مورد ایده الهای اولین ضعیف بیان شده اند و مثالهایی از ایده الهای اولین ضعیف داده شده اند. دو مشخص سازی برای ایده الهای اولین ضعیف در قضیه 1.1.4 ارائه می دهیم. همچنین در قضیه 15.1.4 ثابت می کنیم که یک تناظر یک به یک بین ایده الهای P-اولین ضعیف از حلقه R و ایده الهای $S^{-1}P$-اولین ضعیف از $S^{-1}R$ وجود دارد، که در آن S یک زیرمجموعه ضربی بسته از R است که از عناصر منظم تشکیل شده است. چون بنابر تعریف، 0 همواره ایده ال اولین ضعیف R است، یک ایده ال اولین ضعیف لزومی ندارد که اولین باشد. در قضیه 3.2.4 نشان می دهیم که هر ایده ال اولین ضعیف ناصفر از یک حلقه جابجایی تجزیه پذیر، اولین است. همچنین ثابت می کنیم که اگر I یک ایده ال اولین ضعیف از حلقه جابجایی R باشد بطوریکه اولین نیست، آنگاه $I^2 = 0$ (قضیه 5.2.4 را ببینید) براساس مثال 1.2.4، یک ایده ال اولین لزومی ندارد که اولین ضعیف باشد، اما در گزاره 6.2.4، ثابت می کنیم که یک ایده ال روی یک حوزه صحیح اولین است اگر و فقط اگر اولین ضعیف باشد. با استفاده از این مطلب، مشاهده می کنیم که در یک حوزه پرافر با مشخصه متناهی، هر ایده ال ناصفر بصورت اشتراک تعداد متناهی از ایده الهای اولین است (قضیه 8.2.4 را ببینید).

در بخش 5 گراف مقسوم علیه های صفر نسبت به ایده الهای اولین، ایده الهای اول ضعیف و ایده الهای اولین ضعیف را مطالعه می کنیم . ایده متناظر کردن یک گراف با مقسوم علیه های صفر یک حلقه جابجایی، ابتدا توسط Beck در [9] مطرح شد، جایی که نویسنده در مورد رنگ آمیزی چنین گرافهایی صحبت کرد. بنابر تعریفی که او ارائه داد، هر عضو از حلقه R راسی از گراف بود و دو راس x و y مجاور بودند اگر و فقط اگر xy=0. ما شیوه ای که توسط D.F. Anderson و P. S. Livingston در [6] ارائه شد را می پذیریم و تنها مقسوم علیهای صفر

ناصفر را در نظر می گیریم. . گراف مقسوم علیه های یک حلقه جابجایی توسط چندین نویسنده بطور وسیعی مطالعه شده است (بعنوان مثال [9,7,34,37,10,38] را ببینید).

در [39]، Redmond تعریف گراف مقسوم علیه های صفر نسبت به یک ایده ال را معرفی کرد. فرض کنید I ایده الی از R باشد. گراف مقسوم علی های صفر R نسبت به I یک گراف غیر جهت دار است، که با $\Gamma_I(R)$ نمایش داده می شود، و مجموعه راسهای آن عبارت است از

$$\{x \in R \setminus I \mid xy \in I \quad for \quad some \quad y \in R \setminus I\}$$

که در آن راسهای x و y مجاورند اگر و فقط اگر $xy \in I$. بنابراین اگر I=0، آنگاه $\Gamma_I(R) = \Gamma(R)$، و I ایده الی اول از R است اگر و فقط اگر $\Gamma_I(R) = \phi$. برای هر ایده ال I از حلقه جابجایی R، مجموعه $\Gamma_I(R) \cup I$ را با علامت $\hat{\Gamma}_I(R)$ نمایش می دهیم. سوالات باز زیادی در مورد گراف مقسوم علیه های صفر نسبت به یک ایده ال وجود دارد. یکی از سوالات اساسی این است که چطور یک گراف مقسوم علیه های صفر نسبت به یک ایده ال با موضعی سازی جابجا می شود، و در اینحالت، ارتباط بین قطرها (و دورهای) این گرافها چیست؟ ما یک جواب مثبت به این سوالها می دهیم.

ما از R برای نشان دادن یک حلقه جابجایی و یکدار استفاده می کنیم. Z(R) را برای نمایش مجموعه مقسوم علیه های صفر R، و $Z(R)^*$ را برای نمایش مجموعه مقسوم علیه های صفر ناصفر R بکار می بریم. منظور از گراف مقسوم علیه های صفر R، که با $\Gamma(R)$، نمایش داده می شود، گرافی است که راسهایش مقسوم علیه های صفر ناصفر R می باشد، و برای راسهای متمایز $x, y \in Z(R)^*$، یک یال متصل کننده بین x و y وجود دارد اگر و فقط اگر xy=0. ابتدا نشان می دهیم که اگر $gr(\Gamma_I(R)) = 4$ آنگاه I یک ایده ال رادیکال است. (قضیه 1.1.5 را ببینید). در فصل 2.5، نشان داده شده است (قضیه 5.2.5) که اگر I و J ایده الهای P-اولین R باشند آنگاه $\Gamma_I(R) = \Gamma_J(R)$ اگر و فقط اگر I=J. همچنین (در قضیه 8.2.5) ثابت شده است که اگر I ایده ال اولینی از حلقه نوتری R باشد، آنگاه $diam(\Gamma(R/I)) \leq 2$. در قضایای 15.2.5 و 17.2.5 (به ترتیب قضایای 7.4.5 و 8.4.5) نشان داده شده است که اگر S یک زیرمجموعه ضربی بسته از R باشد که از عناطر منظم تشکیل شده است و I یک ایده ال P-اولین (به ترتیب P-اولین ضعیف) از R باشد و $P \cap S = \phi$، آنگاه $diam(\Gamma_I(R)) = diam(\Gamma_{S^{-1}I}(S^{-1}R))$ و $gr(\Gamma_I(R)) = gr(\Gamma_{S^{-1}I}(S^{-1}R))$. در قضیه 4.3.5 نشان می دهیم که اگر I یک ایده ال رادیکال غیر اولین از R باشد که $|Min(I)| \geq 3$، آنگاه $diam(\Gamma_I(R)) = 3$. همچنین نشان داده شده است که اگر I یک ایده ال غیر رادیکال غیر اولین از R باشد، آنگاه $diam(\Gamma_I(R)) = 3$ (قضیه 8.3.5 را ببینید). در فصل 4.5، گراف مقسوم علیه های صفر نسبت به ایده الهای

اولین ضعیف را مطالعه می کنیم. قرار می دهیم
$Z_I(R)=\{r\in R\setminus I \mid ra=0 \quad for \quad some \quad a\in R\setminus I\}$ که در آن I ایده الی از حلقه R است. در

قضیه 3.4.5 ثابت شده است که اگر I ایده الی از حلقه R باشد و P یک ایده ال اولین ضعیف با $w(I)\subseteq P$ و $(P\setminus I)\cap Z_I(R)=\phi$، آنگاه $\Gamma_I(R)=(P\setminus I)\bigcup Z_I(R)$ اگر و فقط اگر I یک ایده ال P-اولین ضعیف از R باشد. در قضیه 4.4.5 نشان داده شده است که اگر I یک ایده ال اول ضعیف از R باشد، آنگاه $\Gamma_I(R)=Z_I(R)$. بویژه $\Gamma_I(R)$ زیرگرافی از $\Gamma(R)$ است.

در فصل 5.5، بعضی نتایج در مورد گراف $\Gamma_{I[x]}(R[x])$ را بیان می کنیم. ثابت شده است که f(x) عضوی از $\Gamma_{I[x]}(R[x])$ است اگر و فقط اگر عضوی مانند $r\in\Gamma_I(R)$ موجود باشد بطوریکه $rf(x)\in I[x]$ (قضیه 1.5.5 را ببینید). در قضیه 3.5.5 نشان داده شده است که I[x] ایده ال اولین R[x] است اگر و فقط اگر I ایده ال اولین R باشد و R/I یک حلقه مک-کوی باشد.

بخشهای 1-5 نتایج جدید ما هستند که می توان آنها را در منابع [18,19,20,21,22,23,24,25] دید.

بخش 1

ایده الهای اولین در نیم گروهها

این بخش مبتنی بر مقاله [21] می باشد. در سرتاسر این بخش S یک نیم گروه حذفی بی تاب جمعی با عضو همانی 0 است و $S \neq 0$. هدف ما در این بخش مطالعه ساختار ایده الهای اولین و ایده الهای شبه-اولیه نیم گروه S است. علاقه ما به این بخش توسط مقاله [29] برانگیخته شده است. Fuchs در [27] مفهوم ایده الهای اولین را معرفی کرد، که در آن یک ایده ال سره I از S اولین نامیده می شود اگر عناصری از S که نسبت به I اول نیستند تشکیل یک ایده ال بدهند (به بخش 3 رجوع کنید). Fuchs و Mosteig در [29] ثابت کردند که در یک دامنه پرافر با مشخصه متناهی، هر ایده ال ناصفر اشتراک تعداد متناهی ایده الهای اولین است، و بعلاوه، ایده الهای P-اولین تحت ضرب ایده الها یک نیم گروه تشکیل می دهند. نتیجه ای مشابه برای تجزیه به اشتراک (همینطور ضرب) ایده الهای شبه-اولیه برقرار است. در بخش 1.1 زیرگروههایی را توصیف می کنیم که در آنها هر ایده ال اول است. در قضیه 1.1.2 ثابت می کنیم که زیرگروه S یک گروه است اگر و فقط اگر هر ایده ال سره آن اول باشد. تعدادی از نتایج درباره ایده الهای شبه-اولیه S داده شده اند (بخش 1.1 را ببینید). به عنوان مثال، نشان می دهیم که هر ایده ال روی یک نیم گروه پرافر شبه-اولیه است. در فصل 1.2، خواص مختلفی از ایده الهای اولین S در نظر گرفته شده اند، به عنوان مثال، ایده الهای اولین یک نیم گروه پرافر S را توصیف می کنیم و یک ارتباط بین ایده الهای اولین، ایده الهای شبه-اولیه و ایده الهای اولیه از چنین نیم گروههایی را برقرای می کنیم.

قبل از مطرح کردن نتایج، اجازه دهید بعضی نمادها و اصطلاحات را معرفی کنیم. فرض کنید S یک نیم گروه باشد. اگرقرار دهیم $G=\{a-b \mid a,b \in S\}$، آنگاه G یک گروه آبلی بی تاب نسبت به عمل جمع است و S یک زیر نیم گروه از G است. G گروه خارج قسمتی S نامیده می شود. هر نیم گروه T که بین S و G قرار دارد را یک فوق-نیم گروه از S می نامیم ([32] را بینید).

منظور از یک ایده ال از S، یک زیرمجموعه ناتهی I از S است بطوریکه به ازای هر $a \in I$ و به ازای هر $b \in S$ داشته باشیم $a+b \in I$، یعنی $I+S=I$. بنابراین برای هر $x \in S$، $x+S=\{x+y \mid y \in S\}$ یک ایده ال اصلی تولید شده توسط x می باشد. اگر I و J ایده الهایی از S باشند، آنگاه $I+J=(I+S)+(J+S)=(I+J)+S$ ایده الی از S است. برای $a \in S$ و ایده ال I از S، منظور از $a+I$ عبارت است از جمع $a+I=(a+S)+(I+S)$ که ایده الی از S است. ایده ال سره I از نیم گروه S ماکسیمال نامیده می شود اگر ایده الی مانند J از S وجود نداشته باشد بطوریکه

$I \subset J \subset S$، که در آن ما از $\subset$ جهت نمایش شمول اکید استفاده می کنیم. عضو $a \in S$ یک عضو یکال نامیده می شود هر گاه عضوی مانند $b \in S$ موجود باشد بطوریکه $a+b=0$. اگر $U(S)$ نشان دهنده عناصر یکال S باشد و $0 \in U(S)$، آنگاه $U(S)$ زیرگروهی از G است و $M = S \setminus U(S) \neq \phi$ یک ایده ال ماکسیمال از S است. یک ایده ال اول در نیم گروه S هر ایده ال سره P از S است بطوریکه هرگاه a و b عناصری از S باشند بطوریکه $a+b \in P$ بتوان نتیجه گرفت که $a \in P$ یا $b \in P$. ایده ال ماکسیمال یک ایده ال اول S است ([32] را ببینید). فرض کنید I ایده الی از S باشد. مجموعه

$\{a \in S \mid na \in I \quad for \quad some \quad positive \quad integer \quad n\}$ ایده الی از S است و رادیکال I نامیده می شود و با rad(I) نشان داده می شود. یک ایده ال سره I از S اولیه نامیده می شود هر گاه $a+b \in I$، با $a,b \in S$، بیان کند که یا $a \in I$ یا $b \in rad(I)$. اگر I اولیه باشد، آنگاه $P = rad(I)$ ایده الی اول از S است و I یک ایده ال P-اولیه از S نامیده می شود. اگر I و J ایده الهایی از S باشند، آنگاه مجموعه $(I :_S J) = \{a \in S \mid a + J \subseteq I\}$ ایده الی از S می باشد.

یک زیرمجموعه ناتهی T از یک نیم گروه S یک سیستم جمعی از S نامیده می شود هرگاه $0 \in T$ و به ازای هر $a,b \in T$ داشته باشیم $a+b \in T$. قرار دهید $S_T = \{s - t \mid s \in S, t \in T\}$. در اینصورت S_T یک فوق-نیم گروه از S است و نیم گروه خارج قسمتی S نامیده می شود. اگر P ایده ال اولی از S باشد، آنگاه $T = S \setminus P$ یک سیستم جمعی از S است و نیم گروه خارج قسمتی S_T با S_P نشان داده می شود. در سرتاسر این بخش ما فرض می کنیم که S یک نیم گروه با ایده ال ماکسیمال $M = S \setminus U(S) \neq \phi$ می باشد مگر اینکه خلاف آن بیان شود.

فرض کنید S یک نیم گروه با گروه خارج قسمتی G باشد. گوییم S یک نیم گروه ارزیابی است اگر به ازای هر $g \in G$، داشته باشیم $g \in S$ یا $-g \in S$؛ در اینحالت ایده الهای S بطور خطی توسط شمول مرتب شده اند ([32, Lemma 4] را ببینید). گوییم S یک نیم گروه پرافر است اگر به ازای هر ایده ال اول P از S، S_P یک نیم گروه ارزیابی باشد. یک ایده ال از نیم گروه S تحویل ناپذیر نامیده می شود هرگاه، برای ایده الهای J و K از S، از $I = J \cap K$ بتوان نتیجه گرفت $I = J$ یا $I = K$.

1.1 ایده الهای شبه-اولیه

هدف از این فصل توصیف ایده الهای شبه-اولیه یک نیم گروه پرافر S می باشد. یک ایده ال S شبه-اولیه نامیده می شود هرگاه رادیکال آن یک ایده ال اول از S باشد.

لم 1.1.1 فرض کنید I ایده الی از نیم گروه S باشد. آنگاه گزاره های زیر برقرارند:

(1) اگر I شامل یکالی از S باشد آنگاه I=S.

(2) S زیرگروهی از G است اگر و فقط اگر S دقیقا یک ایده ال داشته باشد.

اثبات. **(1)** فرض کنید a عضو یکالی از S باشد بطوریکه $a \in I$. در اینصورت عضوی مانند $b \in S$ وجود دارد بقسمی که $a+b=0$. بنابراین $0=a+b \in I+S=I$. اگر $z \in S$ آنگاه $z=0+z \in I+S=I$ و لذا $I=S$.

(2) فرض کنید S زیرگروهی از G باشد و فرض کنید I ایده الی از S باشد. در اینصورت عضوی مانند $a \in I$ موجود است بطوریکه a یکالی از S است. بنابراین با استفاده از (i) داریم $I=S$. برعکس، کافی است نشان دهیم که هر عضو S یکال است. فرض کنید $c \in S$. در اینصورت $c+S \neq \phi$ ایده الی از S است، بنابراین $c+S=S$. لذا عضوی مانند $d \in S$ وجود دارد بطوریکه $c+d=0$. به سادگی می توان نشان داد که S زیرگروهی از G است.

قضیه 2.1.1 فرض کنید S یک نیم گروه باشد. آنگاه S زیرگروهی از G است اگر و فقط اگر هر ایده ال سره S اول باشد.

اثبات. اگر S زیرگروهی از G باشد، آنگاه نتیجه واضح است. برعکس، فرض کنید a یک عضو ناصفر و وارون ناپذیر از S باشد. با استفاده از فرض، a+a+S=I یک ایده ال اول از S است، بنابراین $a+a \in I$ نتیجه می دهد که $a \in I$. بنابراین $a=a+0=a+a+b$ برای یک $b \in S$، و چون S یک نیم گروه حذفی است، با حذف a می توان نتیجه گرفت که $a+b=0$. در نتیجه a یک یکال است و حکم ثابت است.

لم 3.1.1 فرض کنید I، J و K ایده الهایی از نیم گروه S باشند. آنگاه گزاره های زیر برقرارند:

(1) $I=(I+S_M)\cap S$

(2) $K=I\cap J$ اگر و فقط اگر $K+S_M=(I+S_M)\cap(J+S_M)$.

اثبات. **(1)** چون $I \subseteq (I+S_M)\cap S$ بدیهی است، ما شمول برعکس را ثابت می کنیم. فرض کنید $u \in (I+S_M)\cap S$. عضوی مانند $a \in I$ و $t \in S\setminus M$ وجود دارد بطوریکه $u=a-t$، بنابراین $u+t=a \in I$ و $t+b=0$ برای یک $b \in S$؛ بنابراین $u=u+t+b \in I+S=I$ و حکم ثابت است.

(2) فرض کنید $K=I\cap J$. به وضوح $K+S_M \subseteq (I+S_M)\cap(J+S_M)$. برای شمول برعکس، فرض کنید $z \in (I+S_M)\cap(J+S_M)$. آنگاه عناصری مانند $a \in I, b \in J$ و $t,u \in S\setminus M$ وجود دارند بطوریکه $z=a-t=b-u$، بنابراین $a+u=(a-t)+u+t=(b-u)+u+t=b+t \in I\cap J$ چون t و u عناصر یکال S می باشند؛ بنابراین $z=a-t=(a+u)-(t+u) \in K+S_M$ و حکم ثابت است.
التزام برعکس از (i) نتیجه می شود.

لم 4.1.1 فرض کنید I و J ایده الهایی از نیم گروه S باشند. در اینصورت گزاره های زیر برقرارند:

(1) $rad(I+J)=rad)I)\cap rad(J)=rad(I\cap J)$. بعلاوه $I+J=S$ اگر و فقط اگر $rad(I)+rad(J)=S$.

(2) اگر N یک سیستم جمعی از S باشد، آنگاه $I+S_N=S_N$ اگر و فقط اگر $I\cap N\neq\phi$.

(3) اگر N یک سیستم جمعی از S باشد آنگاه $rad(I+S_N)=rad(I)+S_N$.

اثبات. **(1)** واضح است.

(2) اگر $I+S_N=S_N$ آنگاه $0\in I+S_N$. بنابراین $a-t=0$ برای یک $a\in I$ و $t\in N$؛ بنابراین $a=t\in I\cap N$. برعکس، فرض کنید $u\in I\cap N$. چون u یکالی از S_N است، با استفاده از لم 1.1.1 داریم $I+S_N=S_N$.

(3) چون $rad(I)+S_N\subseteq rad(I+S_N)$ بدیهی است، ما شمول برعکس را ثابت می کنیم . فرض کنید $z\in rad(I+S_N)$. آنگاه عدد صحیح مثبت n وجود دارد بطوریکه $nz\in I+S_N$، بنابراین $nz=a-t$ برای یک $a\in I,t\in N$. با توجه به اینکه $n(z+t)=a+(n-1)t\in I$ داریم $z+t\in rad(I)$. بنابراین $z=z+t-t\in rad(I)+S_N$ و حکم ثابت است.

لم 5.1.1 فرض کنید I ایده الی از S باشد بطوریکه rad(I)=M. آنگاه I یک ایده ال M-اولیه است.

اثبات. با توجه به اینکه $I\subseteq M\neq S$، I یک ایده ال سره S است. فرض کنید $a,b\in S$ باشند بطوریکه $a+b\in I$ ولی $b\notin rad(I)$. چون M ماکسیمال است و $b\notin M$، داریم $M+(b+S)=S$. لذا با استفاده از لم 4.1.1 داریم $I+(b+S)=S$. بنابراین $0=c+(b+s)$ برای $c\in I,s\in S$. بنابراین داریم $a=a+0=a+b+c+s\in I+S=I$ و حکم ثابت است.

گزاره 6.1.1 فرض کنید P ایده ال اولی از نیم گروه S باشد و فرض کنید I یک ایده ال شبه-اولیه از S_P با رادیکال اول Q باشد. در اینصورت $I\cap S$ یک ایده ال شبه-اولیه S با رادیکال اول $Q\cap S$ است.

اثبات. چون Q ایده ال اول S_P است، $Q'=Q\cap S$ ایده الی اول از S است و $Q'\subseteq P$ و $Q'+S_P=Q$ با استفاده از [32, Proposition 2]. بنابراین کافی است نشان دهیم Q' رادیکال $I\cap S$ است. فرض کنید $a\in rad(I\cap S)$. در اینصورت عدد صحیح مثبت n وجود دارد بطوریکه $na\in I$. پس $a\in Q$

و در نتیجه $a \in Q'$. برعکس، اگر $b \in Q'$، آنگاه $mb \in I \cap S$ برای عدد صحیح مثبت m. بنابراین $b \in rad(I \cap S)$ و حکم ثابت است.

گزاره 7.1.1 فرض کنید I یک ایده ال شبه-اولیه از نیم گروه S با رادیکال اول P باشد. آنگاه $I + S_P$ یک ایده ال اولیه (و بنابراین شبه-اولیه) از S_P می باشد. بویژه $(I + S_P) \cap S$ یک ایده ال شبه-اولیه از S می باشد.

اثبات. با استفاده از لم 4.1.1 داریم $rad(I + S_P) = P + S_P$ که با استفاده از [32, Corollary 3] ایده ال ماکسیمالی از S_P است. حال لم 5.1.1 نشان می دهد که $I + S_P$ اولیه است. قسمت آخر از گزاره 6.1.1 نتیجه می شود.

گزاره 8.1.1 هر ایده ال در یک نیم گروه ارزیابی S شبه-اولیه است.

اثبات. فرض کنید I ایده الی از S با رادیکال P باشد. فرض کنید $a,b \in S$ بطوریکه $a + b \in P$. آنگاه عدد صحیح مثبت n وجود دارد بطوریکه $n(a+b) \in I$. چون S یک نیم گروه ارزیاب است، یا $a + S \subseteq b + S$ و یا $b + S \subseteq a + S$. می توان فرض کرد که $a + S \subseteq b + S$. آنگاه عضوی مانند $c \in S$ وجود دارد بطوریکه $a = b + c$. بنابراین $2na = na + nb + nc \in I + S = I$ ؛ ولذا $a \in P$.

قضیه 9.1.1 هر ایده ال در یک نیم گروه پرافر S شبه-اولیه است.

اثبات. فرض کنید I ایده الی از S باشد. با استفاده از قضیه 8.1.1، ایده ال $I + S_M$ از نیم گروه ارزیابی S_M شبه-اولیه است. بنابراین با استفاده از گزاره 6.1.1 و لم 3.1.1 داریم $I = (I + S_M) \cap S$ شبه-اولیه است.

2.1 ایده الهای اولین

در این فصل ما ایده الهای اولین از یک نیم گروه پرافر S را توصیف می کنیم. فرض کنید I ایده الی از S باشد. عضو $s \in S$ نسبت به I اول نامیده می شود هرگاه $r + s \in I$ $(r \in S)$ بیان کند $r \in I$، یعنی $(I : s) = (I : (s)) = I$. ایده ال I اولین نامیده می شود هرگاه عناصری از S که نسبت به I اول نیستند تشکیل یک ایده ال بدهند. ([27] را ببینید).

لم 1.2.1 فرض کنید I ایده الی از نیم گروه S باشد و فرض کنید P مجموعه عناصری از S باشد که نسبت به I اول نیستند. اگر P ایده الی از S باشد آنگاه P اول است.

اثبات. فرض کنید $a,b \in S \setminus P$. در اینصورت $(I:a)=(I:b)=I$. فرض کنید $s \in (I:a+b)$، در اینصورت $a+b+s \in I$ و لذا $s+a \in (I:b)=I$. در نتیجه $s \in (I:a)=I$، پس $(I:a+b)=I$. بنابراین $a+b \in S \setminus P$ و حکم ثابت است.

ملاحظه. اگر I ایده الی اولین از S باشد، بنابر لم 1.2.1، P ایده الی اول از S است که به آن الحاقی اول I می گوییم. در اینحالت همچنین گوییم I یک ایده ال P-اولین است.

حال یک مشخص سازی دیگر برای ایده الهای اولین ارائه می دهیم.

قضیه 2.2.1 برای یک ایده ال I از نیم گروه S، گزاره های زیر معادلند:

(1) I ایده الی اولین با الحاقی اول P است.

(2) اگر $a+b \in I$ و $b \notin I$، آنگاه $a \in P$ و برعکس، اگر $a \in P$ عضوی مانند $b \in S \setminus I$ وجود دارد که $a+b \in I$.

اثبات. $(1) \Rightarrow (2)$ فرض کنید $a+b \in I$ و $b \notin I$. پس $b \in (I:a)-I$، بنابراین a نسبت به I اول نیست و لذا $a \in P$. اگر $a \in P$، آنگاه با توجه به اولین بودن I داریم $I \subset (I:a)$، بنابراین عضوی مانند b از $(I:a)$ وجود دارد که در I نیست. پس $a+b \in I$ و $b \notin I$.

$(2) \Rightarrow (1)$ کافی است نشان دهیم $P+S \subseteq P$. فرض کنید $x+y \in P+S$ که در آن $x \in P$ و $y \in S$. در اینصورت با استفاده از (ii)، $c \notin I$ وجود دارد بطوریکه $x+c \in I$. لذا $x+y+c \in I$ با $c \notin I$. بنابراین با استفاده از (ii) داریم $x+y \in P$ و حکم ثابت است.

قضیه 3.2.1 فرض کنید Q یک ایده ال P-اولیه از نیم گروه S باشد و فرض کنید $a \in S$. آنگاه گزاره های زیر برقرارند:

(1) اگر $a \in Q$، آنگاه $(Q:a)=S$.

(2) اگر $a \notin Q$، آنگاه $(Q:a)$، P-اولیه است.

(3) اگر $a \notin P$، آنگاه $(Q:a)=Q$.

اثبات. اثبات کاملا سرراست است.

گزاره 4.2.1 فرض کنید Q یک ایده ال P-اولیه از نیم گروه S باشد. در اینصورت Q اولین است.

اثبات. کافی است نشان دهیم مجموعه عناصری از S که نسبت به Q اول نیستند دقیقا P است. فرض کنید s عضوی از S باشد که نسبت به Q او ل نیست، پس $Q \subset (Q:s)$ ؛ بنابراین عضوی مانند $a \notin Q$ وجود دارد بطوریکه $a+s \in Q$. بنابراین از اولیه بودن Q می توان نتیجه گرفت که $s \in P$. برعکس، اگر $s \in P$ ، آنگاه با استفاده از لم 3.2.1 داریم $(Q:s)=Q$ و حکم ثابت می شود.

گزاره 5.2.1 فرض کنید I یک ایده ال Q-اولین از نیم گروه S باشد، و فرض کنید P یک ایده ال اول دلخواه از S باشد. گزاره های زیر برقرارند:

(1) اگر $Q \subseteq P$ ، آنگاه $I=(I+S_P)\cap S$.

(2) اگر $Q \not\subset P$ ، آنگاه $I \subset (I+S_P)\cap S$.

اثبات. (1) به وضوح $I \subseteq (I+S_P)\cap S$. برای شمول دیگر، عضوی مانند $x \in (I+S_P)\cap S$ را انتخاب کنید. آنگاه $x=c-d \in S$ برای یک $c \in I$ و $d \notin P$. بنابراین، $x+d=c \in I$. با توجه به اینکه $d \notin Q$ ، d نسبت به I اول است. بنابراین $x \in I$.

(2) چون $Q \not\subset P$ ، عضوی مانند $y \in Q$ وجود دارد که $y \notin P$ ف بنابراینبا استفاده از قضیه 2.2.1، عضوی مانند $u \notin I$ وجود دارد بطوریکه $y+u \in I$. آنگاه $u=(y+u)-y \in (I+S_P)\cap S$ اما $u \notin I$ ، نشان می دهد که $I \subset (I+S_P)\cap S$.

نتیجه 6.2.1 فرض کنید I یک ایده ال Q-اولین از نیم گروه S باشد و فرض کنید T نیم گروه خارج قسمتی S باشد. در اینصورت یا $I=(I+T)\cap S$ و یا $I \subset (I+T)\cap S$.

اثبات. با استفاده از [32, Proposition 2]، ایده ال اول P از S وجود دارد بطوریکه $T=S_P$. حال نتیجه از گزاره 5.2.1 بدست می آید.

گزاره 7.2.1 فرض کنید P ایده الی اول از نیم گروه S باشد و فرض کنید I یک ایده ال Q-اولین از S_P باشد. آنگاه $I \cap S$ یک ایده ال اولین از S با الحاقی اول $Q \cap S$ است.

اثبات. چون Q یک ایده ال اول S_P است، $Q'=Q\cap S$ ایده ال اولی از S است، $Q' \subseteq P$ و با استفاده از [32, Proposition 2] داریم $Q'+S_P=Q$. تنها کافی است نشان دهیم که Q' دقیقا مجموعه عناصری از S است که نسبت به $I\cap S$ اول نیستند. اگر $z \notin Q\cap S$ ، آنگاه $z \notin Q$. بنابراین $(I:_{S_P} z)=I$. آنگاه نتیجه می شود که $(I\cap S:z)=I\cap S$ ؛ بنابراین با استفاده از قضیه 2.2.1 چنین zای نسبت به $I\cap S$ اول

است. اگر $z \in Q \cap S$ ، آنگاه $z \in Q$ ، بنابراین $u \in S_P$ وجود دارد بطوریکه $z+u \in I$ و $u \notin I$. می توان نوشت $u = x - y$ برای یک $x \in S$ و $y \in S \setminus P$. اگر $x \in I$ ، آنگاه $x = u + y \in I$ با $y \notin Q$ ، پس $u \in I$ که یک تناقض است. پس می توان فرض کرد که $x \notin I$. حال $z+u \in I$ بیان می کند که $x + x \in I \cap S$ ، یعنی $x \in (I \cap S : z)$ اما $x \notin I$ ف و بنابراین z نسبت به $I \cap S$ اول نیست.

نتیجه 8.2.1 فرض کنید T یک نیم گروه خارج قسمتی از S باشد و فرض کنید I یک ایده ال Q-اولین از T باشد. آنگاه $I \cap S$ یک ایده ال اولین S با الحاقی اول $Q \cap S$ است.

اثبات. از [32, Proposition 2] و گزاره 7.2.1 نتیجه می شود.

گزاره 9.2.1 فرض کنید I ایده الی از نیم گروه S باشد بطوریکه برای یک $a \in S - I$ ، $(I : a) = P$ ایده الی اول از S باشد. در اینصورت $(I + S_P) \cap S$ یک ایده ال P-اولین از S است.

اثبات. قرار دهید $J = (I + S_P) \cap S$. ابتدا نشان می دهیم $(J : a) = P$. اگر $t \in P = (I : a)$ ، آنگاه $t + a \in I \subseteq J$ ، بنابراین $t \in (J : a)$. برای شمول برعکس، فرض کنید $u \in (J : a)$ ، بنابراین $u + a = c - d \in J$ برای یک $c \in I$ و $d \notin P$. بنابراین $u + a + d = c \in I$. از آنجا $u + d \in (I : a) = P$ و بنابراین از اول بودن P داریم $u \in P$. چون $P \neq S$ ، داریم $a \notin J$. در نتیجه، هر عضو واقع در P نسبت به J اول نیست.

حال نشان می دهیم $b \notin P$ نسبت به J اول است. به وضوح $J \subseteq (J : b)$. فرض کنید $c \in (J : b)$ ، بنابراین $c + b = e - f \in J$ برای یک $e \in J$ و $f \notin P$. پس چون $b + f \notin P$ ، داریم $c = e - (b + f) \in J$. لذا $J = (J : b)$ و حکم ثابت است.

لم 10.2.1 اگر S یک نیم گروه باشد، آنگاه هر ایده ال تحویل ناپذیر از S، اولین است.

اثبات. فرض کنید I ایده الی تحویل ناپذیر از S باشد و فرض کنید P مجموعه عناصری از S باشد که نسبت به I اول نیستند. کافی است نشان دهیم $P + S \subseteq P$. فرض کنید $a + s \in P + S$ که در آن $a \in P$ و $s \in S$. چون $a \in P$ ، داریم $I \subset (I : a)$. به وضوح $I \subseteq (I : a) \cap (I : s) \subseteq (I : a + s)$. اگر $I = (I : a) \cap (I : s)$ آنگاه با توجه به تحویل ناپذیر بودن I داریم $I = (I : s)$. فرض کنید $t \in (I : a + s)$. آنگاه $t + a \in (I : s) = I$ و لذا $t \in (I : a)$ و بنابراین $I \subset (I : a) = (I : a + s)$. اگر $I \neq (I : a) \cap (I : s)$ ، آنگاه دوباره داریم $I \subset (I : a + s)$ ، یعنی $a + s$ نسبت به I اول نیست و لذا $a + s \in P$.

گزاره 11.2.1 فرض کنید I ایده الی از نیم گروه پرافر S باشد. آنگاه I تحویل ناپذیر است اگر و فقط اگر اولین باشد.

اثبات. با استفاده از لم 10.2.1، کافی است نشان دهیم که اگر I یک ایده ال P-اولین از S باشد، آنگاه I تحویل ناپذیر است. اگر $I = J \cap K$ برای ایده الهای J و K، آنگاه با استفاده از لم 3.1.1 داریم $I + S_M = (J + S_M) \cap (K + S_M)$. چون S_M یک نیم گروه ارزیابی است، یا $I + S_M = J + S_M$ و یا $I + S_M = K + S_M$. چون M شامل P است، اگر $I + S_M = J + S_M$، آنگاه گزاره 5.2.1 بیان می کند که $I = (I + S_M) \cap S = (J + S_M) \cap S$. بنابراین $J \subseteq (J + S_M) \cap S = I$. در حالتی که $I + S_M = K + S_M$، به طور مشابه می توان نشان داد که $I = K$. بنابراین I تحویل ناپذیر است.

گزاره 12.2.1 فرض کنید I ایده الی از نیم گروه ارزیابی S باشد. در اینصورت I یک ایده ال اولین S با الحاقی اول $P = \{a \in S \mid (a + S) + I \subset I\}$.

اثبات. فرض کنید $I = J \cap K$ برای ایده الهای J و K از S. چون S یک نیم گروه ارزیابی است، پس یا $J \subseteq K$ و یا $K \subseteq J$. پس یا $I = J$ و یا $I = K$. بنابراین I تقلیل ناپذیر است و لذا با استفاده از گزاره 10.2.1، I اولین است. ابتدا نشان می دهیم P ایده الی از S است. فرض کنید $a + s \in P + S$ که در آن $a \in P$ و $s \in S$. آنگاه $(a + S) + I \subset I$ و لذا $(a + s) + S + I \subseteq (a + S) + I \subset I$. بنابراین $a + s \in P$ و P ایده الی از S است. حال نشان می دهیم که P اول است. فرض کنید $x + y \in P$ و $x \notin P$. آنگاه $(x + S) + I = I$ و $(y + S) + I = (x + y + S) + I \subset I$. پس $y \in P$. کافی است نشان دهیم P دقیقا مجموعه عناصری از S است که نسبت به I اول نیستند. اگر $u \in P$، آنگاه $(u + S) + I \subset I \subseteq (I : u)$. فرض کنید $(I : u) = I$. اگر $v \in (I : u) = I$، آنگاه $u + v \in I$، پس $v \in (u + S) + I$. بنابراین $I = (u + S) + I$ که یک تناقض است. پس حکم ثابت است.

نتیجه 13.2.1 فرض کنید T یک فوق-نیم گروه از نیم گروه ارزیابی S باشد. آنگاه هر ایده ال از T اولین است.

اثبات. از [32, Lemma4] و گزاره 12.2.1 بدست می آید.

قضیه 14.2.1 در یک نیم گروه پرافر S، هر ایده ال اولین است.

اثبات. اگر I ایده الی از S باشد، آنگاه با استفاده از لم 3.1.1 داریم $I = (I + S_M) \cap S$. پس با استفاده از گزاره 12.2.1، $I + S_M$ ایده الی اولین از S_M است. حال نتیجه از گزاره 7.2.1 بدست می آید.

نتیجه 15.2.1 فرض کنید I ایده الی از یک نیم گروه پرافر S باشد. آنگاه I اولین (یا شبه-اولیه) است اگر و فقط اگر I اولیه باشد.

اثبات. از قضیه 9.1.1 و قضیه 14.2.1 نتیجه می شود.