مازندران

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان :

سه جواب ضعیف برای مسائل دیریکله بیضوی

استاد راهنما:

دکتر قاسم علیزاده افروزی

استاد مشاور:

دکتر سمیه خادملو

نگارش:

طاهره نوروزی قرا

شهریور ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم و همسر مهربانم

قدردانی

من لم یشکر المخلوق، لم یشکر الخالق

سپاس و ثنا یگانه خالقی را که ذات وجودم در تلألو حضورش نورانی می شود و نگاه خسته ام از جوشش مهرش جان می گیرد. سپاس می گویم او را که یگانه ترین در عظمت، تنهاترین در اوج و پاک ترین در وجود است.

اکنون که به لطف حق تعالی نگارش این پایان نامه به اتمام رسیده، وظیفه خود می دانم مراتب سپاسگزاری خویش را حضور:

- استاد ارجمندم جناب آقای دکتر علیزاده به عنوان استاد راهنما چون چراغی روشنگر راهم بودند و با راهنمایی های ارزشمند خود در انجام هر چه بهتر این پژوهش مرا یاری نمودند،
- سرکار خانم دکتر خادملو به عنوان استاد مشاور،
- کلیه اساتید گروه ریاضی دانشگاه که از محضرشان کسب علم نمودم،
- اساتید بزرگوار آقایان دکتر تقوی و دکتر علیمحمدی که زحمت داوری این پایان نامه را تقبل فرمودند،
- تمامی دوستان عزیزی که با محبت های صادقانه شان همراهم بودند،

اعلام نمایم.

مقدمه

ریاضیات علم نظم است و موضوع آن یافتن، توصیف و درک نظمی است که در وضعیت‌های ظاهرا پیچیده نهفته است و ابزارهای اصولی این علم ، مفاهیمی هستند که ما را قادر می‌سازند تا این نظم را توصیف کنیم. علم ریاضی، قانونمند کردن تجربیات طبیعی است که در گیاهان و بقیه مخلوقات مشاهده می‌کنیم . گالیله می گوید : " جهان هستی همواره در برابر دیدگان حیرت زده انسان گسترده خواهد ماند و انسان هرگز نمی تواند آنرا درک کند مگر اینکه زبانی را که این جهان با آن نوشته و توضیح داده شده است یاد بگیرد و حروف آنرا بشناسد. این زبان چیزی جز ریاضیات نیست و این حروف جز مثلث، دایره و سایر اشکال هندسی چیز دیگری نیستند. بدون این زبان انسان حتی یک کلمه از جهان هستی را نخواهد فهمید و همواره گمشده ای را ماند که در کوچه های پر پیچ و خم سرگردان است."

علوم ریاضیات این تجربیات را دسته‌بندی و قانونمند کرده و همچنین توسعه می‌دهند. در میان شاخه های مختلف علم ریاضی، آنالیز غیر خطی یکی از مهمترین و شاخص ترین آن می باشد. موفقیت این رشته به دلیل کاربرد وسیعی است که در علوم مختلف فیزیک، مهندسی مکانیک، کوانتوم، فرآیندهای شیمیایی و اقتصاد دارد. در واقع در مدل بندی بسیاری از پدیده های طبیعی، به نحوی به یک معادله دیفرانسیل جزئی بر می خوریم.

چکیده

در فصل اول این پایان نامه، مفاهیم و تعاریف اولیه مورد نیاز را بیان نموده ایم. در فصل دوم قضایای سه نقطه بحرانی و ساختاری از مجموعه بحرانی ارائه شد که در فصل های بعدی کاربرد های آن را برای وجود جواب برای مسائل مقدار مرزی بررسی کردیم. سپس وجود سه جواب ضعیف را برای مسئله دیریکله بیضوی زیر

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x,u) & in\ \Omega \\ u = 0 & on\ \partial\Omega \end{cases}$$

جایی که Ω زیر مجموعه باز، کراندار و ناتهی از فضای اقلیدسی $(R^N, |.|)$، $N \geqslant 3$، با مرز از رده C^1، λ یک پارامتر مثبت و $f : \Omega \times R \longrightarrow R$ یک تابع است، را ثابت می کنیم. در خاتمه، وجود حداقل سه جواب ضعیف را برای دستگاه مقدار مرزی زیر به اثبات می رسانیم:

$$\begin{cases} -\triangle_p u + a(x)|u|^{p-2}u = \lambda F_u(x,u,v) & in\ \Omega, \\ -\triangle_q v + b(x)|v|^{q-2}v = \lambda F_v(x,u,v) & in\ \Omega, \\ u = v = 0 & on\ \partial\Omega \end{cases}$$

جایی که $\Omega \subset R^N$، $(N \geqslant 1)$ یک مجموعه باز، کراندار و ناتهی با مرز هموار $\partial\Omega$، $p,q > N$ و $F : \Omega \times R^2 \longrightarrow R$ یک تابع است به طوری که $F(.,t_1,t_2)$ در $\overline{\Omega}$ برای هر $(t_1,t_2) \in R^2$ پیوسته است و $F(x,.,.)$ در R^2 برای هر $x \in \Omega$ از رده C^1 است، و F_s نشان دهنده مشتق جزئی F نسبت به s است.

$\Delta_s u = div(|\nabla u|^{s-2}\nabla u)$ عملگر s لاپلاسین است، $a,b \in L^\infty(\Omega)$ با $ess\ inf_\Omega a \geqslant 0$ و $ess\ inf_\Omega b \geqslant 0$، و λ یک پارامتر مثبت است.

کلمات کلیدی: نقاط بحرانی، روش تغییراتی، مسئله دیریکله، سه جواب ضعیف.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی

۱.۱ پیشگفتار

در این فصل مفاهیم پایه مورد نیاز را بیان نموده و در ادامه مروری گذرا بر فضاهای باناخ، هیلبرت، L^p و سوبولف و قضایایی مرتبط به آنها خواهیم داشت. شایان ذکر است تمامی مطالب این فصل از کتب و مقالات معتبر گردآوری شده است.

تعریف ۱.۱.۱ ***(دامنه) :***

فرض کنید R^n یک فضای اقلیدسی n ـ بعدی با نقاط $x = (x_۱, ..., x_n)$ که $x_i \in R$ و $\| x \|^۲ = \sum_{i=۱}^{n} x_i^۲$ باشد. در این صورت $\Omega \subset R^n$ را یک دامنه گوییم هرگاه باز و همبند باشد.

تعریف ۱.۲.۱

مجموعه همه توابع پیوسته روی Ω را با $C(\Omega)$نشان می دهیم. برای $k \in N$ ، $C^k(\Omega)$ مجموعه توابعی هستند که همه مشتقات تا مرتبه $k-$ ام آنها روی Ω پیوسته است. $C^\infty(\Omega)$کلاس همه توابعی است که برای هر عدد طبیعی k متعلق به $C^k(\Omega)$ باشد. به همین ترتیب توابع را C^k ـتکه ای نامیم هرگاه این توابع تا k مرتبه مشتق پذیر بوده و مشتق kام آن حداکثر در تعداد متناهی نقطه ناپیوسته باشد.

تعریف ۱.۳.۱

محمل یک تابع پیوسته f روی R^N به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$Supp\ f = \overline{\{x \in R^N : f(x) \neq ۰\}} = K$$

یعنی برای هر $x \in R^N$، اگر $x \notin K$ آنگاه $f(x) = ۰$. همانطور که می‌دانیم (طبق قضیه هاینه ـ برل) مجموعه‌های بسته و کراندار در R^N فشرده می‌باشند، بنابراین اگر محمل f کراندار باشد گوییم f دارای محمل فشرده است. فضای همه توابع پیوسته f که محمل فشرده دارند را با $C_۰(R^N)$ نمایش می‌دهیم. مشابهاً $C_۰(\Omega)$ نشان‌دهنده توابع پیوسته روی

Ω می باشد که محمل آنها یک زیرمجموعه فشرده از Ω است. همچنین $C_\circ^k(\Omega)$ نیز به طریق مشابه قابل تعریف است.

تعریف ۱.۴.۱ (*تابع آزمون*[۱۵]) :

تابع f، تعریف شده روی مجموعه باز غیرتهی $\Omega \subset R^n$ را یک تابع آزمون نامند، هرگاه $f \in C^\infty(\Omega)$ و یک مجموعه فشرده مانند $K \subset \Omega$، موجود باشد به طوری که محمل f در K قرار داشته باشد. مجموعه این توابع را با $C_\circ^\infty(\Omega)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱.۵.۱ (*مجموعه و توابع اندازه پذیر*[۲۳]) :

فرض کنیم Ω یک دامنه کراندار در R^n و μ اندازه لبگ در R^n باشد. مجموعه هایی را که روی آنها μ خوش تعریف است را مجموعه های اندازه پذیر گوییم. تابع f را که برای آنها مجموعه $\{x \in R^n; f(x) < \alpha\}$ برای هر عدد حقیقی α، یک مجموعه اندازه پذیر باشد را تابع اندازه پذیر نامیم.

لم ۱.۶.۱ : [۲۴]

اگر $1 \leq p < \infty$ و $a, b \geq 0$، آنگاه $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$.

تعریف ۱.۷.۱ (*فضای* $L^P(\Omega)$) :

فرض کنید Ω یک دامنه کراندار در R^n و $1 \leq p < \infty$، همچنین u یک تابع اندازه‌پذیر و تعریف شده روی Ω باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\| u \|_p = \left(\int_\Omega | u(x) |^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

در این صورت $L^p(\Omega)$ را متشکل از همه u هایی می‌گیریم که برای آنها داشته باشیم:

$$\| u \|_p < \infty.$$

$\| u \|_p$ را نرم L^p تابع u می‌نامیم. در $L^p(\Omega)$ توابعی را یکی می‌گیریم که به طور تقریباً همه جا، با هم برابر باشند. یعنی اندازه مجموعه نقاطی که با هم برابر نیستند، برابر صفر

باشد. گوییم $u=0$ در $L^p(\Omega)$، هرگاه $u(x)=0$ به طور تقریباً همه جا در Ω. به وضوح اگر $u\in L^p(\Omega)$ و $c\in R$ آنگاه $cu\in L^p(\Omega)$. به علاوه اگر $u,v\in L^p(\Omega)$ آنگاه با توجه به لم (۱.۱.۶) داریم:

$$\mid u(x)+v(x)\mid^p\leq(\mid u(x)\mid+\mid v(x)\mid)^p\leq 2^{p-1}(\mid u(x)\mid^p+\mid v(x)\mid^p),$$

یعنی $u+v\in L^p(\Omega)$. لذا $L^p(\Omega)$ یک فضای برداری است.

تعریف ۱.۸.۱ (انتگرال پذیری موضعی تابع f روی دامنه Ω) :

$L^1(\Omega)$ را گردایه تمام توابع اندازه پذیر تعریف شده مانند f روی قلمرو Ω در نظر می گیریم که:

$$\int_\Omega |f|dx<\infty.$$

اغلب اوقات با توابعی که به طور موضعی انتگرال پذیر هستند مواجه می شویم یعنی توابعی که روی هر زیر مجموعه فشرده از Ω ، انتگرال پذیر هستند و لزومی ندارد که روی خود Ω انتگرال پذیر باشند، مجموعه همه چنین توابعی را با $L^1_{loc}(\Omega)$ نشان می دهیم.چون توابع پیوسته روی مجموعه‌های فشرده مقدار ماکزیمم و مینیمم خود را اختیار می‌کنند، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که

$$\begin{cases} C_0(\Omega)\subset L^1(\Omega)\\ C(\Omega)\subset L^1_{loc}(\Omega).\end{cases}$$

تعریف ۱.۹.۱ (سوپریمم اساسی) :

فرض کنید u یک تابع اندازه‌پذیر روی Ω باشد. گوییم u به طور اساسی کراندار است، هرگاه یک ثابت $\alpha\in R$ وجود داشته باشد به طوری که رابطه $\mid u(x)\mid\leq\alpha$ به طور تقریباً همه جا در Ω برقرار باشد. به بزرگترین کران پایین (اینفیمم) چنین αهایی سوپریمم اساسی می‌گوییم و آن را با نماد زیر نمایش می‌دهیم:

$$ess\ \sup_{x\in\Omega}|u(x)|=inf\{\alpha:\mu(\{x:|u(x)|>\alpha\})=0\}$$

تعریف ۱.۱۰.۱ تعریف (فضای $L^{\infty}(\Omega)$) :

$L^{\infty}(\Omega)$ فضای برداری متشکل از همه توابعی است که سوپریمم اساسی آنها کراندار باشد. نرم در این فضا به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\| u \|_{\infty} = ess \sup_{x \in \Omega} | u(x) | .$$

تعریف ۱.۱۱.۱ تعریف (فضای $L^{p}_{loc}(\Omega)$) :

برای $۱ \leq p \leq \infty$، $L^{p}_{loc}(\Omega)$ عبارتست از توابع حقیقی مقدار و اندازه پذیر u روی Ω به طوری که برای هر زیرمجموعه فشرده K از Ω داشته باشیم:

$$\int_{K} | u(x) |^{p} \, dx < \infty.$$

قضیه ۱.۱۲.۱ (نامساوی هولدر[۱۵]) :

اگر $۱ < p, q < \infty$، $u \in L^{p}(\Omega)$ ، $v \in L^{q}(\Omega)$ و $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$ آنگاه : $uv \in L^{۱}(\Omega)$ و نیز

$$\| uv \|_{۱} \leq \| u \|_{p} \| v \|_{q}$$

قضیه ۱.۱۳.۱ (نامساوی مینکوفسکی[۱۵]) :

اگر $۱ < p < \infty$، u, v از $L^{p}(\Omega)$ باشند آنگاه $u + v \in L^{p}(\Omega)$ و

$$\| u + v \|_{p} \leq \| u \|_{p} + \| v \|_{p}$$

قضیه ۱.۱۴.۱ (نامساوی یانگ[۱۵]) :

اگر $۱ < p, q < \infty$، $u \in L^{p}(\Omega)$، $v \in L^{q}(\Omega)$ و $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$ آنگاه:

$$||u||_{p} ||v||_{q} \leqslant \frac{||u||_{p}^{p}}{p} + \frac{||v||_{q}^{q}}{q}.$$

تعریف ۱.۱۵.۱ (تابع کاراتئودوری[۱۵]) :

فرض کنید $\Omega \subset R^{N}$ یک دامنه باشد، گوییم تابع $\begin{cases} f : \Omega \times R^{N} \to R \\ (x, u) \to f(x, u) \end{cases}$ در شرط کاراتئودوری صدق می‌کند، هرگاه

(۱) نگاشت $u \to f(x,u)$ برای تقریباً همه x های در Ω پیوسته باشد،

(۲) نگاشت $x \to f(x,u)$ برای هر u اندازه‌پذیر باشد.

تعریف ۱.۱۶.۱ (مجموعه محدب) :

مجموعه $E \subset R^N$ را محدب گویند، هرگاه به ازای هر $x, y \in E$ و هر $۰ < t < ۱$

$$tx + (۱ - t)y \in E.$$

تعریف ۱.۱۷.۱ (تابع محدب) :

تابع حقیقی تعریف شده در (a,b) را محدب گویند هرگاه به ازای هر $x, y \in (a,b)$ و هر $۰ < t < ۱$ داشته باشیم:

$$f(tx + (۱ - t)y) \leqslant tf(x) + (۱ - t)f(y).$$

۲.۱ فضاهای باناخ و هیلبرت

تعریف ۲.۱.۱ ***(فضای خطی نرمدار،فضای باناخ) :***

فضای برداری X را یک «فضای خطی نرمدار» نامیم، هرگاه نرم روی X که با نگاشت $\begin{cases} \| \cdot \| : X \to R \\ x \to \| x \| \end{cases}$ معرفی می‌شود دارای شرایط زیر باشد:

۱) $\| x \| \geqslant ۰$ *برای هر* $x \in X$ و $\| x \| = ۰$ *اگر و تنها اگر* $x = ۰$،

۲) $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$ *برای هر* $x \in X$ و هر $\alpha \in R$،

۳) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ *برای هر* $x, y \in X$.

یک فضای خطی X*، تحت متر تعریف شده در زیر یک فضای متریک می‌باشد:*

$$d(x,y) = \| x - y \| \quad ; \quad \forall x, y \in X$$

در نتیجه یک دنباله $\{x_n\} \subset X$ *همگرا به عنصر* $x \in X$ *است، هرگاه*

$$\| x_n - x \| \to ۰ \quad as \quad n \to \infty.$$

همچنین $\{x_n\}$ *یک دنباله کوشی است هرگاه* $\| x_m - x_n \| \to ۰$ *وقتی که* $m, n \to \infty$.

فضای باناخ یک فضای خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به وسیله نرمش تام (کامل) باشد، یعنی هر دنباله کوشی در X *با متر تعریف شده به وسیله نرمش به نقطه‌ای از* X *همگرا باشد.*

تعریف ۲.۲.۱ ***(توابع موضعا لیپ شیتز پیوسته) :***

اگر X *یک فضای باناخ حقیقی باشد،* $h : X \to R$ *لیپ شیتز موضعی نامیده می شود وقتیکه برای هر* $x \in X$ *یک همسایگی* V_x *از* x *و یک ثابت* $L_x \geqslant ۰$ *ای باشد که*

$$| h(z) - h(w) | \leq L_x \| z - w \|, \qquad \forall z, w \in V_x$$

تعریف ۲.۳.۱ (فضای ضرب داخلی و هیلبرت) :

فضای برداری (حقیقی) H را یک فضای ضرب داخلی نامیم، هرگاه به هر زوج مرتب از بردارهای x,y در H یک عدد حقیقی مانند $\langle x,y\rangle$ به نام حاصلضرب داخلی x,y چنان مربوط شده باشد که قواعد زیر برقرار باشد:

۱) برای هر $x,y \in H$ ، $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ ،

۲) برای هر $\lambda_۱,\lambda_۲ \in R$ و هر $x_۱,x_۲,y \in H$ داشته باشیم:

$$\langle \lambda_۱ x_۱ + \lambda_۲ x_۲, y\rangle = \lambda_۱\langle x_۱,y\rangle + \lambda_۲\langle x_۲,y\rangle$$

۳) برای هر $x \in H$ ، $\langle x,x\rangle \geq ۰$ ،

۴) $x = ۰$ اگر و تنها اگر $\langle x,x\rangle = ۰$.

بنابر (۳) می توان $\| x \|$ ، یعنی نرم بردار $x \in H$ را ریشه دوم نامنفی $\langle x,x\rangle$ تعریف کرد، یعنی:

$$\| x \| = \langle x,x\rangle^{\frac{۱}{۲}} \quad ; \quad \forall x \in H$$

در این صورت به وضوح شرایط (۱) و (۲) در تعریف (۱.۲.۱) برقرارند. برای اثبات نامساوی مثلثی، مطابق نامساوی کوشی ـ شوارتز، به ازای هر $x,y \in H$ داریم:

$$| \langle x,y\rangle | \leq \| x \| \| y \| .$$

همچنین به کمک نامساوی $| \langle x,y\rangle | \leq \langle x,y\rangle$ بدست خواهیم آورد:

$$\| x+y \|^۲ = \langle x+y, x+y\rangle = \| x \|^۲ + ۲\langle x,y\rangle + \| y \|^۲ \leq (\| x \| + \| y \|)^۲$$

لذا

$$\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$$

بنابراین تمام اصول موضوع یک فضای خطی نرمدار برقرار می‌باشد، لذا فضای ضرب داخلی H یک فضای خطی نرمدار نیز است. هرگاه این فضای ضرب داخلی تام (کامل) باشد آن را یک فضای هیلبرت می‌گویند.

قضیه ۲.۴.۱ (*کامل بودن L^p* [۱]) :

$L^p(\Omega)$ به ازای $1 \leq p \leq \infty$ و هر دامنه Ω در R^N یک فضای باناخ است، به علاوه اگر $p = 2$ آنگاه $L^2(\Omega)$ یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی زیر می‌باشد:

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega uv\, dx.$$

۳.۱ عملگرهای خطی

تعریف ۳.۱.۱ (*نگاشت خطی، تابعک خطی*) :

فرض کنید X و Y فضاهای برداری باشند، نگاشت $f : X \to Y$ را خطی گوییم هرگاه

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \quad \forall x, y \in X,\ \forall \alpha, \beta \in R$$

نگاشت خطی از X به میدان اسکالر، تابعک خطی نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱ (*فضای دوگان* [۱۸]) :

فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد، در این صورت خانواده همه تابعک‌های خطی و کراندار روی X با نرم

$$\| f \| = \sup_{x \neq 0, x \in X} \frac{| f(x) |}{\| x \|}$$

را دوگان فضای X نامیده و با X^* نمایش می‌دهند، که خود یک فضای باناخ است.

تعریف ۳.۳.۱ (*فضای باناخ انعکاسی* [۱۸]) :

فضای باناخ X را انعکاسی می نامیم هرگاه ایزومتری $x \to l_x$ از $X \to X^{**}$ تعریف شده با ضابطه $l_x(y) = y(x)$ پوشا باشد. که در آن y تابعک خطی روی X است. منظور

از ایزومتری، یعنی یک عملگر خطی دو سوئی که نرم را حفظ می کند به عبارت دیگر، یعنی به ازای هر $x \in X$، داشته باشیم $||l_x|| = ||x||$. (به زبان ساده تر فضای باناخ X را انعکاسی نامیم هرگاه داشته باشیم $X = X^{**}$).

تعریف ۳.۴.۱ (فضای باناخ جداپذیر[۲۸]) :

فضای باناخ X را جداپذیر گوییم هرگاه زیر مجموعه چگال شمارش پذیر داشته باشد.

تعریف ۳.۵.۱ (همگرایی ضعیف) :

فرض کنید X یک فضای باناخ باشد، دنباله $\{x_n\}$ از X، همگرای ضعیف به عنصر $x \in X$ است هرگاه

$$h(x_n) \to h(x); \quad \forall h \in X^*.$$

تعریف ۳.۶.۱ (همگرایی قوی) :

فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد، در این صورت دنباله $\{x_n\} \subset X$ را به عنصر $x \in X$ همگرای قوی گویند هرگاه

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - x \| = ۰.$$

قضیه ۳.۷.۱ (خواص اساسی همگرای ضعیف [۱۸]) :

فرض کنید X یک فضای باناخ باشد، در این صورت داریم :

۱) اگر $x_n \to x$ همگرای ضعیف باشد، آنگاه حد ضعیف x، یکتاست.

۲) اگر $x_n \to x$ همگرای ضعیف باشد، آنگاه هر زیردنباله از $\{x_n\}$ نیز به x همگرای ضعیف است.

۳) اگر $x_n \to x$ همگرای ضعیف باشد، آنگاه $\{\| x_n \|\}$، کراندار است.

۴) اگر $x_n \to x$ همگرای قوی باشد، آنگاه $x_n \to x$ همگرای ضعیف است.

۵) اگر $x_n \to x$ همگرای ضعیف باشد و $dim\ X < \infty$، آنگاه $x_n \to x$ همگرای قوی است.

۶) *اگر* $x_n \to x$ *همگرای ضعیف باشد، آنگاه* $\|x\| \leq \lim\inf_{n\to\infty} \|x_n\|$

تعریف ۳.۸.۱ (پیوستگی) :

فرض کنید X و Y فضاهای نرمدار روی K باشند. عملگر

$$A : M \subseteq X \longrightarrow Y$$

را پیوسته گوییم اگر برای هر $u \in M$ داشته باشیم

$$\forall\, \varepsilon > ۰ \quad \exists\, \delta(\varepsilon, u) > ۰$$

به طوری که

$$\|v - u\| < \delta(\varepsilon, u);\ v \in M \implies \|Av - Au\| < \varepsilon.$$

اگر عدد $\delta(\varepsilon, u) > ۰$ به نقطه $u \in M$ بستگی نداشته باشد عملگر A را پیوسته یکنواخت نامیم.

عملگر A را پیوسته دنباله ای گوییم اگر برای دنباله $\{u_n\}$ در M ،

$$lim_{n\to\infty} u_n = u;\ u \in M \implies lim_{n\to\infty} Au_n = Au.$$

تعریف ۳.۹.۱ (نیم پیوستگی پایینی[۲۳]) :

فرض کنیم f یک تابع حقیقی بر یک فضای توپولوژیک باشد. اگر مجموعه $\{x : f(x) > a\}$ به ازای هر aی حقیقی، باز باشد، گوییم f نیم پیوسته ی پایینی است.

تعریف ۳.۱۰.۱ (نیمه پیوسته ضعیف پایینی دنباله ایی) :

تابعک F روی فضای باناخ X نیم‌پیوسته ضعیف پایینی دنباله ای است هرگاه

$$F(u) \le \liminf_{n\to\infty} F(u_n)$$

وقتی که $u_n \to u$ بطور ضعیف در X.

با توجه به قضیه قبل نرم روی یک فضای باناخ، نیم‌پیوسته ضعیف پایینی دنباله ای می‌باشد.