دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)

عنوان

روش گلرکین گسسته در حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم با هسته منفرد ضعیف

تدوین

پریا حاجی آقائی جم

اساتید راهنما

دکتر اسماعیل بابلیان
دکتر شهنام جوادی

دی ۱۳۸۷

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

پدر عزیز و مادر مهربانم

و به دستهای پر از مهر آنان که درخت جوانی ام را شکوفا نمودند و اینک به پاس آن همه ایثار ثمره تلاشم را به قلبهای مهربانشان تقدیم می کنم

تقدیر و تشکر

- با تقدیم به تو که در تمام لحظه های عمرم با من بودی ، آن قدر نزدیک که تشبیه رگ گردن برای آن همه نزیکیت ناچیز است.
- سپاس فراوان از عمه عزیزم و خانواده گرانقدرشان که در طی این راه پشوانه من بودند. از آنچه ارزانی ام کردید همین می ماند ، شرمساری و تشکری نه در خور مهربانی بی حدتان.
- تقدیم به استادم جناب آقای پروفسور اسماعیل بابلیان که شاگردی ایشان آرزوی هر دانشجویی است. تقدیم با تقدیر به کمال انسانی و معلمانه تان که هر فصل این نوشته ها حاکی از شوقی است که شما در من نهادید. متشکرم.
- و با تقدیر از آقای دکتر شهنام جوادی ، استاد راهنمای دیگرم که مرا در زیر و بم رسیدن یاری نمودند و همواره پشتوانه اینجانب در طی تحصیلم بودند.
- از جناب آقای دکتر سعید عباس بندی و جناب آقای دکتر سعید محرابیان ، کمال تقدیر و تشکر را دارم که با صبر و دانش ، داوری این نوشته را پذیرفتند.
- و در نهایت ، از تمام دوستان و بستگانم که دعای خیر آنها همواره پشت و پناه من در طول زندگی بوده است ، کمال قدردانی را دارم.

چکیده

در این پایان‌نامه به مطالعهٔ روش گلرکین گسسته برای حل معادلات انتگرال—دیفرانسیل با هستهٔ منفرد ضعیف می‌پردازیم. این روش مبتنی بر فضای توابع اسپلاین است.

هدف اصلی این پایان‌نامه، یافتن تقریب‌هایی از جواب و مشتقات جواب یک مسئلهٔ مقدار مرزی از معادلهٔ انتگرال—دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n با هستهٔ منفرد ضعیف یا هسته‌های ناهموار است. این تقریب‌ها توابعی قطعه‌ای چندجمله‌ای روی افراز خاصی از بازهٔ موردنظر هستند. برای بدست آوردن آنها، از روش گلرکین گسسته و شکل معادله انتگرال مسئلهٔ مقدار مرزی استفاده می‌شود. همچنین، تخمین‌های همگرایی جامع بهینه و سرعت همگرایی روش برای پارامترهای خاص، نیز بدست می آید.

رده‌بندی موضوعی ۲۰۰۰: 45J05, 65R20

واژه های کلیدی: معادلهٔ انتگرال—دیفرانسیل با هستهٔ منفرد ضعیف، روش گلرکین گسسته، بازه با افراز خاص.

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

بحث اصلی این پایان‌نامه، در مورد یافتن تقریبی از جواب یکتای معادلات انتگرال‌ـدیفرانسیل به شکل زیر، با روش گلرکین گسسته و بررسی رفتار همگرایی آن است.

$$u^{(n)}(t)=\sum_{i=0}^{n_0}a_i(t)u^{(i)}(t)+\sum_{i=0}^{n_0}\int_0^b k_i(t,s)u^{(i)}(s)\,ds+f(t),\quad t\in[0,b],\quad b>0,$$
$$\sum_{i=0}^{n-1}[\alpha_{ij}u^{(i)}(0)+\beta_{ij}u^{(i)}(b)]=0,$$

که در آن

$$0\le n_0\le n-1,\ n\in\mathbb{N},\ \alpha_{ij},\beta_{ij}\in\mathbb{R},\ j=1,\cdots,n,i=0,\cdots,n-1,$$

$$a_i,f\in C^{m,\nu}(0,b),\ k_i\in W^{m,\nu}(\Delta),\ -\infty<\nu<1,\ i=0,\cdots,n_0,\ m\in\mathbb{N}.$$

مفاهیم فوق به تفصیل در فصل ۲ بیان شده‌اند.

مقالهٔ اصلی که در این پایان‌نامه مورد بررسی قرار گرفته عبارت است از:

A. Pedas, E. Tamme, Discrete Galerkin method for Fredholm integro - differential equations with weakly singular kernels, J.Comput. Appl. Math. 213 (2008) 111-126.

این پایان‌نامه مشتمل بر ۴ فصل است و هر فصل نیز به چند بخش تقسیم شده است.

در فصل ۱، تعاریف و قضایای جانبی مورد نیاز، جهت آشنایی و سهولت اثبات قضایا در فصل ۲، بیان شده است.

در فصل ۲، به بیان روش گلرکین گسسته و پیش‌نیازهای آن می‌پردازیم و تخمین‌های همگرایی را برای حالات مختلف بیان می‌کنیم.

در بخش (۲.۲)، پیش‌زمینه لازم برای روش فوق را ذکر می‌کنیم. به ویژه در لم (۱.۲.۲)، چند تقریب خطا برای تصویر گسسته از یک تابع در $C^{m,\nu}(0,b)$ روی بازه افراز شده، داده شده است. با استفاده از این تقریبها در بخش‌های (۳.۲) و (۴.۲)، رفتار همگرایی روش گلرکین گسسته را تحلیل می‌کنیم. نتایج اصلی در قضایای (۱.۳.۲) و(۳.۴.۲) بیان شده است.

در فصل ۳، نتایج عددی حاصل از اعمال روش فوق، در حل یک مسئلهٔ خاص را بیان خواهیم کرد که برنامهٔ کامپیوتری آن در پیوست B ارائه شده است.

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

۱.۱. پیش‌نیازها

۱.۱.۱. تعریف هم‌پیوستگی خانواده F از توابع مانند f را که بر مجموعه E در فضای متری X تعریف شده‌اند، بر E هم‌پیوسته گویند، هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، δ ای مثبت باشد، به‌طوری‌که هرگاه $f \in F$، به‌ازای هر x, y در E، اگر $d(x, y) < \delta$ آنگاه $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

۲.۱.۱. تعریف فضای متری تام یک فضای متری که در آن هر دنبالهٔ کوشی همگرا باشد، تام نام دارد.

۳.۱.۱. تعریف فضای باناخ یک فضای باناخ عبارت است از یک فضای برداری مانند A روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ که هر دنباله کوشی در این فضا به عضوی از این فضا همگراست.

۴.۱.۱. تعریف فضای $L_p[a, b]$ فرض می‌کنیم $p \in (0, \infty)$، در این صورت گردایهٔ تمام توابع f در $[a, b]$ را فضای $L_p[a, b]$ می‌نامند هرگاه $|f|^p$ انتگرال‌پذیر باشد.همچنین $\|f\|_p = (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ را L_p—نرم f می‌نامند.

۵.۱.۱. قضیه (ریتس — تورین [1])[14] فرض کنید T یک عملگر خطی کراندار از $L_p(0, b)$ به $L_p(0, b)$ و همزمان از$L_q(0, b)$ به $L_q(0, b)$ باشد، به‌طوری‌که $q, p \in [0, \infty]$، اگر $p \leq r \leq q$، آنگاه T یک عملگر کراندار از $L_r(0, b)$ به $L_r(0, b)$ است.

[1] Reisz-Thorin

۱.۱.۶. قضیه (آرزلا – آسکولی [۲]) [1] فرض کنید دنباله‌ای از توابع پیوسته $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ روی بازهٔ بسته وکراندار $[a,b]$ تعریف شده‌است. اگر دنبالهٔ فوق، به‌طوریکنواخت کراندار و هم‌پیوسته باشد، آنگاه زیردنباله‌ای از $\{f_n\}$ مانند $\{f_{n_k}\}$ وجود دارد که به طوریکنواخت همگراست.

۱.۲. عملگر انتگرال فشرده

۱.۲.۱. تعریف اگر X و Y فضاهای برداری نرم‌دار و $K : X \longmapsto Y$ عملگری خطی باشد، آنگاه K فشرده است، اگر مجموعه $\{Kx \mid \|x\|_X \leq ۱\}$ در Y دارای بستار فشرده باشد. به بیان دیگر، K فشرده است اگر و تنها اگر برای هر دنبالهٔ کراندار $\{x_n\}$ در X، دنبالهٔ $\{Kx_n\}$ دارای زیردنباله‌ای همگرا در Y باشد.

۱.۲.۲. قضیه (جایگزین فردهلم [۳]) [2] فرض کنید X یک فضای باناخ و $K : X \longmapsto X$ یک عملگر فشرده است. در این صورت معادلهٔ $(\lambda I - K)x = y$، $\lambda \neq ۰$، دارای جواب یکتای $x \in X$ است اگر و تنها اگر معادلهٔ همگن $(\lambda I - K)z = ۰$ فقط دارای جواب بدیهی $z = ۰$ باشد. در این صورت، عملگر $(\lambda I - K) : X \overset{۱-۱}{\longmapsto} X$ دارای عملگر معکوس $(\lambda I - K)^{-۱}$ است.

فرض کنید D یک مجموعه بسته و کراندار در $\mathbb{R}^m$، $m \geq ۱$ باشد و

$Kx(t) = \int_D k(t,s)x(s)\,ds, \quad t \in D, \quad x \in C(D),$

که در آن $C(D)$ را با نرم $\|.\|_\infty$، در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم که $K : C(D) \longmapsto C(D)$، کراندار و فشرده است.

ابتدا فرض می‌کنیم $k(t,s)$ به ازای هر $t \in D$، یک تابع انتگرال‌پذیر ریمان نسبت به s است و همچنین فرضهای زیر را نیز داریم:

$(\kappa_۱)$ قرار می‌دهیم $\omega(h) \equiv \max_{t,\tau\in D} \max_{|t-\tau|\leq h} \int_D |k(t,s) - k(\tau,s)|\,ds$، آنگاه $\lim_{h\to ۰} \omega(h) = ۰$.

$(\kappa_۲)$ $\max_{t\in D} \int_D |k(t,s)|\,ds < \infty$.

---

[۲] Arzela-Ascoli

[۳] Fredholm alternative

با توجه به (κ_1)، اگر $x(s)$، کراندار و انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه $Kx(t)$ پیوسته است، زیرا

$$|Kx(t)-Kx(\tau)| = \left|\int_D (k(t,s)-k(\tau,s))x(s)\,ds\right|$$
$$\leq \int_D |(k(t,s)-k(\tau,s)||x(s)|\,ds \leq \omega(|t-\tau|)\|x\|_\infty$$

بنا به (κ_1) و کرانداری $x(s)$ داریم:

$$\lim_{|t-\tau|\to 0}\omega(|t-\tau|) = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0\,(|t-\tau| < \delta \Rightarrow \omega(|t-\tau|) < \varepsilon),$$

$$\forall s \in D, \exists M > 0\ \ (\|x\|_\infty \leq M).$$

در نتیجه با قرار دادن $\varepsilon' = M\varepsilon$، بدست می‌آید:

$$\forall\varepsilon' > 0\,\exists\delta > 0\,(|t-\tau| < \delta \Rightarrow |Kx(t)-Kx(\tau)| < \varepsilon').$$

از (κ_2)، نیز نتیجه می‌گیریم، K کراندار است، زیرا

$$\|K\| = \max_{t\in D}\int_D |k(t,s)|\,ds < \infty.$$

برای بحث روی فشردگی K، ابتدا مجموعه‌های فشرده در $C(D)$ را مشخص می‌کنیم. بنا به قضیهٔ (۶.۱.۱) (آرزلا–آسکولی) می‌دانیم که زیرمجموعهٔ S از $C(D)$ دارای بستار فشرده است، اگر و تنها اگر

(i) S یک مجموعه به طور یکنواخت کراندار از توابع باشد.

(ii) S یک گردایه هم‌پیوسته باشد.

حال مجموعه $S = \{Kx \mid x \in C(D), \|x\|_\infty \leq 1\}$ را در نظر بگیرید. این مجموعه به طوریکنواخت کراندار است زیرا از (κ_2) داریم

$$\|Kx\|_\infty \leq \|K\|\|x\|_\infty \leq \|K\| < \infty.$$

همچنین S با توجه به پیوستگی Kx روی D، هم‌پیوسته نیز هست، در نتیجه S در $C(D)$ بستار فشرده دارد و بنا به تعریف، K عملگر فشرده روی $C(D)$ به $C(D)$ است.

برای اثبات لم‌های (۳.۲.۱) و (۴.۲.۱) به [2] مراجعه کنید.

۳.۲.۱. لم اگر $k(t,s)$ یک تابع پیوسته از D باشد، آنگاه K در شرایط (κ_1) و (κ_2) صدق می‌کند.

۴.۲.۱. لم فرض کنید X و Y و Z فضاهای برداری باشند و $L[X,Y]$، فضای باناخ عملگرهای خطی کراندار از X به Y باشد، در این صورت اگر $K \in L[X,Y]$ و $W \in L[Y,Z]$ و حداقل یکی از این دو عملگر فشرده باشد، آنگاه $WK \in L[X,Z]$، فشرده است.

۵.۲.۱. لم فرض کنید X و Y فضاهای خطی نرم‌دار هستند، همچنین Y فضای تام است. اگر $K \in L[X,Y]$ و $\{K_n\}$ دنباله‌ای از عملگرهای فشرده در $L[X,Y]$ باشد به‌طوری‌که $\|K_n - K\| \to 0$،آنگاه K فشرده است.

اثبات. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد به‌طوری‌که $\|x_n\| \leq 1$، $n \geq 1$. با توجه به تعریف (۱.۲.۱)، نشان می‌دهیم $\{Kx_n\}$ شامل زیردنباله‌ای همگراست.

چون K_1 فشرده است، دنبالهٔ $\{K_1 x_n\}$ شامل زیردنباله‌ای همگراست. این زیردنبالهٔ همگرا را با $\{K_1 x_n^{(1)} | n \geq 1\}$ نشان می‌دهیم و y_1 را حد آن قرار می‌دهیم. برای $k \geq 2$، به استقرا زیردنبالهٔ $\{x_n^{(k)} | n \geq 1\} \subset \{x_n^{(k-1)}\}$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\{K_k x_n^{(k)}\}$ به نقطه‌ای در Y مانند y_k همگرا باشد. در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} K_k x_n^{(k)} = y_k,\ \{x_n^{(k)}\} \subset \{x_n^{(k-1)}\},\ k \geq 1. \tag{۱.۲.۱}$$

حال زیردنبالهٔ $\{z_k\}$ از$\{x_n\}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که$\{Kz_k\}$ درY همگرا باشد. قرار دهید $z_1 = x_j^{(1)}$، که در آن j چنان است که $\|K_1 x_n^{(1)} - y_1\| \leq 1$ $\forall n \geq j$. حال به استقراء، $z_k = x_j^{(k)}$,$k \geq 2$، را زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ در نظر می‌گیریم که در آن j چنان است که

$$\|K_k x_n^{(k)} - y_k\| \leq \tfrac{1}{k}, \forall n \geq j. \tag{۲.۲.۱}$$

دنباله $\{Kz_k\}$، دنباله‌ای کوشی در Y است، زیرا از (۱.۲.۱) و (۲.۲.۱) و اینکه به ازای هر $p \geq 1$، $z_{k+p} \in \{x_n^{(k)}\}$، داریم

$$\|Kz_{k+p} - Kz_k\| \leq \|Kz_{k+p} - K_k z_{k+p}\| + \|K_k z_{k+p} - K_k z_k\| + \|K_k z_k - Kz_k\|$$

$$\leq \|K - K_k\| \|z_{k+p}\| + \|K - K_k\| \|z_k\| + \|K_k z_{k+p} - y_k\| + \|K_k z_k - y_k\|$$

$$\leq 2\|K - K_k\| + \tfrac{2}{k}.$$

از فرض $\|K_n - K\| \to 0$، نتیجه می‌گیریم $\{Kz_k\}$ دنباله‌ای کوشی در Y است. چون Y فضایی تام

است پس $\{Kz_k\}$ در آن همگراست و در نتیجه K فشرده است. $\square$

حال می‌خواهیم با مثالی نشان دهیم که عملگر انتگرال متناظر با هستهٔ $k(t,s)=\frac{1}{|t-s|^\gamma}$ برای $0<\gamma<1$ روی $D=[a,b]$ عملگری فشرده است.

۱.۲.۶. مثال فضاهای برداری $X=Y=C[a,b]$ با نرم $\|.\|_\infty$ و هستهٔ $k(t,s)=\frac{1}{|t-s|^\gamma}$ که در آن $0<\gamma<1$، را در نظر بگیرید. دنبالهٔ هسته‌های پیوستهٔ $\{k_n\}$ را اینگونه تعریف می‌کنیم:

$$k_n(t,s)=\begin{cases}\frac{1}{|t-s|^\gamma} & |t-s|\geq\frac{1}{n},\\ n^\gamma & |t-s|\leq\frac{1}{n}.\end{cases}$$

حال برای عملگرهای انتگرال متناظرشان داریم

$$\|K_n-K\|=\max_{t\in[a,b]}\int_{|t-s|\leq\frac{1}{n}}|k(t,s)-k_n(t,s)|\,ds$$
$$=\max_{t\in[a,b]}\int_{|t-s|\leq\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{|t-s|^\gamma}-n^\gamma\right)ds=\frac{2\gamma}{1-\gamma}n^{\gamma-1}$$

پس وقتی $n\to\infty$، خواهیم داشت $\|K_n-K\|\to 0$. بنا به لم (۱.۲.۵)، K یک عملگر فشرده روی $[a,b]$ است.

به طور مشابه می‌توان نشان داد که هستهٔ $k(t,s)=\log|t-s|$، یک عملگر انتگرال فشرده مانند K را روی $L_2[a,b]$ تعریف می‌کند. برای اثبات فشردگی K به [13] مراجعه کنید.

۱.۳. تابع گرین برای معادلات دیفرانسیل معمولی

در این بخش فرض می‌کنیم، مفروضات قضیهٔ جایگزین فردهلم برای مسئلهٔ مقدار مرزی برقرارند، در این صورت وجود جواب یکتا برای معادلهٔ دیفرانسیل تضمین می‌گردد.

برای حل معادله دیفرانسیل ناهمگن، از یک عملگر انتگرال استفاده خواهیم کرد، به‌طوری‌که جواب حاصل از این عملگر، در تمام شرایط مرزی مسئله صدق کند. هستهٔ این عملگر انتگرال، تابع گرین نامیده می‌شود که آن را با $G(x,t)$ نمایش می‌دهیم. روشهای مختلفی برای ساختن تابع گرین وجود دارد که ما به بیان یکی از این روشها خواهیم پرداخت.

عملگر دیفرانسیل L را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$L(y)(x)=\sum_{p=0}^{n}a_p(x)y^{(p)}(x)=a_n(x)y^{(n)}(x)+\cdots+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)$$

فرض می‌کنیم $a_n(x)$ روی $[\circ, ۱]$ ناصفر است و هر یک از توابع $a_p(x)$، $p = \circ, \dots, n$، حداقل مشتق nام پیوسته دارند.

ابتدا روش ساخت G را برای مسائل مرتبه ۲ شرح می‌دهیم.

تابع G، نسبت به دو متغیر x, t، با ویژگی‌های زیر تعریف می‌شود:

اگر $t \in (\circ, ۱)$، آنگاه $G(t, s)$ و $\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}$ و $\frac{\partial^۲ G(x,t)}{\partial x^۲}$ برای $t > x > \circ$ و $۱ > x > t$ وجود دارند. تأکید می‌کنیم که G روی $[\circ, ۱] \times [\circ, ۱]$ تابعی پیوسته است و برای G_x نوع خاصی از ناپیوستگی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

الگوریتم ساخت $G(x,t)$ برای معادلات مرتبهٔ ۲

($t \in [\circ, ۱]$ را ثابت در نظر بگیرید.)

a) برای $t > x > \circ$ و $۱ > x > t$ داریم $L(G(.,t))(x) = \circ$.

b) $G(.,t)$ نسبت به x در شرایط مرزی مسئله صدق می‌کند.

c) $G(x,t)$ تابعی پیوسته است.

d) $\frac{۱}{a_۲(t)} = \frac{\partial G(t^-,t)}{\partial x} - \frac{\partial G(t^+,t)}{\partial x}$.

حال برای معادلات با مراتب بالاتر، تابع G را می‌سازیم. تابع G دارای ویژگی‌های زیر روی $[\circ, ۱] \times [\circ, ۱]$ است.

اگر $t \in (\circ, ۱)$، آنگاه $\frac{\partial^p G(x,t)}{\partial x^p}$، $p = \circ, \dots, n$، روی نواحی $t > x > \circ$ و $۱ > x > t$، وجود دارند و پیوسته هستند. همچنین برای زمانی که $x = t$ و $p = \circ, ..., n - ۲$، نیز فرض می‌کنیم پیوستگی برقرار است، یعنی

$$\frac{\partial^p G(t^+,t)}{\partial x^p} = \frac{\partial^p G(t^-,t)}{\partial x^p}, \quad p = \circ, \dots, n - ۲,$$

و برای مشتق $(n - ۱)$ام یک ناپیوستگی به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\frac{\partial^{n-۱} G(t^+,t)}{\partial x^{n-۱}} - \frac{\partial^{n-۱} G(t^-,t)}{\partial x^{n-۱}} = \frac{۱}{a_n(t)}.$$

الگوریتم ساخت $G(x,t)$ برای معادلات مرتبهٔ n

($t \in [\circ, ۱]$ را ثابت در نظر بگیرید.)

a) برای $t < x < ۱$ و $۰ < x < t$ داریم $L(G(.,t))(x) = ۰$.

b) $G(.,t)$ نسبت به x در شرایط مرزی مسئله صدق می‌کند.

c) برای $p = ۰, \ldots, n-۲$ داریم $\frac{\partial^p G(t^+,t)}{\partial x^p} = \frac{\partial^p G(t^-,t)}{\partial x^p}$.

d) $\frac{۱}{a_n(t)} = \frac{\partial^{n-۱} G(t^+,t)}{\partial x^{n-۱}} - \frac{\partial^{n-۱} G(t^-,t)}{\partial x^{n-۱}}$.

روش فوق را با چند مثال توضیح می‌دهیم.

۱.۳.۱. مثال برای تابع $f \in C[۰,۱]$، y را چنان می‌یابیم که

$$\begin{cases} y'' + ۳y' + ۲y = f, \\ y(۰) = ۰, y'(۰) = ۰. \end{cases}$$

قرار می‌دهیم $L(y) = y'' + ۳y' + ۲y$. ابتدا نشان می‌دهیم که مسئله در شرایط قضیهٔ جایگزین فردهلم صدق می‌کند. اگر $L(y) = ۰$ آنگاه اعداد $a,\ b$ چنان وجود دارند که $y(x) = ae^{-۲x} + be^{-x}$ و برای برقراری $y(۰) = ۰, y'(۰) = ۰$ باید داشته باشیم

$$\begin{cases} a + b = ۰, \\ -۲a - b = ۰. \end{cases}$$

تنها جواب این دستگاه $a = b = ۰$ است، در نتیجه شرایط قضیهٔ جایگزین فردهلم برقرار است و مسئله دارای جواب یکتاست. حال با توجه به الگوریتم ذکر شده، تابع G را می‌سازیم. تابع G در (a) صدق می‌کند، اگر داشته باشیم:

$$G(x,t) = \begin{cases} Ae^{-۲x} + Be^{-x} & x \leq t, \\ Ce^{-۲x} + De^{-x} & x > t, \end{cases}$$

که در آن A, B, C, D مستقل از x هستند ولی ممکن است توابعی از t باشند. حال این مجهولات را با توجه به شرایط ناپیوستگی و پیوستگی الگوریتم بدست می‌آوریم. از (b) داریم $G(۰,t) = ۰,\ G_x(x,t)|_{x=۰} = ۰$، آنگاه $A + B = ۰, -۲A - B = ۰$ و در نتیجه $A = B = ۰$.

با توجه به (c) داریم $G(t^+,t) = G(t^-,t)$ یعنی $(C-A)e^{-۲t} + (D-B)e^{-t} = ۰$، آنگاه

$$Ce^{-۲t} + De^{-t} = ۰. \tag{۱.۳.۱}$$

همچنین از (d) داریم $\mathrm{G_x(x,t)}|_{\mathrm{x=t^+}} - \mathrm{G_x(x,t)}|_{\mathrm{x=t^-}} = 1$ یعنی $-۲(C-A)e^{-۲t} - (D-B)e^{-t} = ۱$، آنگاه

$$-۲Ce^{-۲t} - De^{-t} = ۱. \tag{۲.۳.۱}$$

در نتیجه از(۱.۳.۱) و (۲.۳.۱) بدست می آید $C = e^{-2t},\ D = e^{-t}$ و

$$G(x,t) = \begin{cases} 0 & x \le t, \\ -e^{2(t-x)} + e^{t-x} & x > t. \end{cases}$$

اگر f پیوسته باشد، آنگاه $y = \mathbf{G}f$ ($\mathbf{G}$ عملگر انتگرال متناظر با تابع گرین $G(x,t)$ است)، جواب یکتای $L(y) = f$ است.

حال به بررسی جواب حاصل از روش فوق برای معادلات مرتبهٔ دوم می‌پردازیم.

فرض کنید $L(y)(x) = a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x)$. همچنین قرار دهید: $u(x) = \int_0^1 G(x,t)f(t)\,dt$.

بنا به تعریف G، u در شرایط مرزی صدق می‌کند. نشان می‌دهیم $L(u) = f$. داریم

$$u(x) = \int_0^x G(x,t)f(t)\,dt + \int_x^1 G(x,t)f(t)\,dt,$$

$$u'(x) = G(x,x^-)f(x) + \int_0^x \frac{\partial G(x,t)}{\partial x} f(t)\,dt - G(x,x^+)f(t) + \int_x^1 \frac{\partial G(x,t)}{\partial x} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^x \frac{\partial G(x,t)}{\partial x} f(t)\,dt + \int_x^1 \frac{\partial G(x,t)}{\partial x} f(t)\,dt.$$

تساوی آخر بنا به فرض $G(x,x^-) = G(x,x^+)$ برقرار است، همچنین

$$u''(x) = \frac{\partial G(x,x^-)}{\partial x} f(x) + \int_0^x \frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial x^2} f(t)\,dt - \frac{\partial G(x,x^+)}{\partial x} f(x) +$$

$$\int_x^1 \frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial x^2} f(t)\,dt = \frac{f(x)}{a_2(x)} + \int_0^x \frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial x^2} f(t)\,dt + \int_x^1 \frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial x^2} f(t)\,dt.$$

آخرین تساوی، بنا به شرط $G_x(x,x^-) - G_x(x,x^+) = \dfrac{1}{a_2(x)}$ بدست می آید. از این‌که $G(x,t)$ روی $(0,x)$ و $(x,1)$ در $L(y) = 0$ به عنوان تابعی از x صدق می‌کند، نتیجه می‌گیریم $L(u) = f$.

۲.۳.۱. مثال می‌خواهیم تابع گرین مسئله زیر را بدست آوریم

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = f, \\ y(0) = 0, y(1) = 0. \end{cases}$$

قرار می‌دهیم $L(y) = y'' + 3y' + 2y$. مسئلهٔ فوق در شرایط قضیهٔ جایگزین فردهلم صدق می‌کند.

حال مانند مثال (۱.۳.۱) تابع G را می‌سازیم،

$$G(x,t) = \begin{cases} Ae^{-2x} + Be^{-x} & x < t, \\ Ce^{-2x} + De^{-x} & x > t. \end{cases}$$

شرایط مرزی و شرایط پیوستگی منجر به معادلات زیر می‌گردند:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ Ce^{-2}+De^{-1}=0, \\ (C-A)e^{-2t}+(D-B)e^{-t}=0, \\ -2(C-A)e^{-2t}-(D-B)e^{-t}=1. \end{cases}$$

دستگاه فوق قابل حل است، اما اگر از توابع مستقل خطی دیگری غیر از $e^{-2t},\ e^{-t}$ به عنوان جواب $L(y)=0$ استفاده کنیم، به دستگاه راحت‌تری می‌رسیم. به عنوان مثال، توابع مستقل خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u_1(t)=e^{-2t}-e^{-t}, \\ u_2(t)=e^{-2(t-1)}-e^{-(t-1)}. \end{cases}$$

حال G را اینگونه می‌سازیم،

$$G(x,t)=\begin{cases} Au_1(x)+Bu_2(x) & x<t, \\ Cu_1(x)+Du_2(x) & x>t. \end{cases}$$

با اعمال شرایط مرزی داریم:

$$\begin{cases} 0=Bu_2(0)\ \Rightarrow\ B=0, \\ 0=Cu_1(0)\ \Rightarrow\ C=0. \end{cases}$$

شرایط پیوستگی معادلات زیر را می‌دهد:

$$\begin{cases} 0=G(t^+,t)-G(t^-,t)=Du_2(t)-Au_1(t), \\ \frac{1}{a_2(t)}=\frac{\partial G(t^+,t)}{\partial x}-\frac{\partial G(t^-,t)}{\partial x}=Du_2'(t)-Au_1'(t). \end{cases}$$

از این معادلات خواهیم داشت $A=\dfrac{u_2(t)}{a_2(t)w(t)},\ D=\dfrac{u_1(t)}{a_2(t)w(t)}$ که در آن

$$w(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{pmatrix},$$

رانسکین [4] u_1 و u_2 است. نهایتاً بدست می آید

$$G(x,t)=\begin{cases} \frac{u_1(x)u_2(t)}{a_2(t)w(t)} & x<t, \\ \frac{u_2(x)u_1(t)}{a_2(t)w(t)} & x>t. \end{cases}$$

حال کافیست $w(t)$ را بدست آوریم. می‌دانیم $w(t)=w(0)exp(\int_0^t -[\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}]dt)$ و برای مثال فوق داریم

$$w(0)=\begin{pmatrix} 0 & e^2-e^1 \\ -1 & -2e^2+e^1 \end{pmatrix}=e^2-e^1,$$

بنابراین $w(t)=(e^2-e^1)e^{-3t}$. با جاگذاری بدست می آید

$$\frac{u_1(x)u_2(t)}{w(t)}=\frac{e^{2(t-x)}(e^{1-t}-1)(1-e^x)}{(e-1)},$$

[4] Wronskian

و

$$\frac{u_2(x)u_1(t)}{w(t)} = \frac{e^{(t-x)}(1-e^t)(e^{1-x}-1)}{(e-1)}.$$

خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند برای اطلاعات بیشتر به [12] مراجعه کند.

۴.۱. بررسی پایداری و ویژگی‌های همگرایی تصویر متعامد گسسته

فرض کنید

$$\pi'_h = \{0 = x_0 < \cdots < x_n = b\}, \tag{1.4.1}$$

یک افراز دلخواه از بازهٔ $[0, b]$ باشد و برای عدد صحیح $r \geq 2$ تعریف کنیم

$$S_h = \{\Psi \in C[0, b] : \Psi|_{[x_k, x_{k+1}]} \in \Pi_{r-1}, k = 0, \cdots, n-1\},$$

که در آن Π_{r-1} فضای چندجمله‌ای‌های از درجهٔ حداکثر $(r-1)$ است. فرض کنید

$$Qg = \sum_{j=1}^{J} w_j g(\xi_j) \simeq \int_0^1 g(x)\, dx \tag{2.4.1}$$

یک قاعدهٔ انتگرال‌گیری پایه با نقاط انتگرال‌گیری

$$0 \leq \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_J \leq 1$$

و وزنهای $w_j > 0$ باشد. می‌دانیم که مثبت بودن وزنها بسیار بااهمیّت است.

حال h را بردار طول زیربازه‌ها قرار می‌دهیم و به صورت $h = (h_0, h_1, \cdots, h_{n-1})$ تعریف می‌کنیم، که در آن $h_k = x_{k+1} - x_k$، $k = 0, \cdots, n-1$، همچنین قاعدهٔ انتگرال‌گیری مرکب بر پایهٔ (۲.۴.۱) را نیز معرفی می‌کنیم

$$Q_h g = \sum_{k=0}^{n-1} h_k \sum_{j=1}^{J} w_j g(x_{kj}) \simeq \int_0^b g(x)\, dx \tag{3.4.1}$$

$$x_{kj} = x_k + h_k \xi_j, \qquad k = 0, \cdots, n-1,\ j = 1, \cdots, J,$$

که در آن x_{kj} نقاط و w_j وزنهای قاعدهٔ انتگرال‌گیری مرکب Q_h هستند. با توجه به (۳.۴.۱) می‌توان یک ضرب داخلی گسسته به صورت

$$(f, g)_h = Q_h(f\overline{g}), \qquad f, g \in C[0, b], \tag{4.4.1}$$

تعریف کرد، که از آن در ساخت تصویر

$$R_h : C[0, b] \longmapsto S_h\ ,\ (R_h f, \Psi)_h = (f, \Psi)_h, \qquad \forall \Psi \in S_h, \tag{5.4.1}$$

استفاده می‌گردد.

با در نظر گرفتن مفروضات فوق، حال می‌خواهیم شرایطی را که تحت آن (۴.۴.۱) یک ضرب داخلی روی S_h تعریف می‌کند، بیان کنیم.

۱.۴.۱. قضیه اگر $J \geq r \geq ۲$، آنگاه $(.,.)_h$، تعریف شده در (۴.۴.۱)، یک ضرب داخلی روی S_h است.

اثبات. ابتدا یک نرم به صورت زیر روی فضای S_h تعریف می‌کنیم:

$$\|\Psi\|_{n,p} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} h_k \sum_{j=1}^{J} w_j |\Psi(x_{kj})|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ \Psi \in S_h,\ p \in [1,\infty)$$

حال فرض کنید $\Psi \in S_h$ و $\|\Psi\|_{n,2} = 0$، چون $w_j > 0$، داریم $\Psi(x_{kj}) = 0$، $j = 1, ..., J$. می‌دانیم $\Psi|_{[x_k, x_{k+1}]} \in \Pi_{r-1}$ و $x_{kj} \in [x_k, x_{k+1}]$، $k = 0, ..., n-1$، پس از $J \geq r$، نتیجه می‌گیریم $\Psi \equiv 0$.

درنتیجه $\|\Psi\|_{n,2} = 0$ اگر و تنها اگر $\Psi \equiv 0$ و با توجه به تعریف ضرب داخلی، حکم برقراراست. □

درادامه، فرض بر این خواهد بود که $J \geq r$.

حال فضای اسپلاین S_h را به صورت مجموع مستقیم زیر افراز می‌کنیم:

$$S_h = S_{h,1} \oplus S_{h,2} \quad (۶.۴.۱)$$

به طوریکه $S_{h,2}$ دارای پایه‌ای موضعی است (یعنی محمل آن فقط در یک $\Delta_k = [x_k, x_{k+1}]$، $k = 0, \cdots, n-1$، تعریف می‌شود) و $S_{h,1}$ نسبت به ضرب داخلی گسسته $(.,.)_h$ بر $S_{h,2}$ عمود است. فضاهای فوق به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$S_{h,2} = \{\Psi \in S_h : \Psi(x_k) = 0, k = 0, \ldots, n\}, \quad (۷.۴.۱)$$

$$S_{h,1} = \{\Psi \in S_h : (\Psi, \Phi_h)_h = 0, \forall \Phi_h \in S_{h,2}\} \quad (۸.۴.۱)$$

با توجه به تعریف S_h، در هر یک از زیربازه‌های Δ_k، $k = 0, \ldots, n-1$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $(r-1)$، تعریف می‌شود که برای بدست آوردن تابع اسپلاین یکتا باید r پارامتر مجهول در هر زیربازه را به طور یکتا تعیین کنیم. همچنین چون تابع اسپلاین پیوسته است، به جز در یکی از زیربازه‌های ابتدا و انتهایی، درهر یک از بقیهٔ زیربازه‌ها، یک پارامتر را کم می‌کنیم و نهایتاً باید

$n(r-1)+1$ مجهول را به طور یکتا تعیین کنیم. لذا، می‌توان نتیجه گرفت که بعد فضای S_h نیز $n(r-1)+1$ است.

به طریق مشابه و با در نظر گرفتن تعریف $S_{h,2}$، دیده می‌شود در هر زیربازه، دو مجهول کم می‌شود و در نتیجه خواهیم داشت: $dim(S_{h,2}) = n(r-2)$ و از (۶.۴.۱) نیز نتیجه می‌شود: $dim(S_{h,1}) = n+1$. (اگر $r=2$ آنگاه $S_{h,2}=\{0\}$).

حال پایه‌ای برای $S_{h,1}$ می‌سازیم، فرض کنید $\Psi^{(i)} \in \Pi_{r-1}$، $i=0,1$، چندجمله‌ای‌هایی باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$Q(\Psi^{(i)}\Phi)=0, \qquad \forall \Phi \in \Pi^{\circ}_{r-1}, \tag{۹.۴.۱}$$
$$\Psi^{(0)}(0)=1, \Psi^{(0)}(1)=0, \Psi^{(1)}(0)=0, \Psi^{(1)}(1)=1,$$

که در آن Π°_{r-1}، زیر فضای چندجمله‌ای‌های $\Phi \in \Pi_{r-1}$، با ویژگی $\Phi(0)=\Phi(1)=0$ است.

حال وجود و یکتایی $\Psi^{(i)}$، $i=0,1$ را برای i ثابت نشان می‌دهیم.

یکتایی : فرض می‌کنیم $\Psi^{(i)}_1, \Psi^{(i)}_2$ ، هر دو در شرایط (۹.۴.۱) صدق کنند. قرار می‌دهیم $\Psi=\Psi^{(i)}_1-\Psi^{(i)}_2$، در نتیجه از (۹.۴.۱) دیده می‌شود $\Psi \in \Pi^{\circ}_{r-1}$، زیرا $\Psi^{(i)}_1(1)-\Psi^{(i)}_2(1)=0$ و $\Psi^{(i)}_1(0)-\Psi^{(i)}_2(0)=0$، از طرفی به ازای هر $\Phi \in \Pi^{\circ}_{r-1}$، داریم $Q(\Psi\Phi)=0$، در نتیجه $Q(\Psi^2)=0$. چون $w_k>0$، از اینکه $\sum_{k=1}^{J} w_k\Psi^2(\xi_k)=0$، داریم $\Psi^2(\xi_k)=0$ یا $\Psi(\xi_k)=0$، $k=1,...,J$. چون Ψ یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر $r-1$ است ولی در J نقطهٔ $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_J$ صفر می‌شود و $J \geq r$ پس $\Psi \equiv 0$ و یکتایی $\Psi^{(i)}$ اثبات می‌شود.

وجود : برای p چندجمله‌ای دلخواه $\Phi_j \in \Pi^{\circ}_{r-1}$، $j=1,...,p$، بنا به (۹.۴.۱) داریم $Q(\Psi^{(i)}\Phi_j)=0$، $j=1,...,p$. با فرض $p<r$، این دستگاه را حل می‌کنیم و چون تعداد معادلات (p) از تعداد مجهولات (r) کمتر است، همواره دارای جواب است و در نتیجه وجود $\Psi^{(i)}$ اثبات می‌شود.

توجه کنید که تنها نقاط انتگرال‌گیری در بازهٔ $(0,1)$، در ساختن $\Psi^{(0)}$ و $\Psi^{(1)}$ نقش دارند، زیرا $\Phi(0)=\Phi(1)=0$ و همچنین اگر قاعدهٔ انتگرال‌گیری متقارن باشد، خواهیم داشت

$$\Psi^{(1)}(x) = \Psi^{(0)}(1-x), \qquad x \in [0, 1], \tag{۱۰.۴.۱}$$

و همچنین اگر $r = 2$، داریم $\Psi^{(1)}(x) = x, \Psi^{(0)}(x) = 1 - x$.

حال قرار دهید

$$\Psi_0(x) = \Psi^{(0)}(\tfrac{x}{h_0}), \qquad x \in \Delta_0,$$
$$\Psi_k(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \Psi^{(1)}(\frac{x-x_{k-1}}{h_{k-1}}) & x\in\Delta_{k-1} \\ \Psi^{(0)}(\frac{x-x_k}{h_k}) & x\in\Delta_k \end{array} \right\}, k = 1, \cdots, n-1,$$
$$\Psi_n(x) = \Psi^{(1)}(\tfrac{x-x_{n-1}}{h_{n-1}}), \qquad x \in \Delta_{n-1},$$

و صفر در جاهای دیگر. به وضوح $\Psi_k \in S_h$ و $\Psi_k(x_l) = \delta_{kl}$، $k, l = 0, \ldots, n$، یعنی ماتریس $[\Psi_0(x_i), \Psi_1(x_i), ..., \Psi_n(x_i)]$، $i = 0, ..., n$، ماتریس واحد است، پس $\{\Psi_k\}$ مستقل خطی‌اند.

از این پس، به اختصار قرار می‌دهیم:

$$(f,g)_h^{(k)} = h_k \sum_{j=1}^{J} w_j f(x_{kj})\overline{g}(x_{kj}), \tag{۱۱.۴.۱}$$

بنا به (۳.۴.۱) و (۴.۴.۱) داریم: $(f,g)_h = \sum_{k=0}^{n-1} (f,g)_h^{(k)}$.

۲.۴.۱. لم $\{\Psi_0, \cdots, \Psi_n\}$ یک پایه برای $S_{h,1}$ است.

اثبات. چون $\{\Psi_k\}$ مستقل خطی‌اند و $dim(S_{h,1}) = n + 1$، کافیست نشان دهیم $\Psi_k \in S_{h,1}$، $n, \ldots, k = 0$. فرض کنید $\Phi \in S_{h,2}$ و $k \in \mathbb{N}_{n-1}$، در این صورت بنا به تعریف، چون Ψ_k تنها در دو زیربازهٔ Δ_{k-1} و Δ_k ناصفر است، داریم

$$(\Psi_k, \Phi)_h = \sum_{l=0}^{n-1} (\Psi_k, \Phi)_h^{(l)} = (\Psi_k, \Phi)_h^{(k-1)} + (\Psi_k, \Phi)_h^{(k)}, \tag{۱۲.۴.۱}$$

که در آن

$$(\Psi_k, \Phi)_h^{(k)} = h_k \sum_{j=1}^{J} w_j (\Psi_k \overline{\Phi})(x_k + h_k\xi_j) = h_k \sum_{j=1}^{J} w_j \Psi^{(0)}(\xi_j)\overline{\Phi}(x_k + h_k\xi_j) = 0.$$

عبارت اخیر از (۹.۴.۱) نتیجه می‌شود، زیرا $\overline{\Phi}(x_k + h_k\xi)$ تابعی از ξ در Π_{r-1}° است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد $(\Psi_k, \Phi)_h^{(k-1)} = 0$ و در نتیجه $\Psi_k \in S_{h,1}$. نتایج فوق برای $k = 0, n$ نیز به طور مشابه بدست می‌آید. □

تجزیه تابع $\Psi \in S_h$ متناظر با تجزیه $S_h = S_{h,1} \oplus S_{h,2}$، با در دست داشتن تابع Ψ_k، به آسانی بدست می‌آید.