مقدمه

احساس این که یک معادله‌ی انتگرال و دیفرانسیل باید حل شود، طبیعی است اما دست یافتن به جواب دقیق به ندرت امکان‌پذیر است، گاهی اوقات نیز رسیدن به جواب دقیق و به کار بردن آن از نظر زمان و حافظه‌ی مورد محاسبه گران تمام می‌شود. اما چون هدف اصلی، درک ماهیت ویژگی‌های جواب معادلات است، از این‌رو روش‌های عددی ابزاری مناسب برای رسیدن به این هدف می‌باشند.

برای معادلات، مناسب‌ترین روش عددی، روشی است که دارای دقت بالا، انعطاف‌پذیری و به کارگیری آسان باشد. روش‌هایی که معمولاً استفاده می‌شوند تمامی این ملاک‌ها را ندارند. از آن جمله می‌توان به روش عناصر متناهی اشاره کرد که برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی استفاده می‌شود، این روش دارای انعطاف‌پذیری بالایی بوده ولی رسیدن به دقت بالا در آن کار سختی می‌باشد. همچنین در روش آدومیان که از آن برای حل معادلات انتگرال استفاده می‌شود ساختن چند جمله‌ای‌های مراتب بالا مشکل می باشد.

روش‌های مذکور نیاز به کار محاسباتی بالایی دارند، به طوری که وقتی بعد فضا از دو بیشتر می‌شود، این مشکل به شکل جدی‌تری خود را نشان می‌دهد.

در سال‌های اخیر روش توابع پایه‌ای شعاعی، به عنوان یک روش مناسب جهت حل معادلات تابعی به کار رفته است.

گسترش این دسته از توابع حدود ۲۵ سال طول کشید و در ۱۰ سال اخیر سرعت ویژه ای یافته است. در این زمینه افراد مختلفی از جمله فرانک[۱][۱۴] و بوهمن[۲][۱۴] بر روی توابع پایه‌ای شعاعی بی‌نهایت هموار و تکه تکه هموار تحقیقات مختلفی را انجام دادند. همچنین دوشون[۳][۱۴]

[۱] Frank
[۲] Buhmann
[۳] Duchon

و وندلاند[1][۱۵,۲] به ترتیب روی توابع پایه ای شعاعی اسپلاین صفحه نازک و وندلاند کار کرده‌اند. گاسپاری[2][۱۵,۱۴] و کوهن[3][۱۵,۱۴] نیز در سال ۱۹۹۹ توابع پایه‌ای شعاعی ضربی را ابداع کردند. ادوارد کانزا[4][۱۴,۲] برای اولین بار در سال ۱۹۹۰ از توابع پایه ای شعاعی در حل مسائل مشتقات جزئی استفاده نمود واخیرا دانشمندانی از جمله دهقان[۶] روی حل معادلات انتگرال به کمک توابع پایه ای شعاعی تحقیقاتی انجام داده اند.

---

۱ Wendland
۲ Gaspari
۳ Kuhen
٤ Edward Kansa

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم پایه

۱.۱ مقدمه

در این بخش ابتدا برای آشنایی با توابع پایه‌ای شعاعی به بیان برخی مفاهیم و تعاریف مورد نیاز می‌پردازیم. در ادامه نیز انواع مختلف این دسته از توابع را معرفی کرده و به تقسیم بندی آن‌ها خواهیم پرداخت. همچنین مبحث درونیابی توابع با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی را مطرح کرده و مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۲.۱ معادلات انتگرال

معادلات به صورت‌های کلی

$$\Phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K\big(x,t,u(t)\big)dt \qquad (۱.۲.۱)$$

و

$$\Phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K\big(x,t,u(t)\big)dt \qquad (۲.۲.۱)$$

را به ترتیب معادلات انتگرال فردهلم[۱] و معادلات انتگرال ولترا[۲] گویند، که در آن‌ها λ یک پارامتر است و هسته معادله انتگرال K و تابع f و Φ داده شده‌اند و تابع u مجهول می‌باشد[۲۱].

اگر تابع K نسبت به u خطی باشد آنگاه معادله‌ی انتگرال مربوطه را خطی و اگر K نسبت به u غیرخطی باشد، معادله‌ی انتگرال را غیر خطی می‌نامیم.

اگر در یک معادله‌ی خطی $f(x)=۰$ باشد، معادله‌ی انتگرال همگن و در غیر این صورت ناهمگن نامیده می‌شود.

---

۱ Feredholm
۲ Voltre

۱.۲.۱ معادلات انتگرال فردهلم

صورت استاندارد معادلات انتگرال خطی فردهلم، که در آن‌ها حد بالا و پایین انتگرال‌گیری اعداد ثابت هستند، به صورت زیر است:

$$\Phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (a \le x, t \le b) \qquad (۳.۲.۱)$$

که در آن هسته معادله انتگرال K و تابع f داده شده‌اند و λ یک پارامتر معلوم می‌باشد. بر حسب آنکه Φ چه مقداری را اختیار کند، معادلات انتگرال خطی فردهلم به دو دسته عمده تقسیم می‌شوند :

۱- اگر $\Phi(x) = ۰$، آنگاه معادله (۳.۲.۱) به صورت :

$$0 = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

در می‌آید که آن را معادله‌ی خطی فردهلم نوع اول می‌نامند.

۲- اگر $\Phi(x)$، روی $[a,b]$ هرگز صفر نشود آنگاه با تقسیم طرفین بر $\Phi(x)$ و نامگذاری‌های جدید داریم :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

که آن را یک معادله انتگرال خطی فردهلم نوع دوم گویند. حال اگر در معادله (۳.۲.۱) به جای u عبارتی نظیر $F(u)$ که تابعی غیر خطی بر حسب u است، در زیر علامت انتگرال ظاهر شود، آن را معادله همرشتاین گویند و مشابه بالا به دو دسته‌ی نوع اول و دوم تقسیم می‌شود.

۲.۲.۱ معادلات انتگرال ولترا

شکل استاندارد معادلات خطی ولترا، که در آن‌ها حدود بالا و پایین انتگرال‌گیری به‌جای آنکه اعداد ثابتی باشند، به صورت تابعی از x بیان می‌گردند، به صورت زیر است :

$$\Phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt\,, \qquad (a \le x, t \le b) \qquad (۴.۲.۱)$$

که این نوع معادلات با توجه به مقدار Φ و با فرض $\beta(x) = x$ و $\alpha(x) = a$ به دو گروه تقسیم‌بندی می‌شوند :

۱- اگر $\Phi(x) = ۰$، آنگاه معادله (۴.۲.۱) به صورت :

$$0 = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

در می‌آید که آن را یک معادله‌ی ولترای خطی نوع اول گویند.

۲- اگر $\Phi(x) \neq ۰$، آنگاه معادله (۴.۲.۱) به صورت ساده‌تر :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

در می‌آید که آن را یک معادله ولترای خطی نوع دوم گویند. حال اگر در معادله (۴.۲.۱) به جای u عبارتی نظیر $F(u)$ که تابعی غیر خطی بر حسب u است، در زیر علامت انتگرال ظاهر شود، آن را معادله همرشتاین گویند و مشابه بالا به دو دسته‌ی نوع اول و دوم تقسیم می‌شود.

۳.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

هر معادله‌ای که در آن علاوه بر متغیرهای وابسته و مستقل، حداقل مشتقات جزئی متغیر وابسته نسبت به دو تا از متغیرهای مستقل موجود باشد، یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی نامیده می‌شود.

یک معادله با مشتقات جزئی را در حالت کلی می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$F\big(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{yy}, \dots\big) = 0 \qquad (۵.۳.۱)$$

که شامل متغیرهای مستقل $x,y,\dots$ و یک تابع مجهول u (وابسته به متغیرهای مستقل) و مشتقات جزئی $u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, \dots$ است. دامنه‌ی این مساله، یک ناحیه‌ی مناسب D از فضای n بعدی حقیقی می‌باشد که بر حسب n متغیر مستقل $x,y,\dots$ مشخص شده است. تعداد این متغیرهای مستقل، بعد مساله را تعیین می‌کند.

منظور از حل این معادله دیفرانسیل، یافتن تابع $u=u(x,y,\dots)$ می‌باشد که در معادله‌ی(۵.۳.۱) صدق کند. چنین تابعی جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی نامیده می‌شود. مرتبه‌ی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی برابر با بالاترین مرتبه‌ی مشتق جزئی موجود درآن معادله است.

۱.۳.۱ معادله دیفرانسیل جزئی خطی و غیرخطی

معادله دیفرانسیل جزئی را می‌توان به دو دسته‌ی خطی و غیرخطی تقسیم‌بندی کرد. اگر در یک معادله دیفرانسیل ، متغیرهای وابسته و مشتقات آن‌ها به صورت خطی در معادله ظاهر شوند، آن را یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی می‌نامیم و در غیر این صورت آن را یک معادله‌ی دیفرانسیل غیرخطی می‌نامیم. معادله‌ی موج یک بعدی، نمونه‌ای از یک معادله دیفرانسیل خطی است. در این معادله a سرعت صوت است و ثابت فرض می‌شود.

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} = a^۲ \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}$$

معادله‌ی لزج برگرز نیز نمونه‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی است:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x}$$

۲.۳.۱ شرایط مرزی و اولیه‌ی یک معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی

در عمل حل یک مساله مقدار اولیه یا مقدار مرزی، شامل یافتن یک تابع مجهول است که در معادله و شرایط جنبی مساله صدق کند. این شرایط ممکن است به صورت شرایط مرزی یا اولیه در نظر گرفته شوند. شرایط اولیه در مسائلی که دارای متغیر زمان هستند مطرح می‌شوند و مقدار تابع را در زمان اولیه مشخص می‌کنند. اما شرایط مرزی، مقدار تابع جواب را به ازای متغیرها روی مرز مشخص می‌کنند. صورت‌های مختلف شرایط مرزی عبارتند از:

۱-شرایط مرزی دیریکله

۲-شرایط مرزی نیومان

۳-شرایط مرزی رابین

۴-شرایط مرزی مخلوط

۴.۱ توابع پایه‌ای شعاعی

تعریف ۱.۴.۱ : تابع $\Phi : R^d \to R$ را یک تابع شعاعی نامیم اگر برای هر دو بردار $y, x \in R^d$ که

$\|x\|=\|y\|$ داشته باشیم : $\Phi(x)=\Phi(y)$ که منظور از $\|.\|$ همان نرم اقلیدسی می‌باشد.

در واقع فرض کنید $\Phi : R^d \to R$ و $(x_1, x_2, \dots, x_d) \epsilon\, \Omega \subseteq R^d$ باشد، آنگاه

$$\bar{x} = \left(x_1, x_2, \dots, x_d\right) \mapsto \Phi(\bar{x}) = g(\left\| (x_1, x_2, \dots, x_d) \right\|)$$

که

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}.$$

چون عبارت بالا فاصله‌ی نقطه‌ی $\bar{x}$ از مبدأ می‌باشد توابع فوق رادیال یا شعاعی نامیده می‌شود.

اگر نقاط ثابت $(\bar{x}_۱, \bar{x}_۲, \ldots, \bar{x}_n) \epsilon \mathrm{R}^{\mathrm{d}}$ مفروض باشند و ترکیب خطی زیر از مقادیر توابع g به مرکز نقاط $\bar{x}_i$ به صورت زیر نمایش داده شود :

$$f : \mathrm{R}^{\mathrm{d}} \rightarrow \mathrm{R}$$

$$f(x) = \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i \Phi(\|\bar{x} - \bar{x}_i\|)$$

که آن $\|\bar{x} - \bar{x}_i\|$ فاصله‌ی اقلیدسی بین $\bar{x}$ و $\bar{x}_i$ می‌باشد آنگاه تابع f ای را بدست آورده‌ایم که در در فضای متشکل از توابع پایه‌ای با بعد متناهی قرار دارد. به همین علت به آنها توابع پایه‌ای گفته می‌شود. لذا داریم:

$$g_{\mathrm{i}} : \bar{x} \mapsto g(\|\bar{x} - \bar{x}_i\|)$$

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i \Phi(\|\bar{x} - \bar{x}_i\|) \qquad (۶.۴.۱)$$

۱.۴.۱ معرفی توابع پایه‌ای شعاعی

در اینجا برخی از انواع توابع پایه‌ای شعاعی به صورت جدول‌های (۱.۱) و (۲.۱) آورده شده‌اند. در این جداول $r = \|x - x_i\|$ فرض شده است.

جدول(۱.۱) **-** معرفی توابع پایه‌ای شعاعی

توابع بی‌نهایت هموار	$\Phi(r)$
گوسی[1] (GA)	$e^{-(\varepsilon r)^{۲}}$
درجه ۲ چندگانه[2] (MQ)	$\sqrt{۱+(\varepsilon r)^{۲}}$
درجه ۲ معکوس[3] (IM)	$\frac{۱}{۱+(\varepsilon r)^{۲}}$
درجه ۲ چندگانه معکوس[4] (IMQ)	$\frac{۱}{\sqrt{۱+(\varepsilon r)^{۲}}}$
درجه ۲ چندگانه تعمیم یافته[5]	$(۱+(\varepsilon r)^{۲})^{\frac{v}{۲}} \quad v \neq ۰, v \notin ۲N$
بسل[6]	$\frac{J_{\frac{d}{۲}-۱}^{(\varepsilon r)}}{(\varepsilon r)^{\frac{d}{۲}-۱}}$

[1] Gaussian-
[2] Multi quadrics-
[3] Inverse quadric -
[4] Inverse Multi quadrics-
[5] Generrillized Multi quadrics -
[6] Bessel-

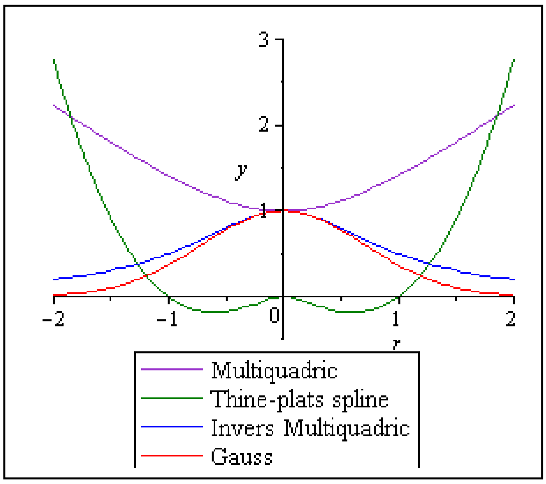
جدول(۲.۱) - معرفی توابع پایه‌ای شعاعی

توابع تکه‌تکه هموار	$\Phi(r)$
اسپلاین مکعبی[1]	r^{3}
تک جمله‌ای[2]	$r^{2m+1} \qquad m \in N$
اسپلاین صفحه نازک[3]	$r^{2}\ln r$
اسپلاین صفحه نازک تعمیم یافته[4]	$\begin{cases} r^{2k}\log r & k \in N \\ r^{2v} & v \notin N \end{cases}$
وندلاند[5]	$(1-r)_{+}^{k}\, p(r) \qquad k \in N$
ماترن[6]	$\dfrac{2^{1-v}}{\Gamma(v)} r^{v} k_{v}(r) \qquad v > 0$

در جدول (۱.۱) ε پارامتر شکل[7] نامیده می‌شود. توابع پایه‌ای برای مقادیر کوچک ε بسیار هموار بوده و برای مقادیر بزرگ آن نوک‌تیز و میخی شکل می‌شوند. در هر صورت انتخاب ε مناسب در اغلب موارد وابسته به نوع مسئله‌ی مورد نظر است و نمی‌توان برای انتخاب ε از قبل با قاطعیت اظهار نظر نمود [۲]. در واقع انتخاب ε مناسب در توابع پایه‌ای شعاعی مختلف منوط به اطلاعات اولیه می‌باشد. نکته قابل ذکر این است که در بعضی مقالات وکتب به جای استفاده از پارامتر ε از پارامتر c استفاده می‌شود. بدین معنی که $\Phi(\varepsilon r)$ به شکل $\Phi(r/c)$ نمایش داده می‌شود. در جدول (۳.۱) توابع پایه‌ای شعاعی با استفاده از پارامتر c نشان داده شده‌اند.

---

[1] Cubic spline-
[2] Monomial-
[3] Thin plate spline-
[4] Generalized thin plate spline-
[5] Wendland-
[6] Matern-
[7] Shape Parameter -



شکل ۱.۲- مقایسه‌ی برخی از توابع پایه‌ای شعاعی با $\varepsilon = ۱$

جدول(۳.۱)- معرفی توابع پایه‌ای شعاعی با استفاده از پارامتر c

توابع بی‌نهایت هموار	$\Phi(r)$
گوسی (GA)	$e^{-(\frac{r}{c})^{۲}}$
درجه ۲ چندگانه (MQ)	$\sqrt{c^{۲}+r^{۲}}$
درجه ۲ معکوس (IM)	$\frac{1}{c^{۲}+r^{۲}}$
درجه ۲ چندگانه معکوس (IMQ)	$\frac{1}{\sqrt{c^{۲}+r^{۲}}}$
درجه ۲ چندگانه تعمیم یافته	$(c^{۲}+r^{۲})^{\frac{v}{۲}} \quad v \neq ۰, v \notin ۲N$

در اینجا می‌خواهیم مبحث درونیابی توسط توابع پایه‌ای شعاعی معین‌مثبت و معین‌مثبت مشروط را معرفی و بررسی کنیم. در انتها نیز با ارائه‌ی چند مثال عددی و درونیابی با استفاده از این توابع، مزیت استفاده از آنها را در بحث درونیابی مشاهده خواهیم کرد .

۲.۴.۱ توابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت و معین مثبت مشروط

استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی در مسائل درونیابی با توجه به فرمول $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Phi(\| x - x_i \|)$ منجر به ایجاد یک دستگاه معادلات خطی می‌شود که دارای جواب یکتاست اگر و تنها اگر ماتریس مورد نظر وارون پذیر باشد. بنابراین توابع پایه‌ای برای درونیابی یا حل معادلات دیفرانسیلی مفیدند که ماتریس متناظر با آنها نامنفرد باشد. در این بخش قصد داریم در مورد شرایط ماتریس درونیابی $A = \{\Phi(x_i - x_j)\}_{j=1}^{n}$ با توجه به تابع پایه‌ای استفاده شده بحث کنیم. در ابتدا به معرفی توابع معین مثبت و کاملاً یکنوا می‌پردازیم.

تابع $\Phi: R^{d} \to R$ را معین مثبت گوییم هرگاه برای هر تعداد متناهی نقطه‌ی $x_1, x_2, \dots, x_n$ ماتریس $A_{i,j} = \{\Phi(x_i - x_j)\}_{i,j=1}^{n}$ معین نامنفی باشد بدین معنی که برای هر $u \in C^n$ داشته باشیم:

$$u^* A u = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i^* A_{ij} u_j \geq 0 \qquad (۴.۱.۱)$$

اگر برای x_i های متمایز و $d \in N$ داشته باشیم $u^* A u > 0$ آنگاه تابع Φ را معین مثبت اکید می‌نامند(که u^* ترانهاده‌ی ماتریس u می‌باشد). می‌دانیم که اگر تابع درونیاب معین مثبت اکید باشد آنگاه ماتریس درونیاب برای هر تعداد متناهی نقاط متمایز معین مثبت و درنتیجه نامنفرد می‌شود. بنابراین به دنبال توابعی هستیم که دارای خواص ذکر شده در بالا باشند.

در این جهت نیازمند بیان قضایا و معرفی ابزارهایی هستیم که در ادامه بدان می‌پردازیم، اما قبل از آن توابع کاملا یکنوا را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۴.۱: تابع $\Phi:[۰,\infty)\to \mathrm{R}$ روی $(۰,\infty)$ تابع کاملاً یکنوا نامیده می‌شود هرگاه در شرایط زیر صدق کند .

۱) $\Phi\in C^{\infty}(۰,\infty)$

۲) برای هر $t>۰$ و $K\in N\cup\{۰\}$ داشته باشیم : $(-۱)^{k}\Phi^{(k)}(t)\geq ۰$.

تعریف ۲.۴.۱: تابع $\Phi:[۰,\infty)\to \mathrm{R}$ را روی $[۰,\infty)$ کاملاً یکنوا می‌نامیم هرگاه روی $(۰,\infty)$کاملاً یکنوا بوده و در صفر پیوسته باشد.

قضیه ۱.۴.۱ (شوئنبرگ[۱]): فرض کنید تابع $\Phi:[۰,\infty)\to \mathrm{R}$ غیر ثابت باشد. در این صورت تابع Φ روی R^{d} معین مثبت است اگر و تنها اگر تابع $t\mapsto \Phi(\sqrt{\mathrm{t}})$ و $t\in[۰,\infty)$ روی $[۰,\infty)$ کاملاً یکنوا باشد[۲۱] . ■

نتیجه ۱.۴.۱: توابع گوسی و توابع درجه دو چندگانه معکوس برای هر $d\geq ۰$ روی R^{d} معین مثبت هستند.

اثبات : تابع f تعریف شده به وسیله‌ی

$$f(r)=\ \Phi(\sqrt{r})=\exp\,(-\mathrm{\varepsilon r})$$

برای هر $\varepsilon,r>۰$ و $\varepsilon\in N$ در رابطه‌ی

$$(-۱)^{k}f^{(k)}(r)=\varepsilon^{k}\exp\,(-\varepsilon r)>۰$$

صدق می‌کند، لذا بنا به قضیه‌ی شوئنبرگ، تابع گوسی معین مثبت است.

همچنین تابع IMQ نیز به صورت

$$f(r)=\ \Phi\big(\sqrt{r}\big)=(۱+\mathrm{\varepsilon}^{۲}\mathrm{r})^{-|\beta|}$$

۱- Shoenberg

بیان می‌شود که

$$(-۱)^k f^{(k)}(r) = \alpha(-۱)^{۲k}|\beta|(|\beta|+۱)\dots(|\beta|+k-۱)(۱+\varepsilon^۲ r)^{-|\beta|-k} > ۰$$

در عبارت بالا α بر حسب ε و بزرگتر از صفر است، در نتیجه عبارت بالا مثبت است و شرایط قضیه‌ی مورد نظر برقرار می‌باشد، لذا بنا به قضیه‌ی شوئنبرگ تابع پایه‌ای شعاعی IMQ نیز مثبت معین می‌باشد.

قضیه ۲.۴.۱: فرض کنید $g \in C^\infty[۰,\infty)$ کاملاً یکنوا و غیر ثابت باشد و به علاوه $g(۰) \geq ۰$، آن گاه A برای هر $\Phi(r) = g(r^۲)$ نامنفرد است. ■

نتیجه۲.۴.۱: تابع درجه دو چندگانه نیز معین مثبت است.

اثبات : داریم :

$$\Phi(r) = \sqrt{(\varepsilon r)^۲ + ۱} \Rightarrow \Phi(\sqrt{r}) = \sqrt{\varepsilon^۲ r + ۱} = g(r)$$

$$g'(r) = \frac{۱}{۲}\varepsilon^۲ \frac{۱}{\sqrt{\varepsilon^۲ r + ۱}}$$

از طرفی $g(۰) \geq ۰$ است و$\acute{g}(r)$ بنا به خواص ذکر شده تابعی کاملاً یکنواست، زیرا:

$$(-۱)^k (g'(r))^{(k)} = \varepsilon^{۲k+۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۲} \times \dots \times \frac{(۲k-۱)}{۲} \times (\varepsilon^۲ r + ۱)^{\frac{-(۲k+۱)}{۲}}$$

که عبارت بالا به ازای هر k طبیعی و هر $r \geq 0$ مثبت است ودر نتیجه $g'(r)$ یکنوا می‌شود.

پس با توجه به قضیه‌ی فوق تابع MQ نیز معین مثبت و ماتریس حاصل از درونیابی نامنفرد می-باشد.

در ادامه قضیه‌ی بوچنر[1] را بیان می‌کنیم که به بررسی توابع پایه‌ای شعاعی در حالت کلی‌تری می-پردازد :

قضیه ۳.۴.۱(بوچنر): اگر تبدیل فوریه برای یک تابع پیوسته $\Phi: \mathrm{R}^{\mathrm{d}} \to \mathrm{R}$ مثبت باشد آن‌گاه ماتریس متقارن A با درایه‌های $\Phi(\|x-y\|)$ که $x, y \in \Omega \subseteq \mathrm{R}^{\mathrm{d}}$ برای تمام نقاط متمایز و متناهی در $\Omega \subseteq \mathrm{R}^{\mathrm{d}}$ معین مثبت است. برعکس: اگر یک تابع پیوسته $\Phi: \mathrm{R}^{\mathrm{d}} \to \mathrm{R}$ چنان باشد که تمام ماتریس‌های متناهی با درایه‌های$\Phi(\|x-y\|)$ که$x, y \in \Omega \subseteq \mathrm{R}^{\mathrm{d}}$ معین مثبت باشد آن‌گاه

Φ باید تبدیل فوریه‌ی یک اندازه بورل متناهی مثبت باشد[۲] . ■

از قضیه‌ی فوق برای اثبات معین مثبت بودن توابع پایه‌ای شعاعی استفاده می‌شود. حال با وجود تمام قضایا و ابزار بیان شده در بالا توابع پایه‌ای شعاعی کاربردی و مفیدی موجود هستند که در شرایط گفته شده صدق نمی‌کنند و معین مثبت اکید نمی‌باشند. در این گونه موارد باید یک چند جمله‌ای با درجه‌ی ماکسیمال خاص به عبارت

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Phi(\|x - x_i\|) \qquad (۲.۴.۱)$$

اضافه شود. فرض کنید P_{Q-1}^{d} نشان‌دهنده‌ی فضای چندجمله‌ای‌های d متغیره و حداکثر از درجه-ی Q-۱ باشد. با انتخاب پایه‌ی $\{p_1, p_2, \ldots, p_q\}_1$ برای این فضا، بعد q به وسیله‌ی رابطه‌ی $q = \binom{Q-1+d}{d}$ به‌دست می‌آید.

حال با اضافه کردن جملات جدید، عبارت (۲.۴.۱) به صورت زیر تبدیل می‌شود :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Phi(\|x - x_i\|) + \sum_{p=1}^{q} B_p p_p(x) \qquad (۳.۴.۱)$$

اکنون q درجه آزادی موجود است که با افزودن q معادله‌ی همگن

$$\sum_{i}^{n=1} \lambda_i p_l(x) = 0 \qquad 1 \le l \le q$$

[1] Buchner-

این q درجه‌ی آزادی مسئله از بین می‌رود. در واقع با محدود کردن ضرایب $\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_n$ در عبارت (۳.۴.۱) جواب یکتای دستگاه گسترش یافته‌ی

$$\begin{cases} f(x_j) = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i \Phi(\|x_j - x_i\|) + \sum_{p=۱}^{q} B_p p_p(x_j) & ۱ \le j \le n \\ \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i p_l(x_j) = ۰ & ۱ \le l \le q \end{cases} \quad (۴.۴.۱)$$

درصورتی که $p \in P_{Q-۱}^{d}$ و $p(x_i) = ۰ ، ۱ \le i \le n$ تضمین می‌شود.

روابط بالا مربوط به دسته خاصی از توابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت مشروط از مرتبه‌ی Q می‌باشد. در حالتی که Q= ۰ توابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت اکید را خواهیم داشت زیرا اگر Q= ۰ باشد بنا به رابطه‌ی $q = \binom{Q-1+d}{d}$ داریم q= ۰ و جمله‌ی دوم عبارت (۳.۴.۱) حذف خواهد شد و به همان رابطه‌ی اولیه‌ی توابع پایه‌ای شعاعی (۲.۴.۱) منجر خواهد شد.با توجه به این مطالب، تعریف کلی زیر را داریم.

تعریف ۳.۴.۱: تابع $\Phi: R^d \to R$ معین مثبت مشروط از مرتبه Q است اگر برای هر مجموعه‌ی متناهی از $\Phi \subseteq R^d \to R$ صورت درجه دوم :

$$\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} \lambda_i \lambda_j \Phi(\|x_i - x_j\|)$$

برای هر $(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) \in \Omega$ که در آن λ_i ها در رابطه‌ی $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_l(x) = 0$ صدق می‌کنند، نامنفی باشد (p ها چند جمله‌ای‌هایی با درجه‌ی کمتر از Q می‌باشند.) آن‌گاهΦ اکیداً معین مثبت مشروط از مرتبه‌ی Q است، اگر برای هر بردار ناصفر $(\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_n)$ صورت درجه دوم مثبت باشد. لازم به ذکر است که $p \in P_{Q-۱}^{d}$ است و شرط درونیابی طبق دستگاه(۴.۴.۱) برقرار خواهد بود. دستگاه ذکر شده جهت حذف درجات آزادی که توسط p به وجود آمده، استفاده می‌شود. حال نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان تابع درونیاب یگانه را بر حسب توابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت مشروط به دست آورد. اگر $(\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_n)$ برداری دلخواه باشد که در دو دسته‌ی معادله‌ی دستگاه(۴.۴.۱)صدق کند آن‌گاه می‌توانیم برداری را که شامل درایه‌های$(\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_n)$

باشد در دو طرف معادله‌ی (۴.۴.۱) ضرب کرده و به شکل درجه دو با هسته $\Phi(\|x_j - x_{\mathrm{i}}\|)$ برسیم. از آنجا که $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_l(x) = 0$ می‌باشد. این فرم بنا به تعریف توابع معین مثبت مشروط، مثبت است. پس $f(x_j)$ نمی‌تواند صفر باشد مگر اینکه همه‌ی ضرایبش صفر شود. بنابراین تابع درونیاب به صورت یگانه وجود دارد. در سال ۱۹۸۶ میچلی[1] قضیه‌ای ارائه نمود که به کمک آن به راحتی قادر به یافتن مرتبه‌ی توابع معین مثبت مشروط می‌شویم.

قضیه۴.۴.۱ (میچلی[1]): اگر Φ تابع پیوسته باشد به طوری که

$$f^{(\mathrm{k})}(\mathrm{r}) = (-1)^{\mathrm{k}} \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{k}}}{\mathrm{dx}^{\mathrm{k}}} \Phi(\sqrt{r}) \qquad r > 0$$

کاملاً یکنوا و غیر ثابت باشد، آنگاه $\Phi(\|.\|)$ روی R^{d} اکیداً معین مثبت مشروط از مرتبه‌ی k می‌باشد. ■

حال با توجه به بحث‌های صورت گرفته، جدولی را ارائه می‌دهیم که در آن توابع پایه‌ای شعاعی در دو حالت معین مثبت و معین مثبت مشروط ارائه شده‌اند. توابع پایه‌ای ذکر شده در جدول (۴.۱) حالت‌های کلی‌تر توابع پایه‌ای ذکر شده در جداول شماره (۱.۱) و (۲.۱) هستند.

۱- Micchelli

جدول(۴.۱) - معرفی توابع پایه‌ای شعاعی

نام توابع پایه‌ای شعاعی	$\Phi(r)$	Q	شرط
گوسی	$e^{-(\varepsilon r)^2}$	$Q=0$	---
درجه دو معکوس	$(1+\varepsilon r^2)^{\frac{\beta}{2}}$	$Q=0$	$\beta<0$
ماترن	$\frac{2^{1-v}}{\Gamma(v)} r^v k_v(r)$	$Q=0$	$v>0$
درجه دو چندگانه	$(-1)^{\left\lceil\frac{\beta}{2}\right\rceil}(1+\varepsilon r^2)^{\frac{\beta}{2}}$	$\left\lceil\frac{\beta}{2}\right\rceil$	$\beta>0, \beta\notin 2N$
پلی هارمونیک	$(-1)^{\left\lceil\frac{\beta}{2}\right\rceil} r^\beta$	$\left\lceil\frac{\beta}{2}\right\rceil$	$\beta\notin 2N$
پلی هارمونیک	$(-1)^{1+\frac{\beta}{2}} r^\beta \log r$	$Q=1+\frac{\beta}{2}$	$\beta>0, \beta\in 2N$
اسپلاین صفحه نازک	$r^2 \log r$	$Q=2$	---

حال با توجه به اینکه در مورد وضعیت ماتریس بدست آمده از این گونه توابع بحث کردیم، می‌توانیم به بیان روش درونیابی بپردازیم و این در حالی است که از وجود جواب اطمینان خاطر داریم.

۵.۱ درونیابی با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی

درونیاب پایه‌ای شعاعی برای مقادیر مفروض $f_{\mathrm{i}} = f(x_i)$ در نقاط $x_i,\ i = ۱,۲,\dots,\mathrm{n}$ به صورت

$$s(x) = \sum_{i=۱}^{n} \lambda_{\mathrm{i}}\Phi\left(\|\mathrm{x} - x_i\|\right) \qquad (۱.۵.۱)$$

می‌باشد که در آن شرط درونیابی یعنی $S(x_i) = f(x_i),\ i = ۱,۲,\dots,\mathrm{n}$ برقرار می‌باشد.

رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت دستگاه معادلات خطی

$$A\lambda = F$$

نوشت که در آن

$$A = \begin{pmatrix} \Phi\left(\|x_۱ - x_۱\|\right) & \Phi\left(\|x_۱ - x_۲\|\right) & \dots & \Phi\left(\|x_۱ - x_n\|\right) \\ \Phi\left(\|x_۲ - x_۱\|\right) & \Phi\left(\|x_۲ - x_۲\|\right) & \dots & \Phi\left(\|x_۲ - x_n\|\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi\left(\|x_n - x_۱\|\right) & \Phi\left(\|x_n - x_۲\|\right) & \cdots & \Phi(\|x_n - x_n\|) \end{pmatrix}$$

است. A ماتریس درونیاب $n \times n$ با درایه‌های $i,j = ۱,۲,\dots,n$ و $A_{ij} = (\Phi\left\|\left(x_i - x_j\right)\right\|)$ و

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_۱ \\ \lambda_۲ \\ \vdots \\ \lambda_{\mathrm{n}} \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} f_۱ \\ f_۲ \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

بردارهای ستونی F معلوم و بردار λ مجهول می‌باشد. تابع Φ در ماتریس A یک تابع پایه‌ای شعاعی است و واضح است که با توجه به ضابطه‌ی توابع پایه‌ای شعاعی، ماتریس A همیشه ماتریسی متقارن می‌باشد. اگر از توابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت برای تشکیل A استفاده کنیم، A نیز معین مثبت و دستگاه همیشه دارای جواب یگانه است. اما اگر از توابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت