چکیده

نام خانوادگی: سبک‌پا **نام:** مریم	
عنوان پایان‌نامه: مشخص‌سازی ترایا ـ محدب فضاهای هیلبرت	
استاد راهنما: دکتر عبدالمحمد امین پور **استاد مشاور:** دکتر عبدالجبار بدیع‌الزمان	
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشتهٔ:** ریاضی **گرایش:** آنالیز **محل تحصیل:** دانشگاه شهید چمران اهواز **دانشکده:** علوم ریاضی و کامپیوتر **تاریخ فارغ‌التحصیلی:** ۱۳۸۷/۱۲/۵ **تعداد صفحه:** ۱۳۰	
واژه‌های کلیدی: فضای ترایا ـ محدب، نقطه بزرگ، عنصر فلین، زوج فلین، فضای باناخ، تصویر خطی، دوران، توپولوژی ضعیف و توپولوژی ضعیف ـ ستاره	

چکیده: در این رساله فضاهای باناخ ترایا ـ محدب حقیقی، مانند X، که دارای یک تصویر یک ـ بعدی دو انقباضی P روی X باشند، مورد بررسی قرار گرفته است. انگیزه اصلی این مقاله [۲۱] برگرفته از مسئله دوران باناخ ـ مِیزور است. بخش مهمی از کار در رابطه با این سؤال است که اگر فضای باناخ ترایا ـ محدب X شامل یک زیرفضای یک ـ هم‌بعدی و یک ـ متمم‌شده مانند $L \subseteq X$ باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت که X با یک فضای هیلبرت یکریخت است؟ در این رساله مشخص‌سازی‌ها یک بار بر اساس نقاط بزرگ و بار دیگر با فرض ترایا ـ محدب بودن فضا صورت گرفته است. در فصل (۲) قضایای کاربردی و مورد نیاز بیان شده است و سپس قضایا و نتایج اصلی در فصل‌های (۳) و (۴) ذکر شده‌اند، به این ترتیب که در فصل (۳) تعاریف نقطه‌ی بزرگ و عنصر فلین را ارائه کرده و به مشخص‌سازی فضاها بر اساس وجود نقطه بزرگ و عنصر فلین پرداخته‌ایم و در فصل (۴) فضاها را با فرض ترایا ـ محدب بودن آن‌ها مشخص‌سازی کرده‌ایم.

فهرست مندرجات

۱ تعاریف و قضایای مقدماتی ۲

۱.۱ آنالیز تابعی ۲

۲.۱ توپولوژی ۱۰

۲ قضایای کاربردی ۱۵

۱.۲ قضایای کاربردی ۱۵

۳ نقاط بزرگ و عناصر فلین ۵۷

۱.۳ نقاط بزرگ و عناصر فلین ۵۷

۴ مشخص‌سازی براساس ترایا ـ محدب بودن فضا ۸۶

۱.۴ مشخص‌سازی براساس ترایا ـ محدب بودن فضا ۸۶

A واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی ۱۱۱

B واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی ۱۲۰

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل به ارائه برخی تعاریف و قضایای مقدماتی، به اندازه‌ای که در فصل‌های بعدی مورد نیازند، می‌پردازیم. در این فصل گروه‌ها، فضاهای نرم‌دار، فضاهای باناخ و هیلبرت و عملگرهای روی آن‌ها تعریف شده‌اند. این فصل مشتمل بر دو بخش است که در بخش اول مفاهیم و قضایای مربوط به آنالیز تابعی و در بخش دوم مفاهیم و قضایای مورد نیاز از توپولوژی مطرح می‌گردد.
خاطرنشان می‌سازیم که در سراسر این رساله مجموعه اعداد طبیعی را با $\mathbb{N}$، ضرب دکارتی $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ را با $\mathbb{N}^{2}$، مجموعه اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ و مجموعه اعداد حقیقی نامنفی را با $\mathbb{R}^{\geq 0}$ نشان می‌دهیم.

۱.۱ آنالیز تابعی

تعریف ۱.۱.۱ : یک گروه مجموعه‌ای است مانند G همراه با عمل دوتایی $(x,y) \longrightarrow x.y$ از $G \times G \longrightarrow G$ که دارای ویژگی‌های زیر باشد:

الف) به ازای هر $x,y,z \in G$ داشته باشیم $x.(y.z) = (x.y).z$؛

ب) $e \in G$ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $x \in G$، $x.e = e.x = x$؛

پ) متناظر با هر $x \in G$، $x' \in G$ وجود داشته باشد به طوری که $x.x' = x'.x = e$.

$H \subseteq G$ را زیرگروه G می‌نامیم، هرگاه H تحت عمل دوتایی مذکور، بسته باشد و با این عمل تشکیل یک گروه دهد.

تعریف ۲.۱.۱ : یک نرم در فضای برداری X، یک تابع حقیقی مقدار روی X است که در شرایط زیر صدق کند:

الف) برای هر $x \in X$، $\|x\| \geq 0$؛

ب) $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$؛

پ) برای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$؛

ت) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

در این صورت $(X, \|.\|)$ را یک فضای نرم‌دار گوییم.

هر نرم در X، یک متر d به صورت $\mathrm{d}(x,y) = \|x-y\|$ تعریف می‌کند که آن را متر تولید شده توسط نرم X می‌نامیم. بنابراین هر فضای نرم‌دار یک فضای متری است.

فضای نرم‌دار $(X, \|.\|)$ را یک فضای باناخ خوانیم، هرگاه تحت متر تولید شده توسط نرم، کامل باشد، یعنی هر دنباله کشی در آن همگرا باشد.

نکته ۳.۱.۱ : در این رساله فضاهای برداری را روی میدان $\mathbb{R}$ و با بعد بزرگتر از ۲ در نظر می‌گیریم، مگر آن که خلاف آن ذکر شود.

مثال ۴.۱.۱ : اگر $1 \leq p < \infty$، X یک مجموعه دلخواه، β_X یک σ- جبر از زیرمجموعه‌های X و μ یک اندازه روی β_X باشد، آن‌گاه فضای بردای $L^p(X)$ متشکل از توابع اندازه‌پذیر روی X مانند f به قسمی که $\int |f|^p d\mu < \infty$ همراه با نرم $\|f\|_p = (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$ یک فضای باناخ است.
همچنین فضای $L^\infty(X)$ را مجموعه توابع اندازه‌پذیر روی X مانند f تعریف می‌کنیم به طوری که f تقریباً همه جا کران‌دار باشد. $L^\infty(X)$ با نرم

$$\|f\|_\infty = \inf \{ \ S_f(N) \ : \ N \in \beta_X, \ \mu(N) = 0 \}$$

یک فضای باناخ است که در آن $S_f(N) = \sup \{ |f(x)| \ : \ x \notin N\}$.

مثال ۵.۱.۱ : اگر $1 \leq p < \infty$ و Γ یک مجموعه دلخواه باشد، در این صورت $l^p(\Gamma)$ را مجموعه تمامی توابع $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم به قسمی که $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma)|^p < \infty$. چنانچه به ازای هر $f \in l^p(\Gamma)$ قرار دهیم $\|f\|_p = (\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma)|^p)^{\frac{1}{p}}$، آن‌گاه $l^p(\Gamma)$ با این نرم، یک فضای باناخ است.

به وضوح برای $\gamma_0 \in \Gamma$، تابع

$$e_{\gamma_0} = \begin{cases} 1 & \gamma = \gamma_0 \\ 0 & \gamma \neq \gamma_0 \end{cases}$$

متعلق به $l^p(\Gamma)$ است و آن را یک بردار کانونی در فضای $l^p(\Gamma)$ گوییم. به علاوه، $l^p(\Gamma) = \overline{\text{span}}(\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma})$.

در حالتی که Γ مجموعه اعداد طبیعی باشد، $l^p(\Gamma)$ را با l^p نشان می‌دهیم که اعضای آن به صورت دنباله‌هایی مانند $(x_n) \subset \mathbb{R}$ هستند به طوری که $\sum\limits_n |x_n|^p < \infty$. در این صورت برای هر $x = (x_n) \in l^p$ داریم $\|x\|_p = (\sum\limits_n |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$. به علاوه، $x = \sum\limits_n x_n e_n$.

در صورتی که $p = \infty$، مجموعه توابع کران‌دار $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ را به $l^\infty(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم که بردارهای کانونی آن به نحو مشابه تعریف می‌شوند. چنانچه $\Gamma = \mathbb{N}$، آن‌گاه فضای $l^\infty(\Gamma)$ را به l^∞ نمایش می‌دهیم، که همان مجموعه‌ی دنباله‌های کران‌دار در $\mathbb{R}$ است.

تعریف ۶.۱.۱ : اگر Γ یک مجموعه دلخواه باشد، $c_{00}(\Gamma)$ را مجموعه توابع حقیقی مقدار مانند $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم، در صورتی که مجموعه $\{\gamma \in \Gamma \ : \ f(\gamma) \neq 0\}$ متناهی باشد.

در حالتی که $\Gamma = \mathbb{N}$، $c_{00}(\Gamma)$ را با c_{00} نشان می‌دهیم که شامل دنباله‌هایی است که تعداد جملات ناصفر آن‌ها متناهی است.

تعریف ۷.۱.۱ : فرض می‌کنیم X یک فضای برداری و A زیرمجموعه‌ای ناتهی از آن باشد. غلاف محدب[1] A را مجموعه عناصری مانند $b = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i a_i \in X$ تعریف می‌کنیم که در آن $n \in \mathbb{N}$

[1] convex hull

و به ازای هر $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$، $t_i \geq 0$، $a_i \in A$ و $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$. غلاف محدب مجموعه A را با $\mathrm{co}(A)$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$\mathrm{co}(A) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} t_i a_i \ : \ n \in \mathbb{N}, \ 1 \leq i \leq n, \ a_i \in A, \ t_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \Big\}$$

از آن‌جا که مجموعه $\{t_i \ : \ i = 1, 2, \ldots, n\}$ را می‌توان به عنوان دنباله‌ای مانند (t_m) در نظر گرفت که در آن برای $m > n$، $t_m = 0$ پس $(t_m) \in c_{00}$. از طرفی برای هر $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$، $t_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$، لذا $(t_m) \in l^1$ و $\|(t_m)\| = 1$. قرار می‌دهیم:

$$S_{l^1_+} := \Big\{ x = (x_n) \in l^1 \ : \ \|x\| = 1, \ (x_n) \subseteq \mathbb{R}^{\geq 0} \Big\}$$

آن‌گاه $(t_m) \in S_{l^1_+} \cap c_{00}$. بنابراین غلاف محدب A را به صورت زیر نیز می‌توان تعریف کرد:

$$\mathrm{co}(A) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} t_i a_i \ : \ (t_i) \in S_{l^1_+} \cap c_{00} \Big\}.$$

آشکار است که اگر $M \subseteq \mathbb{N}^2$ و $A = \{x_{i_1, i_2} \ : \ (i_1, i_2) \in M\} \subseteq X$، آن‌گاه

$$\mathrm{co}(A) = \Big\{ \sum_{(i_1, i_2) \in M} t_{i_1, i_2} x_{i_1, i_2} \ : \ \{t_{i_1, i_2}\}_{i_i, i_2} \in S_{l^1_+(M)} \cap c_{00}(M) \Big\}$$

تعریف ۸.۱.۱ : یک ضرب داخلی روی فضای برداری X یک تابع حقیقی مقدار روی X است که برای هر $x, y, z \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$ در شرایط زیر صدق کند:

الف) $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$؛

ب) $< \alpha x, y >= \alpha < x, y >$؛

پ) $< x, y >=< y, x >$ و $< x, x > \geq 0$؛

ت) $< x, x >= 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

در این صورت X را فضای ضرب داخلی گوییم. هر ضرب داخلی در X، یک نرم به صورت $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ برای هر $x \in X$ تعریف می‌کند. بنابراین هر فضای ضرب داخلی یک فضای نرم‌دار و درنتیجه یک فضای متری است.

فضای ضرب داخلی X را یک فضای هیلبرت می‌نامیم، هرگاه تحت متر تولید شده توسط ضرب داخلی کامل باشد.

تعریف ۹.۱.۱ : اگر X و Y دو فضای برداری باشند، هر تابع از X به Y مانند T یک عملگر خطی نامیده می‌شود هرگاه:

الف) $D(T)$ (دامنه T)، فضای برداری باشد؛

ب) برای هر $x, y \in D(T)$ و اسکالر $\alpha \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \quad , \quad T(\alpha x) = \alpha T(x).$$

فرض کنیم X و Y دو فضای نرم‌دار و $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی باشد. T را کران‌دار گوییم هرگاه عدد حقیقی $c \geq ۰$ موجود باشد به قسمی که

$$\|T(x)\| \leq c\|x\| \quad , \quad \forall x \in D(T) \qquad (۱)$$

اگر X و Y دو فضای نرم‌دار باشند، آن‌گاه مجموعه تمام عملگرهای خطی کران‌دار از X به Y را به $B(X,Y)$ نمایش می‌دهیم. به وضوح، $B(X,Y)$ همراه با عمل جمع و ضرب اسکالر

$$(T_۱ + T_۲)(x) = T_۱(x) + T_۲(x) \quad , \quad (\alpha T)(x) = \alpha T(x)$$

یک فضای برداری است.

برای $T \in B(X,Y)$، تعریف می‌کنیم:

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \ : \ x \in D(T), \ x \neq ۰\right\} = \sup_{\|x\|=۱} \|T(x)\|$$

که آشکارا یک نرم در $B(X,Y)$ است، پس $B(X,Y)$ با نرم مذکور یک فضای نرم‌دار است. به علاوه، $\|T\|$ کوچکترین عدد حقیقی نامنفی است که در رابطه (۱) صدق می‌کند.

نکته ۱۰.۱.۱ : مجموعه عملگرهای خطی کران‌دار از فضای X به X یعنی $B(X,X)$ را به اختصار با $B(X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۱.۱ : اگر X و Y دو فضای نرم‌دار باشند، عملگر خطی $T : X \longrightarrow Y$ را یک یکریختی [۲] از فضای X بروی فضای Y نامیم هرگاه دوسویی و حافظ نرم باشد یعنی به ازای هر $x \in X$، $\|T(x)\| = \|x\|$.

اگر X با یک زیرفضا از فضای برداری Y یکریخت باشد، گوییم X قابل نشاندن در Y است.

تعریف ۱۲.۱.۱ : اگر X یک فضای برداری باشد، هر یکریختی از X بروی X را یک دوران روی X می‌نامیم. مجموعه دوران‌های روی X با عمل ترکیب نگاشت‌ها تشکیل یک گروه می‌دهد که به گروه دوران‌های X موسوم است و آن را با نماد G_X نمایش می‌دهیم. برای $x \in X$، مدار x را با $G_X(x)$ نشان می‌دهیم و به صورت

$$G_X(x) = \{T(x) \ : \ T \in G_X\}$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۳.۱.۱ : اگر X یک فضای برداری باشد، آن‌گاه عملگر خطی $f : D(f) \subseteq X \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک تابعک خطی گوییم. هرگاه f کران‌دار باشد، آن‌گاه f را تابعک خطی کران‌دار خوانیم.

مجموعه تمام تابعک‌های خطی کران‌دار روی X یعنی $B(X, R)$ را با X^* نمایش می‌دهیم و آن را فضای دوگان X می‌نامیم. از تعریف ۹.۱.۱ برمی‌آید که X^* یک فضای نرم‌دار است و به همین ترتیب می‌توانیم فضای دوگان X^*، یعنی $(X^*)^*$ را تعریف کنیم، که آن را با X^{**} نمایش داده و فضای دوگان دوم X می‌نامیم.

قضیه ۱۴.۱.۱ (قضیه هان- باناخ [۳] در فضاهای نرم‌دار): فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار و f یک تابعک خطی کران‌دار روی زیرفضای Z از X باشد. آن‌گاه تابعک خطی و کران‌دار $\tilde{f}$ روی X وجود دارد به طوری که برای هر $x \in Z$، $\tilde{f}(x) = f(x)$ و $\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z$.

اثبات: رجوع کنید به مرجع [۱۲]. ■

[۲] isomorphism
[۳] Hahn-Banach theorem

قضیه ۱۵.۱.۱ : فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار، $x_\circ \in X$ و $x_\circ \neq \circ$ باشد. آن‌گاه تابعک خطی و کران‌دار $\tilde{f}$ روی X وجود دارد به قسمی که

$$\tilde{f}(x_\circ) = \|x_\circ\| \quad , \quad \|\tilde{f}\| = ۱$$

اثبات: فرض می‌کنیم Z زیرفضای تولید شده توسط بردار $x_\circ$ باشد.آن‌گاه تابعک خطی f روی Z باضابطه‌ی

$$f(x) = f(\alpha x_\circ) = \alpha\|x_\circ\| \qquad (۱)$$

کران‌دار با $\|f\| = ۱$ است. زیرا

$$|f(x)| = |f(\alpha x_\circ)| = |\alpha|\|x_\circ\| = \|\alpha x_\circ\| = \|x\|$$

از قضیه ۱۴.۱.۱ نتیجه می‌شود که f دارای توسیع خطی و کران‌دار از Z به X مانند $\tilde{f}$ است به قسمی که $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. اما $\|f\| = ۱$، پس $\|\tilde{f}\| = ۱$. به علاوه، از (۱) نتیجه می‌شود که $\tilde{f}(x_\circ) = f(x_\circ) = \|x_\circ\|$. ■

تعریف ۱۶.۱.۱ : اگر X یک فضای نرم‌دار و $x \in X$ به گونه‌ای باشد که $\|x\| = ۱$، آن‌گاه با توجه به قضیه قبل تابعک خطی و کران‌دار f روی X وجود دارد به طوری که $\|f\| = ۱$ و $f(x) = \|x\| = ۱$، این تابعک خطی و کران‌دار را تابعک محمل[۴] x می‌نامیم. به عبارت دیگر تابعک محمل x، یک تابعک خطی و کران‌دار روی X مانند f است به قسمی که $f(x) = \|x\| = \|f\| = ۱$. بنابراین قضیه قبل وجود تابعک محمل را برای هر $x \in X$ که $\|x\| = ۱$ است، تضمین می‌کند.

تعریف ۱۷.۱.۱ : اگر X یک فضای باناخ باشد آن‌گاه؛

الف) دنباله (x_n) را همگرای قوی به $x \in X$ گویند، هرگاه $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = \circ$.

ب) گوییم (x_n) همگرای ضعیف به $x \in X$ است، هرگاه برای هر $f \in X^*$،

[۴] support functional

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. در این مورد می‌نویسیم $x_n \xrightarrow{\mathrm{w}} x$ وقتی $n \to \infty$ و x را حد ضعیف (x_n) می‌نامیم.

به سهولت می‌توان دید که همگرایی قوی، همگرایی ضعیف را نتیجه می‌دهد.

تعریف ۱۸.۱.۱ : فرض کنیم X و Y فضاهای نرم‌دار و $(T_n) \subseteq B(X,Y)$ دنباله‌ای از عملگرهای خطی و کران‌دار باشد. در این صورت،

الف) گوییم دنباله (T_n) همگرای یکنواخت به $T \in B(X,Y)$ است، هرگاه $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$، T را حد یکنواخت (T_n) می‌خوانیم.

ب) دنباله (T_n) را همگرای قوی به $T \in B(X,Y)$ می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x \in X$، $\lim_{n\to\infty} \|T_n(x) - T(x)\| = 0$، یعنی دنباله $(T_n(x))$ در Y همگرای قوی به $T(x)$ باشد. در این مورد T را حد قوی (T_n) گوییم و می‌نویسیم $T_n \xrightarrow{\mathrm{s}} T$ وقتی $n \to \infty$.

پ) (T_n) را همگرای ضعیف به $T \in B(X,Y)$ نامند، اگر برای هر $x \in X$ دنباله $(T_n(x))$ در Y همگرای ضعیف به $T(x)$ باشد. به بیان دیگر برای هر $f \in X^*$ و هر $x \in X$، $\lim_{n\to\infty} |f(T_n(x)) - f(T(x))| = 0$، در این حالت T را حد ضعیف (T_n) می‌نامیم و می‌نویسیم $T_n \xrightarrow{\mathrm{w}} T$ وقتی $n \to \infty$.

تعریف ۱۹.۱.۱ : فرض می‌کنیم X یک فضای نرم‌دار و (f_n) دنباله‌ای از تابعک‌های کران‌دار و خطی در X^* باشد. در این صورت

الف) گوییم (f_n) به $f \in X^*$ همگرای قوی است، هرگاه $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ و f را حد قوی (f_n) می‌نامیم.

ب) دنباله (f_n) را همگرای ضعیف- ستاره به $f \in X^*$ خوانیم هرگاه برای هر $x \in X$، $\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$.

تعریف ۲۰.۱.۱ : فرض کنید X یک فضای برداری و Y زیرفضایی از آن باشد. در این صورت مجموعه‌ی $\{x+Y \ : \ x \in X\}$ همراه با دو عمل جبری

$$(w+Y)+(x+Y)=(w+x)+Y \quad , \quad \alpha(x+Y)=\alpha x+Y$$

تشکیل یک فضای برداری می‌دهد که آن را فضای خارج قسمتی X نسبت به Y می‌گویند و آن را با نماد X/Y نمایش می‌دهند. در این صورت بعد X/Y را هم‌بعد Y تعریف می‌کنیم و با $\operatorname{codim}(Y)$ نمایش می‌دهیم.

۲.۱ توپولوژی

تعریف ۱.۲.۱ : یک توپولوژی روی مجموعه X یک گردایه‌ی τ از زیرمجموعه‌های X است به قسمی که

الف) هر اجتماعی از اعضای τ متعلق به τ باشد؛

ب) هر اشتراک متناهی از اعضای τ، مشمول در τ باشد؛

پ) $\emptyset, X \in \tau$.

در این صورت زوج (X,τ) را یک فضای توپولوژیک می‌نامیم، یا به اختصار می‌گوییم X یک فضای توپولوژیک است. به علاوه،

۱) اعضای τ را مجموعه‌های باز توپولوژی τ می‌نامیم.

۲) مجموعه $F \subseteq X$ را بسته نامیم هرگاه $X-F \in \tau$.

۳) اگر $A \subseteq X$، آن‌گاه کوچکترین مجموعه بسته شامل A را بستار A می‌خوانیم و آن را با $\overline{A}$ نمایش می‌دهیم.

۴) هرگاه $A \subseteq X$ در این صورت درون A عبارتست از بزرگترین مجموعه‌ی باز مشمول در A و آن

را با نماد A° نمایش می‌دهیم.

۵) اگر $x \in X$، آن‌گاه هر مجموعه باز شامل x را یک τ- همسایگی باز حول x می‌خوانیم.

۶) $A \subseteq X$ را چگال[۵] در X می‌نامیم، هرگاه $\overline{A} = X$. اگر A شمارش‌پذیر باشد، فضای توپولوژیک (X, τ) را جدایی‌پذیر[۶] گوییم.

نکته ۲.۲.۱ : اگر X یک فضای نرم‌دار باشد، آن‌گاه X یک فضای متری و در نتیجه یک فضای توپولوژیک است. به بیان دیگر می‌شود گفت که گردایه‌ی

$$\tau = \Big\{ \{x \in X \ : \ \|x - y\| < r\} \ \ : \ y \in X, \ r > \circ \Big\}$$

یک توپولوژی روی X است که آن را توپولوژی حاصل از نرم می‌نامیم.

اگر $x \in X$ و $r > \circ$، آن‌گاه

الف) مجموعه‌ی $B(x,r) = \{y \in X \ : \ \|x - y\| < r\}$ را گوی باز حول x و به شعاع r (یا همسایگی باز حول x و به شعاع r) گوییم. بدیهی است که $B(x,r)$ یک مجموعه‌ی باز است.

ب) گوی بسته حول x و به شعاع r را با نماد $\overline{B}(x,r)$ نمایش می‌دهیم و به صورت

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in X \ : \ \|x - y\| \leq r\}$$

تعریف می‌کنیم که در X بسته است.

پ) گوی بسته حول صفر و به شعاع یک را گوی بسته یکه می‌خوانیم و با نماد B_X نمایش می‌دهیم. به بیان دیگر

$$B_X = B(\circ, ۱) = \Big\{ y \in X \ : \ \|y\| \leq ۱ \Big\}$$

ت) $S(x,r) = \{y \in X \ : \ \|x - y\| = r\}$ را کره حول x و به شعاع r تعریف می‌کنیم که به وضوح در X بسته است.

ث) کره حول صفر و به شعاع یک را کره یکه می‌نامیم و با نماد S_X نشان می‌دهیم، یعنی

---

[۵] dense

[۶] separable

$$S_X = \Big\{ y \in X \ : \ \|y\| = 1 \Big\}.$$

تعریف ۳.۲.۱ : فرض می‌کنیم X و Y فضاهای نرم‌دار، $U \subseteq X$ باز و $F : U \longrightarrow Y$ یک نگاشت باشد. مشتق گاتو[7] F در نقطه $u \in U$ و در راستای $x \in X$ را با نماد $dF(u;x)$ نمایش می‌دهیم و به صورت

$$dF(u,x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(u+\varepsilon x) - F(u)}{\varepsilon} \qquad (1)$$

تعریف می‌کنیم. اگر برای هر $x \in X$ حد بالا وجود داشته باشد، آن‌گاه گوییم F در نقطه $u \in U$ مشتق گاتو دارد. علاوه بر این، اگر در هر نقطه $u \in U$ حد (۱) برای هر $x \in X$ وجود داشته باشد، آن‌گاه عملگر

$$dF(u;.) : X \longrightarrow Y$$

با ضابطه‌ی

$$dF(u;x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(u+\varepsilon x) - F(u)}{\varepsilon}$$

را عملگر مشتق گاتو می‌نامیم.

چنانچه $dF(u,.)$ نیز در $u \in U$ مشتق گاتو داشته باشد، گوییم F در $u \in U$ مشتق گاتو درجه دو دارد. به همین ترتیب متناظر با هر $n \in \mathbb{N}$ می‌توان مشتق گاتوی درجه‌ی n را تعریف کرد. اگر F در $u \in U$ از هر درجه مشتق گاتو داشته باشد، u را نقطه هموار گاتو[8] F و F را نگاشت هموار گاتو در $u \in U$ می‌خوانیم.

تعریف ۴.۲.۱ : فرض می‌کنیم X یک فضای نرم‌دار و $U \subseteq X$ باز باشد. $x \in U$ را نقطه هموار گاتو یا به اختصار نقطه هموار گوییم، هرگاه نگاشت $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ در $x \in U$ از هر درجه‌ای مشتق گاتو داشته باشد.

---

[7] Gateaux

[8] Gateaux smooth point

لم ۵.۲.۱ : در فضای باناخ X شرایط زیر معادلند:

الف) $x \in S_X$ یک نقطه هموار است.

ب) اگر $(f_n), (g_n) \subseteq S_{X^*}$ دنباله‌هایی از تابعک‌ها باشند که

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = ۱$$

آن‌گاه $f_n - g_n \longrightarrow^{w^*} ۰$.

پ) تابعک یکتای $f \in S_{X^*}$ وجود دارد به قسمی که $f(x) = ۱$. به عبارت دیگر تابعک محمل x یکتاست.

اثبات: رجوع کنید به مرجع [۱۰]. ■

تعریف ۶.۲.۱ : اگر X یک فضای نرم‌دار و X^* فضای دوگان X باشد، آن‌گاه توپولوژی ضعیف تولید شده توسط X^* روی X را توپولوژی ضعیف روی X نامند. یعنی کوچکترین توپولوژی روی X به قسمی که هر $f \in X^*$ نسبت به آن پیوسته باشد. این توپولوژی را به $\mathrm{w}(X, X^*)$ و در صورت عدم ابهام با w نشان می‌دهیم.

در این صورت X دو توپولوژی دارد؛ یکی توپولوژی حاصل از نرم و دیگری توپولوژی ضعیف. لازم است متذکر شویم که در سراسر این رساله منظور از توپولوژی روی X همان توپولوژی حاصل از نرم است. در غیر این صورت صریحاً بیان خواهیم کرد.

برای هر $\varepsilon > ۰$ و هر $x \in X$ قرار می‌دهیم:

$$U(x, G, \varepsilon) = \Big\{ y \in X \ : \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \ \forall f \in G \Big\}$$

که در آن $G \subseteq X^*$ و متناهی است. $U(x, G, \varepsilon)$ را یک همسایگی x در این توپولوژی می‌نامیم و گوییم $U \subseteq X$ یک مجموعه‌ی w- باز است، اگر و تنها اگر برای هر $x \in U$ مجموعه‌ی متناهی $G \subseteq X^*$ و $\varepsilon > ۰$ وجود داشته باشد به طوری که $U(x, G, \varepsilon) \subseteq U$. اگر $A \subseteq X$ نسبت به این توپولوژی فشرده باشد آن را فشرده ضعیف می‌نامیم و دنباله (x_n) نسبت به این توپولوژی

همگراست اگر و تنها اگر $x_n \overset{\mathrm{w}}{\longrightarrow} x$.

اگر X^{**} دوگان دوم X باشد، آن‌گاه عملگر خطی $C : X \longrightarrow X^{**}$ با ضابطه‌ی $C(x) = g_x$ یک یکریختی از فضای X بروی $C(X) \subseteq X^{**}$ است که در آن g_x یک تابعک خطی روی X^{**} است به قسمی که $g_x(f) = f(x)$.

توپولوژی تولید شده توسط خانواده $C(X) = \{g_x : x \in X\}$ را توپولوژی ضعیف- ستاره گویند و با $\mathrm{w}^*(X, X^*)$ یا با w^* نشان می‌دهند. یعنی کوچکترین توپولوژی روی X^* به قسمی که برای هر $x \in X$، $C(x) = g_x$ پیوسته باشد.

اگر $\varepsilon > ۰$ و $f_\circ \in X^*$ و $G = \{x_۱, x_۲, \dots, x_n\} \subseteq X = C(X)$ یک مجموعه متناهی باشد، آن‌گاه

$$U(f_\circ, G, \varepsilon) = \Big\{f \in X^* \ : \ |f(x_i) - f_\circ(x_i)| < \varepsilon, \ ۱ \leq i \leq n\Big\}$$

را یک همسایگی $f_\circ \in X^*$ در این توپولوژی می‌نامند.

اگر (f_n) دنباله‌ای در X^* باشد، آن‌گاه این دنباله در توپولوژی ضعیف- ستاره همگرا به $f \in X^*$ است اگر و فقط اگر برای هر $x \in X$، $\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = ۰$.

قضیه **۷.۲.۱** (قضیه آلااُقلو[۹]): اگر X یک فضای نرم‌دار باشد، آن‌گاه گوی بسته یکه $B_{X^*} = \Big\{f \in X^* \ : \ \|f\| \leq ۱\Big\}$ در توپولوژی ضعیف- ستاره فشرده است.

اثبات: رجوع کنید به مرجع [۲]. ■

---

[۹] Alaoglu's theorem

فصل ۲

قضایای کاربردی

در این فصل به معرفی برخی مفاهیم اساسی و اصلی و همچنین به بیان بعضی از تعاریف و قضایای مورد نیاز خود که در فصل‌های آتی به آن نیاز پیدا خواهیم کرد، می‌پردازیم. اثبات قضایای معروف اغلب به کتب مربوط ارجاع داده شده است.

۱.۲ قضایای کاربردی

لم ۱.۱.۲ [۱] : فرض می‌کنیم X یک فضای باناخ و $g \in S_{X^*}$ یک تابعک محمل برای $x \in S_X$ باشد. اگر دنباله $(x_n) \subseteq B_X$ وجود داشته باشد به طوری که $x \in \overline{\mathrm{co}}(\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\})$ آن‌گاه:

الف) برای هر $\varepsilon > ۰$، $x \in \overline{\mathrm{co}}(\{x_n \ : \ g(x_n) > ۱ - \varepsilon\})$؛

ب) برای هر $l \in \mathbb{N}$ مجموعه باپایان $K_l \subset \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که؛

$$\mathrm{dist}(x, \mathrm{co}(\{x_n \ : \ n \in K_l\})) < \frac{۱}{l} \qquad , \qquad \inf\{g(x_n) \ : \ n \in K_l\} \geq ۱ - \frac{۱}{l},$$

پ) دنباله $(y_n) \subseteq \{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ وجود دارد به قسمی که $\lim_{j\to\infty} g(y_j) = ۱$ و برای هر $l \in \mathbb{N}$، $x \in \overline{\mathrm{co}}(\{y_j \ : \ j \geq l\})$.

[۱] طرح اثبات (الف) را در مرجع [۲۱] می‌توان یافت.

اثبات: **الف)** فرض می‌کنیم که $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. چون طبق فرض $x \in \overline{\text{co}}(\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\})$ ملاحظه می‌کنیم که دنباله ای مانند (a_k) در $\text{co}(\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\})$ وجود دارد به طوری که $\lim_{k\to\infty} a_k = x$. بنابراین برای هر $k \in \mathbb{N}$ دنباله‌ای مانند $(c_n^{(k)})_n$ در $S_{l_+^۱} \cap c_{۰۰}$ هست به قسمی که $a_k = \sum_n c_n^{(k)} x_n$، پس $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_n c_n^{(k)} x_n = x$.

حال متناظر با $\varepsilon > ۰$ و هر $k \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم:

$$P_\varepsilon^{(k)} := \sum_{n:g(x_n)\geq ۱-\varepsilon} c_n^{(k)} \qquad , \qquad Q_\varepsilon^{(k)} := ۱ - P_\varepsilon^{(k)}.$$

با در نظر گرفتن این حقیقت که برای هر $k \in \mathbb{N}$، فقط تعداد متناهی از جملات دنباله $(c_n^{(k)})_n$ ناصفر است، درمی‌یابیم که $P_\varepsilon^{(k)}$ وجود دارد و متناهی است. بنابراین $Q_\varepsilon^{(k)}$ نیز موجود و متناهی خواهد بود. علاوه بر این، تعاریف فوق ایجاب می‌کند که

$$\forall k \in \mathbb{N}; \quad ۱ = \sum_n c_n^{(k)} = \sum_{n:g(x_n)\geq ۱-\varepsilon} c_n^{(k)} + \sum_{n:g(x_n)< ۱-\varepsilon} c_n^{(k)} = P_\varepsilon^{(k)} + \sum_{n:g(x_n)< ۱-\varepsilon} c_n^{(k)}.$$

پس $\sum_{n:g(x_n)<۱-\varepsilon} = ۱ - P_\varepsilon^{(k)} = Q_\varepsilon^{(k)}$ (برای هر $k \in \mathbb{N}$).

اکنون برآنیم که نشان دهیم $\lim_{k\to\infty} P_\varepsilon^{(k)} = ۰$. برای اثبات آن ملاحظه می‌کنیم که

$$Q_\varepsilon^{(k)}(۱-\varepsilon) = \sum_{n:g(x_n)< ۱-\varepsilon} c_n^{(k)}(۱-\varepsilon) > \sum_{n:g(x_n)< ۱-\varepsilon} c_n^{(k)} g(x_n) \ , \ \ \forall k \in \mathbb{N} \quad (۱)$$

از سویی، $\|g\| = ۱$ و $(x_n) \subseteq B_X$. درنتیجه برای هر $n \in \mathbb{N}$، $|g(x_n)| \leq \|x_n\| \leq ۱$ و لذا به ازای هر $n, k \in \mathbb{N}$، $g(x_n)c_n^{(k)} \leq c_n^{(k)}$، از این رو

$$P_\varepsilon^{(k)} = \sum_{n:g(x_n)\geq ۱-\varepsilon} c_n^{(k)} \geq \sum_{n:g(x_n)\geq ۱-\varepsilon} c_n^{(k)} g(x_n) \ , \ \ \forall k \in \mathbb{N} \qquad (۲)$$

از تلفیق (۱) و (۲) مشاهده می‌کنیم که برای هر $k \in \mathbb{N}$،

$$Q_\varepsilon^{(k)}(۱-\varepsilon) + P_\varepsilon^{(k)} > \sum_{n:g(x_n)< ۱-\varepsilon} c_n^{(k)} g(x_n) + \sum_{n:g(x_n)\geq ۱-\varepsilon} c_n^{(k)} g(x_n)$$

$$= \sum_n c_n^{(k)} g(x_n) = g(\sum_n c_n^{(k)} x_n).$$

زیرا تعداد متناهی از جملات $(c_n^{(k)})_n$ ناصفرند و g نیز خطی است.

تاکنون نشان داده‌ایم:

$$Q_\varepsilon^{(k)}(۱-\varepsilon) + P_\varepsilon^{(k)} > g(\sum_n c_n^{(k)} x_n)\ ,\ \ \forall k \in \mathbb{N} \qquad (۳)$$

اما چون $\varepsilon > ۰$ و $Q_\varepsilon^{(k)} \geq ۰$ (برای هر $k \in \mathbb{N}$)، این، ایجاب خواهد کرد که

$$Q_\varepsilon^{(k)}(۱-\varepsilon) + P_\varepsilon^{(k)} = Q_\varepsilon^{(k)} - \varepsilon Q_\varepsilon^{(k)} + P_\varepsilon^{(k)} \leq Q_\varepsilon^{(k)} + P_\varepsilon^{(k)} = ۱\ ,\ \ \forall k \in \mathbb{N} \quad (۴)$$

از طرف دیگر کران‌دارای g مؤید این امر است که:

$$\lim_{k\to\infty} g(\sum_n c_n^{(k)} x_n) = g(\lim_{k\to\infty} \sum_n c_n^{(k)} x_n) = g(x) = ۱.$$

با در نظر گرفتن روابط (۴)، (۳) و نتیجه اخیر مشاهده می‌کنیم

$$\lim_{k\to\infty} (Q_\varepsilon^{(k)}(۱-\varepsilon) + P_\varepsilon^{(k)}) = ۱$$

بنابراین $\lim_{k\to\infty}(Q_\varepsilon^{(k)}+P_\varepsilon^{(k)}) - \lim_{k\to\infty} \varepsilon Q_\varepsilon^{(k)} = ۱$ که در این صورت $۱ - \lim_{k\to\infty} \varepsilon Q_\varepsilon^{(k)} = ۱$،

پس $\lim_{k\to\infty} \varepsilon Q_\varepsilon^{(k)} = ۰$. چون $\varepsilon > ۰$، پس $\lim_{k\to\infty} Q_\varepsilon^{(k)} = ۰$ و لذا $\lim_{k\to\infty} P_\varepsilon^{(k)} = ۱$.

حال، چون $\lim_{k\to\infty} Q_\varepsilon^{(k)} = ۰$، بنابراین متناظر با هر $r > ۰$ عدد طبیعی J وجود دارد به قسمی که $k > J$ ایجاب خواهد کرد $Q_\varepsilon^{(k)} = \sum_{n:g(x_n)<۱-\varepsilon} c_n^{(k)} < r$. بنابراین داریم:

$$\forall k > J; \quad \|\sum_{n:g(x_n)<۱-\varepsilon} c_n^{(k)} x_n\| \leq \sum_{n:g(x_n)<۱-\varepsilon} c_n^{(k)} \|x_n\| \leq \sum_{n:g(x_n)<۱-\varepsilon} c_n^{(k)} < r$$

یعنی $\lim_{k\to\infty} \sum_{n:g(x_n)<۱-\varepsilon} c_n^{(k)} x_n = ۰$. در این صورت داریم

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n:g(x_n)\geq ۱-\varepsilon} c_n^{(k)} x_n = \lim_{k\to\infty} \sum_n c_n^{(k)} x_n - \lim_{k\to\infty} \sum_{n:g(x_n)<۱-\varepsilon} c_n^{(k)} x_n = x$$

اما $\lim_{k\to\infty} P_\varepsilon^{(k)} = ۱$، پس $\lim_{k\to\infty} P_\varepsilon^{(k)} x = x$، بنابراین

$$\|\frac{\sum_{n:g(x_n)\geq ۱-\varepsilon} c_n^{(k)} x_n}{P_\varepsilon^{(k)}} - x\| = \frac{\|\sum_{n:g(x_n)\geq ۱-\varepsilon} c_n^{(k)} x_n - P_\varepsilon^{(k)} x\|}{P_\varepsilon^{(k)}}$$

$$\leq \frac{\| \sum_{n:g(x_n)\geq ۱-\varepsilon} c_n^{(k)} x_n - x\|}{P_\varepsilon^{(k)}} + \frac{\|P_\varepsilon^{(k)} x - x\|}{p_\varepsilon^{(k)}}.$$

وقتی $k \to \infty$، عبارت سمت راست به صفر می‌گراید، لذا

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{n:g(x_n)\geq ۱-\varepsilon} c_n^{(k)} x_n}{p_\varepsilon^{(k)}} = x \qquad (۵)$$

اما به ازای هر $k \in \mathbb{N}$، $\frac{\sum_{n:g(x_n)\geq ۱-\varepsilon} c_n^{(k)} x_n}{P_\varepsilon^{(k)}} \in \mathrm{co}(\{x_n \ : \ g(x_n) > ۱ - \varepsilon\})$، زیرا متناهی بودن تعداد جملات ناصفر دنباله $(c_n^{(k)})_n$ ایجاب می‌کند که تعداد جملات ناصفر دنباله $(c_n^{(k)}/p_\varepsilon^{(k)})_n$ نیز متناهی باشد (برای هر$k \in \mathbb{N}$). همچنین بدیهی است که به ازای هر $n, k \in \mathbb{N}$، $c_n^{(k)}/p_\varepsilon^{(k)} \geq ۰$. از سوی دیگر

$$\sum_{n:g(x_n)\geq ۱-\varepsilon} c_n^{(k)}/p_\varepsilon^{(k)} = (۱/p_\varepsilon^{(k)} \cdot \sum_{n:g(x_n)\geq ۱-\varepsilon} c_n^{(k)} = p_\varepsilon^{(k)}/p_\varepsilon^{(k)} = ۱$$

در این صورت نتیجه می‌شود که برای هر$k \in \mathbb{N}$،

$$\sum_{n:g(x_n)\geq ۱-\epsilon} (c_n^{(k)} x_n / p_\epsilon^{(k)}) \in \mathrm{co}(\{x_n : g(x_n) \geq ۱ - \varepsilon\}).$$

این نتیجه همراه با رابطه (۵) تائید می‌کند که $x \in \overline{\mathrm{co}}(\{x_n \ : \ g(x_n) \geq ۱ - \varepsilon\})$.

ب) فرض می‌کنیم $l \in \mathbb{N}$ ثابت و دلخواه باشد. قرار می‌دهیم $\varepsilon = \frac{۱}{l}$. از این رو با توجه به قسمت (الف) داریم:

$$x \in \overline{\mathrm{co}}(\{x_n \ : \ g(x_n) \geq ۱ - \frac{۱}{l}\})$$

یعنی دنباله $(t_j) \subseteq \mathrm{co}(\{x_n \ : \ g(x_n) \geq ۱ - \frac{۱}{l}\})$ وجود دارد به قسمی که $\lim_{j\to\infty} t_j = x$. پس عددی طبیعی مانند n_l و هست به طوری که برای هر $j \geq n_l$، $\|t_j - x\| \leq \frac{۱}{۲l}$، به ویژه برای $j = n_l$، $\|t_{n_l} - x\| \leq \frac{۱}{۲l}$. اما چون $t_{n_l} \in \mathrm{co}(\{x_n \ : \ g(x_n) > ۱ - \frac{۱}{l}\})$، درمی‌یابیم که عدد طبیعی m_l و گردایه‌ی $\{\lambda_{l_i}\}_{i=۱}^{m_l} \subseteq \mathbb{R}^{\geq ۰}$ وجود دارند به قسمی که $\sum_{i=۱}^{m_l} \lambda_{l_i} = ۱$، $t_{n_l} = \sum_{i=۱}^{m_l} \lambda_{l_i} x_{l_i}$ و

به ازای هر i متعلق به $\{۱, ۲, \ldots, m_l\}$، $g(x_{l_i}) \geq ۱ - \frac{۱}{l}$.

اکنون تعریف می‌کنیم:

$$K_l := \{l_i \ : \ ۱ \leq i \leq m_l\}$$

آن‌گاه $t_{n_l} \in \operatorname{co}(\{x_n \ : \ n \in K_l\})$.

به وضوح K_l متناهی است. همچنین $K_l \subseteq \{n \in \mathbb{N} \ : \ g(x_n) \geq ۱ - \frac{۱}{l}\}$ و لذا داریم

$$\{g(x_n) \ : \ n \in K_l\} \subseteq \{g(x_n) \ : \ g(x_n) \geq ۱ - \frac{۱}{l}\}$$

بنابراین

$$\inf\{g(x_n) \ : \ g(x_n) \geq ۱ - \frac{۱}{l}\} \leq \inf\{g(x_n) \ : \ n \in K_l\}.$$

اما $\inf\{g(x_n) \ : \ g(x_n) \geq ۱ - \frac{۱}{l}\} \geq ۱ - \frac{۱}{l}$ و درنتیجه، $۱ - \frac{۱}{l} \leq \inf\{g(x_n) \ : \ n \in K_l\}$ که این نامساوی اول را به اثبات می‌رساند. برای اثبات نامساوی دیگر توجه می‌کنیم که

$$\operatorname{dist}(x, \overline{\operatorname{co}}(\{x_n \ : \ n \in K_l\})) = \inf\{\|x - t\| \ : \ t \in \operatorname{co}(\{x_n \ : \ n \in K_l\}) \ \}$$

$$\leq \|x - t_{n_l}\| \leq \frac{۱}{۲l} < \frac{۱}{l}.$$

و این درست همان نتیجه مطلوب را به دست خواهد داد.

پ) برای اثبات حکم با توجه به قسمت (ب) قرار می‌دهیم $A := \cup_{i=۱}^{\infty} K_i$. فرض کنیم A به طور صعودی مرتب شده باشد، مثلاً $A = \cup_{i=۱}^{\infty} K_i = \{r_۱, r_۲, r_۳, \ldots\}$. می‌نویسیم $y_j = x_{r_j}$، پس (y_j) زیردنباله‌ای از (x_n) خواهد بود.

اکنون فرض می‌کنیم $t \in \mathbb{N}$ ثابت و دلخواه باشد. حکم می‌کنیم که فقط تعداد متناهی از K_iها وجود دارند که شامل t هستند.

فرض کنیم چنین نباشد، در این صورت تعداد نامتناهی K_i مانند $K_{i_۱}, K_{i_۲}, K_{i_۳}, \ldots$ (که به صورت صعودی مرتب شده‌اند و $i_۱ > ۱$) وجود دارند که شامل t می‌باشند، یعنی برای هر $j \in \mathbb{N}$، $t \in K_{i_j}$. درنتیجه خواهیم داشت