دانشگاه کردستان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد (آنالیز عددی)

عنوان:

استفاده از روش‌های سینک برای حل معادلات اخترفیزیک و الاستو- پلاستیک

دانشجو:

نیلوفر دهقان

استاد راهنما:

دکتر امجد علی‌پناه

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا ستاره

بهمن ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به . . .

پدر و مادر عزیزم

و

استاد راهنمای بزرگوارم؛

دکتر امجد علی پناه

تقدیر و تشکر...

در آغاز خداوند بی‌همتا را سپاس می گویم که در سایه ی لطف و رحمتش به من این توفیق را عنایت فرمود تا گامی دیگر در مسیر علم و دانش و معرفت برداشته و قطره‌ای از دریای بیکران دانش که در تجلی آفرینش است را مورد کنکاش قرار دهم.

بی شک تحقق این امر و به انجام رساندن این رساله جز با بهره گیری از راهنمایی، مساعدت و همکاری اساتید گرامی، کمک های دلسوزانه ی دوستان و خانواده ی عزیزم امکانپذیر نبود. لذا وظیفه ی خود می دانم که تشکر خود را از تمامی این عزیزان ابراز نمایم.

از زحمات بی دریغ و مساعدت‌های دلسوزانه ی استاد راهنمای عزیزم جناب آقای دکتر امجد علی پناه که علاوه بر این رساله افتخار شاگردی ایشان را در دوران تحصیل داشته‌ام کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از کمک ها و زحمات استاد مشاور بزرگوارم جناب آقای دکتر محمدرضا ستاره که علاوه بر این رساله افتخار شاگردی ایشان را در دوران تحصیل داشته‌ام کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از همه ی اساتید گروه ریاضی دانشگاه کردستان که در محضر ایشان کسب علم نموده ام به ویژه از داور داخلی این رساله جناب آقای دکتر کمال شانظری صمیمانه سپاسگزاری می نمایم.

در پایان از خانواده ی عزیزم به پاس اینکه همواره در تمامی لحظات زندگی‌ام حامی و پشتیبان بنده بودند سپاسگزارم.

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا به مدل‌بندی دو مسئله‌ی فیزیکی، الاستو-پلاستیک و اخترفیزیک خواهیم پرداخت. معادله‌ی الاستو-پلاستیک یک مسئله‌ی ناپایدار غیرخطی است که دارای نقطه‌ای منفرد می‌باشد و معادله‌ی دوم که به معادله‌ی لین-امدن معروف است، یک معادله دیفرانسیل معمولی روی بازه‌ی نامتناهی می‌باشد. سپس پایه‌های سینک به همراه خواص آن معرفی می‌شوند. در ادامه با استفاده از پایه‌های سینک و با روش سینک-گالرکین به حل دو مسئله‌ی الاستو-پلاستیک و اخترفیزیک خواهیم پرداخت و نتایج عددی حاصل را با روش‌های دیگر مقایسه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: *الاستو-پلاستیک، اخترفیزیک، ناپایدار غیرخطی، منفرد، معادله‌ی لین-امدن، پایه‌های سینک، نتایج عددی.*

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

فصل ۱

مقدمه

در فیزیک، معادله‌ی لین-امدن [۱] یک معادله‌ی مهم و کاربردی می‌باشد، که برای مدل‌بندی چندین پدیده در ریاضی فیزیک و اخترفیزیک [۲] از جمله تئوری ساختار ستاره‌ای، رفتار گرمایی یک اَبر کروی گازی، کره‌ی گازی همدما و تئوری جریان‌های گرما یونی به‌کار رفته است[۱-۱۱]. معادله‌ی لین-امدن استاندارد به‌صورت زیر می‌باشد:

$$y'' + \frac{۲}{x}y' + y^m = ۰, \qquad x > ۰$$

که در آن m اندیس پلی‌تروپی است که نسبت گرمای اختصاصی گاز شامل ستاره را نشان می‌دهد، با دو شرط اولیه $y(۰) = ۱$ و $y'(۰) = ۰$. این معادله، نخستین بار توسط متخصصان فیزیک نجومی جاناتان هومر لین [۳] و رابرت امدن [۴] مطالعه شد که رفتار گرمایی یک اَبر کروی گازی عمل کننده تحت کشش دو طرفه‌ی مولکول‌هایش را مشروط به قوانین ترمودینامیکی کلاسیک در نظر گرفتند. اغلب تکنیک‌هایی که برای حل مسائل از نوع لین-امدن به‌کار رفته‌اند، براساس سری جواب یا تکنیک‌های آشفتگی [۵] هستند. بندر [۶] یک تکنیک آشفتگی را برای حل معادلات از نوع لین-امدن بر اساس پارامتر مصنوعی δ پیشنهاد داد که این روش، روش δ نامیده شد [۱]. مندلزویگ [۷] و تباکین [۸] از روش نیمه خطی سازی برای حل معادله‌ی لین-امدن استاندارد استفاده کردند. این روش، جواب معادله‌ی دیفرانسیل غیر خطی را با قرار دادن جملات غیر خطی به‌صورت یک آشفتگی تقریب می‌زند [۲]. شوافه [۹] یک تقریب غیر آشفته از جواب تحلیلی را برای معادله‌ی لین-امدن با استفاده از روش

[۱] Lane-Emden

[۲] Astrophysics

[۳] Jonathan Homer Lane

[۴] Robert Emden

[۵] Perturbation

[۶] Bender

[۷] Mandelzweig

[۸] Tabakin

[۹] Shawagfeh

تجزیه‌ی آدومیان [۱۰] (ADM) به‌کار برد و جواب‌هایش به شکل سری توانی بود [۳]. همچنین، از تقریب پده [۱۱] برای تسریع همگرایی سری‌های توانی استفاده کرد. وزواز [۱۲] الگوریتم (ADM) را با چارچوب دیگری که برای رفع منفرد بودن معادله‌ی لین-امدن طراحی شده بود، به‌کار برد [۴]. به‌علاوه، از روش تجزیه‌ی اصلاح شده برای حل رفتار تحلیلی معادلات دیفرانسیل غیرخطی از جمله لین-امدن استفاده کرد [۵]. لیائو [۱۳] یک الگوریتم تحلیلی را برای معادلات از نوع لین-امدن معرفی کرد. این الگوریتم، روش (ADM) را شامل می‌شود. پرند دو تکنیک، روش عددی چبی‌شف گویا و روش تاو-لژاندر گویا، را برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی از جمله لین-امدن نمایش داد [۶، ۸]. راموس [۱۴] در [۹] روش خطی سازی را برای مسائل مقدار آغازین منفرد در معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی دوم مانند لین-امدن به‌کار برد. این روش در معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب خطی ثابت که به‌طور تحلیلی انتگرال‌پذیرند، نتیجه می‌شود و جواب‌های نقطه‌ای تحلیلی و جواب‌های هموار کلی را بیان می‌کند. در [۱۰] سری جواب‌های معادله‌ی لین-امدن با نوشتن این معادله به‌صورت معادله انتگرال ولترا و با فرض اینکه معادلات غیرخطی بقدر کافی مشتق‌پذیرند، به‌دست آمده‌اند. این دنباله از جواب‌ها، یا از معادله‌ی دیفرانسیل اصلی به‌دست می‌آیند یا با تبدیل آن به معادله‌ی دیفرانسیل معمولی که مشتقات مرتبه‌ی اول را شامل نمی‌شود. دهقان و شاکری در [۱۱] یک تبدیل نمایی را برای معادله‌ی لین-امدن، برای رفع نقطه‌ی منفردی در $x = ۰$ به‌کار بردند و سپس مسئله را با استفاده از روش تکراری تغییر، حل کردند. یوسفی در [۱۲] معادلات لین-امدن را با استفاده از عملگر انتگرال به معادلات انتگرال تبدیل کرد و سپس تقریب‌های موجک لژاندر را به‌کار برد. در این روش، خواص موجک لژاندر را با روش انتگرال‌گیری گاوس برای کاهش معادلات انتگرال به معادلات جبری به‌کار برد. با این روش، معادلات روی بازه‌ی $[۰, ۱]$ فرمول‌بندی می‌شوند.

مسئله‌ی فیزیکی دیگری که در این پایان نامه در نظر می‌گیریم یک میله‌ی الاستو-پلاستیک یک بعدی تحت بارهای خارجی است. این مسئله بیشتر در مهندسی کاربرد دارد. روش‌های عددی که به‌طور سنتی برای حل مسائل الاستوپلاستیسیتی به‌کار رفته‌اند عبارتند از: تفاضلات متناهی، عناصر متناهی و روش‌های طیفی [۱۳، ۱۴]. ولی، اخیراً، پایه‌های دومتعامدی موجک برای مطالعه‌ی حساسیت دینامیکی میله‌ی الاستو-پلاستیک تک محوری استفاده شده است [۱۵].

روش‌های طیفی برای تقریب انواع مسائل خطی و غیرخطی (معادلات انتگرالی، معادلات با مشتقات جزئی، حساب تغییرات، کنترل بهینه و غیره) در دامنه‌های کراندار به موفقیت بزرگی در سال‌های اخیر رسیده است. روش‌های طیفی برای معادلات دیفرانسیل معمولی در دامنه‌های بیکران به‌طور محدودی مورد توجه قرار گرفته‌اند و روش‌های طیفی متفاوتی برای حل مسائل با دامنه‌های بیکران توسط محققین مختلفی پیشنهاد شده است. از جمله

[۱۰] Adomian decomposition method

[۱۱] Pade

[۱۲] Wazwaz

[۱۳] Liao

[۱۴] Ramos

روش‌های طیفی برای تقریب مسائل در دامنه‌های بیکران می‌توان به روش طیفی هرمیتی و روش چندجمله‌ای‌های لاگر [۱۵] که توسط مدی [۱۶] در ۱۹۸۵، فونارو [۱۷] در ۱۹۹۰، شن [۱۸] در ۲۰۰۰، گئو [۱۹] و شن در ۲۰۰۰ بررسی شده‌اند، اشاره کرد [۱۵-۱۸]. گئو در سال ۱۹۹۸ با تغییر متغیر، دامنه‌های بیکران را به یک دامنه‌ی کراندار تبدیل کرد و مسئله‌ی اصلی به یک مسئله‌ی منفرد تبدیل شد که برای حل آن از چندجمله‌ای‌های متعامد کلاسیک استفاده کرد [۱۹-۲۱]. از جمله روش‌های دیگر برای مسائل در دامنه‌های بیکران، روش طیفی مبتنی بر پایه‌های گویاست. کریستف [۲۰] در ۱۹۸۲ وبوید [۲۱] در ۱۹۸۷ بعضی از روش‌های طیفی روی بازه‌های بیکران را با استفاده از دستگاه‌های دو به دو متعامد از توابع گویا توسعه دادند [۲۲-۲۴]. بوید در ۱۹۸۷ یک پایه‌ی جدید طیفی به نام توابع چبی‌شف [۲۲] گویا را روی بازه‌ی نیمه-نامتناهی با نگاشت به چندجمله‌ای‌های چبی‌شف تعریف کرد. اخیراً، گئو یک مجموعه‌ی جدید از توابع گویای لژاندر [۲۳] را که در $L^2(0,\infty)$ دو به دو متعامدند، با تابع وزن غیر یکنواخت $\chi(x) = (x+1)^{-2}$ برای تقریب در دامنه‌های بیکران پیشنهاد کرده است. روش دیگر، دامنه‌ی نامتناهی را با $[-L, L]$ و بازه‌ی نیمه-نامتناهی را با $[0, L]$ جایگزین می‌کند با انتخاب L به اندازه‌ی کافی بزرگ، که این روش، روش برش دامنه نامیده می شود [۲۶]. بوید روش‌های شبه طیفی را روی بازه‌ی نیمه-نامتناهی نیز به‌کار برده [۲۷] و با چبی‌شف گویا، لاگر و نگاشت سینوسی فوریه مقایسه کرده است. پرند و رزاقی [۶-۸]، پرند و شاهینی [۲۸] توابع چبی‌شف گویا و لژاندر را با روش تاو [۲۴] به‌کار بردند و روش هم محلی [۲۵] را برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی روی بازه‌ی نیمه-نامتناهی به‌کار برده‌اند. روش دیگر، روش مبتنی بر توابع سینک است. هر روشی که برای حل مسائل ریاضی به‌کار می‌رود، در یک کلاس خاص نتیجه‌ی بهتری دارد. به عنوان مثال، چندجمله‌ای‌ها در تقریب توابع تحلیلی بدون نقاط منفردی نتیجه‌ی بهتری دارند، اسپلاین‌ها برای به‌دست آوردن جواب‌های تقریبی نسبتاً دقیق، خوب هستند و چندجمله‌ای‌های فوریه در تقریب توابعی که هم هموارند و هم روی خط حقیقی دوره‌ای هستند، برتری دارند. اما، روش‌های سینک در مسائل دارای نقطه‌ی منفردی، مسائل لایه‌ی مرزی و مسائل روی دامنه‌های متناهی و نیمه-نامتناهی برتری دارند. استنگر [۲۶]، شاگردانش و نیز تعدادی از ریاضیدانان، تحقیقاتشان را روی روش‌های عددی سینک از سال ۱۹۶۳ آغاز کردند [۳۰]. خطای تقریب تابع گویا با خطای تقریب سینک در فضاهایی که روش‌های

[۱۵] Laguerre
[۱۶] Maday
[۱۷] Funaro
[۱۸] Shen
[۱۹] Guo
[۲۰] Christov
[۲۱] Boyd
[۲۲] Chebyshev
[۲۳] Legendre
[۲۴] Tau
[۲۵] Collocation
[۲۶] Stenger

سینک برتری دارند، یکسان است. از طرف دیگر، روش‌های سینک ترکیب‌های دیگری دارند که از روش‌های تابع گویا بهتر عمل می‌کنند. روش‌های سینک دارای خواص مفیدی هستند که همین خواص نتیجه‌ی محاسباتی بهتری به وجود می‌آورند. همچنین، برنامه‌های کامپیوتری نوشته شده بر اساس پایه‌های سینک در مقایسه با سایر روش‌های کلاسیک معمولاً در زمان کوتاهتری به نتیجه‌ی مطلوب می‌رسند. روش‌های سینک، در حالت‌هایی‌که مسئله نقطه‌ی منفردی داشته باشد بسیار مفیدند، بخصوص در حالتی‌که خطای تقریب n -نقطه‌ای با سرعت $O(e^{-c\sqrt{n}})$ همگرا شود که در آن c یک ثابت مثبت است. از نماد

$$S(k,h)(x)=\frac{h\sin\left(\dfrac{\pi}{h}(x-kh)\right)}{\pi(x-kh)}, \tag{۱.۱}$$

برای نمایش تابع سینک استفاده می‌کنیم که در آن h عددی حقیقی و مثبت و k صحیح می‌باشد. فرض کنیم f تابع تعریف شده و کراندار روی $(-\infty,\infty)$ باشد، تقریب تابع $f\in L^{2}(\mathbb{R})$ با استفاده از پایه‌های سینک به‌صورت زیر می‌باشد:

$$C(f,h)(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kh)S(k,h)(x). \tag{۲.۱}$$

این تابع با کارهای بور [۲۷] ، پویزن [۲۸] و ویتاکر [۲۹] در گذشته آغاز شده است. این تابع در قضیه‌ی توابع تحلیلی به‌کار رفته است. روش‌های عددی سینک برای حل انواع معادلات زیر به‌کار می‌روند [۲۹]:

- تقریب تابع
- تقریب مشتق‌ها
- تقریب انتگرال معین و نامعین
- تقریب جواب مقدار مرزی و آغازین معادلات دیفرانسیل معمولی
- تقریب و معکوس تبدیل‌های فوریه و لاپلاس
- تقریب تبدیل‌های هیلبرت
- تقریب پیچیدگی معین و نامعین
- تقریب جواب معادلات دیفرانسیل جزئی
- تقریب جواب معادلات انتگرال

[۲۷] Bohr
[۲۸] Poussin
[۲۹] Whittaker

• ساخت نگاشت‌های همدیس

کاربرد توابع سینک برای به‌دست آوردن جواب‌های تقریبی معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات انتگرال به‌طور مفصل در مراجع [۳۰-۳۵] بحث شده است. برای حل معادلات دیفرانسیل، دو روش مبتنی بر تقریب سینک با هم محلی سینک و سینک-گالرکین وجود دارد. به ویژه روش‌های عددی سینک در حل مسائل مقدار مرزی و آغازین معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی شامل شرایط مرزی دیریکله، نویمن و دیگر شرایط مرزی خیلی مشهورند و به این ترتیب عمل می‌کنند که معادلات دیفرانسیل، با تقریب‌های گسسته‌ی سینک که قابل فهمند، جایگزین می‌شوند. از طرفی، فایده‌ی روش‌های سینک برای حل این مسائل آن است که به سادگی انجام می‌شوند و برای مسائل با نقطه‌ی منفرد، دقت خوبی دارند و می‌توانند جواب‌های تقریبی دقیق را برای مسائل با بازه‌های نامتناهی یا نیمه-نامتناهی تولید کنند. اگر جواب یک معادله هم تحلیلی باشد و هم از کلاس Lip_α آنگاه $2N+1$ نقطه‌ی تقریب سینک خطایی را تولید می‌کنند که از مرتبه‌ی $O(e^{-\sqrt{\pi d\alpha N}})$ است. استنگر در سال ۱۹۷۹ موفق شد که برای اولین بار روش سینک-گالرکین را به‌کار ببرد [۳۶]. الخالد [30] در سال ۲۰۰۷ روش سینک-گالرکین را برای حل رده‌ای از مسائل مقدار مرزی دو نقطه‌ای منفرد به‌کار برد و جواب دقیق معادلات دیفرانسیل را از طریق توابع گرین به‌صورت انتگرال بیان کرد [۳۳]. ایده‌ی هم محلی سینک برای جواب عددی مسئله‌ی آغازین در ۱۹۹۷ توسط کارلسون [31] توسعه داده شد و نشان داده شد که ایده‌ی سینک در یک همگرایی نمایی به جواب همگراست [۳۷]. در سال ۱۹۹۶، کورس [32] و هریس [33] روش هم محلی سینک را برای حل کولن صفحه‌ای معادله‌ی شرودینگر [34] بیان کردند [۳۸] و ایده‌ی سینک را با تابع $Ln(\sinh(x))$ برای نگاشت بازه‌ی نامتناهی به بازه‌ی نیمه-نامتناهی به‌کار بردند و مقادیر ویژه و توابع ویژه‌ی فضای مکانی معادله‌ی کولن صفحه‌ای را با این روش محاسبه کردند. در مقاله‌ی دهقان و سعادتمندی [۳۹] روش هم محلی سینک به یک دستگاه از مسائل مقدار مرزی مرتبه‌ی دوم بسط داده شد و با این روش، محاسبات را به معادلات جبری کاهش دادند. اسمیت [35] در سال ۱۹۹۱ روش هم محلی سینک را برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی ۴ به‌کار برد [۴۰]. حتی در این مرتبه‌ی بالا، نشان داد که روش هم محلی سینک سازگار است. استنگر نشان داد که هر دو روش هم محلی سینک و سینک-گالرکین با آهنگ نمایی همگرایند [۳۰].

مزایای استفاده از تقریب‌های مبتنی بر روش سینک عبارتند از:

۱. برخلاف اکثر روش‌های عددی، خطای این روش به‌طور نمایی کاهش پیدا می‌کند.

۲. در مسائلی که دارای تکینی هستند، بسیار کارا و مناسب هستند.

۳. به علت همگرایی سریع، روش‌های عددی سینک به مسائل ناپایدار متعارف وابسته به روش‌های عددی دیگر

[30] Kamel Al-Khaled

[31] Carlson

[32] Koures

[33] Harris

[34] Schrödinger

[35] Smith

دچار نمی‌شوند. یعنی، از نظر خطای گرد کردن پایدارهستند.

روش‌های عددی سینک به عنوان ابزارهای مفیدی برای حل دسته‌ی وسیعی از مسائل خطی و غیرخطی به رسمیت شناخته شده‌اند که از علوم و کاربردهای مهندسی شامل انتقال گرما [۴۱-۴۳]، رشد جامعه [۴۴]، مکانیک سیالات [۴۵]، کنترل اپتیمال [۳۰]، مسائل وارون [۳۲، ۳۴] و تصویر طبی [۴۶] ناشی شده‌اند.

علیرغم موفقیت آشکار در استفاده از روش‌های پایه‌ای سینک در عرصه‌های دیگر، پتانسیل آن‌ها در حل مسائل الاستوپلاستیسیتی هنوز بررسی نشده است. انتخاب مسائل یک بعدی در نظر گرفته شده در این پایان نامه به این دلیل است که این مسائل، همه‌ی ترکیب‌های اساسی را که بر رفتار دینامیکی اکثر مسائل الاستوپلاستیسیتی تأکید دارند را نمایش می‌دهند. مسائل مقدار مرزی که با قوانین جریان پلاستیک همراه شده‌اند، حالت‌های بارگذاری و تخلیه‌ی بار فرآیند تغییر شکل را به‌علاوه‌ی محدودیت‌های اضافی تعیین شده با شرط حاصل روی تنش و متغیرهای درونی ماده مشخص می‌کنند. فرآیند اصلی برای پیش‌بینی بردار تغییر مکان، استفاده از روش سینک-گالرکین است برای آزمایش اینکه، آیا جواب پیش‌بینی شده در قانون جریان اضافی و شرایط حاصل صدق می‌کند یا نه؟ اگر جواب پیش‌بینی شده برای اجرای این شرایط رد شود، شرایط دیگری برای بردار تغییر مکان در یک فرآیند تکراری ساخته می‌شود. تا زمانی‌که تصحیح‌ها نقطه‌ای به‌کار روند، روش گالرکین مقادیر استفاده شده‌ی توابع پایه‌ای را تضمین می‌کند و مشتق‌های آن‌ها روی دامنه‌ی تعریف شده انتگرال‌گیری می‌شوند.

در این پایان نامه برای تقریب دستگاه معادلات غیر خطی از روش تکراری نیوتن استفاده می‌کنیم.

فصل ۲

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل تعاریف و مفاهیم مقدماتی فضای ضرب داخلی، فضاهای برداری، انواع فضاها، بهترین تقریب، خواص توابع پایه‌ای متعامد، کامل بودن و فضای سوبولوف را به اختصار بیان می‌کنیم. برای نوشتن این فصل از مرجع [۴۷] استفاده شده است.

۱.۲ فضاهای برداری

۱.۱.۲ فضای نرم‌دار

تعریف ۱. فضای برداری مجموعه‌ای است مانند V مجهز به دو عمل دوتایی که جمع برداری و ضرب عددی نامیده می‌شود که دارای خواص زیر باشند:

الف) اگر $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ آنگاه عنصری مانند $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ در V، موسوم به مجموع برداری $\mathbf{y}, \mathbf{x}$ ، وجود دارد. این جمع برداری دارای خواص زیر است:

ج۱) به ازای هر $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$، $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$

ج۲) به ازای هر $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$، $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$

ج۳) عنصری مانند ۰ در V هست به‌طوری‌که به ازای هر $\mathbf{x}$ در V، $\mathbf{x}=\mathbf{x}+\mathbf{0}$ و $\mathbf{0}+\mathbf{x}=\mathbf{x}$

ج۴) به ازای هر $\mathbf{x}$ مفروض در V عنصری مانند $-\mathbf{x}$ در V هست به‌طوری‌که $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$

چنانچه $a \in \mathbb{R}$ و $\mathbf{x} \in V$، عنصری مانند $a\mathbf{x}$ در V، موسوم به حاصلضرب $\mathbf{x}, a$، وجود دارد. این ضرب عددی دارای خواص زیر است:

ض ۱) به ازای هر $\mathbf{x} \in V$، $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$

ض ۲) به ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$، $\mathbf{x} \in V$، $a(b\mathbf{x}) = (ab)\mathbf{x}$

ب) به ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$، $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$، $a(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}$ و $(a+b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$

تعریف ۲. هرگاه V یک فضای برداری باشد، حاصلضرب داخلی تابعی است از $V \times V$ به $\mathbb{R}$ که با $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \longrightarrow$ $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ نشان داده می‌شود و در خواص زیر صدق می‌کند:

۱) به ازای هر $\mathbf{x} \in V$، $\langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \rangle \geq ۰$

۲) $\langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \rangle = ۰$ اگر و فقط اگر $\mathbf{x} = ۰$

۳) به ازای هر $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$، $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$

۴) به ازای هر $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$، $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$،
$(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$

۵) به ازای هر $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, a \in \mathbb{R}$، $(a\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = a(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (a\mathbf{y})$

هر فضای برداری که در آن حاصلضرب داخلی تعریف شده باشد را فضای ضرب داخلی نامیم.

تعریف ۳. تابع حقیقی $\|\cdot\|$ را که روی فضای برداری X تعریف شده است یک نرم نامیم هرگاه در سه ویژگی زیر صدق کند:

۱) به ازای هر $\mathbf{x} \in X$، $\|\mathbf{x}\| \geq ۰$، $\|\mathbf{x}\| = ۰$ اگر و فقط اگر $\mathbf{x} = ۰$

۲) به ازای هر $\mathbf{x} \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$

۳) به ازای هر $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$، $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

ویژگی (۳) نابرابری مثلثی نام دارد. فضای برداری X مجهز به نرم $\|\cdot\|$ را یک فضای برداری نرم‌دار یا به اختصار، یک فضای نرم‌دار نامیم.

تعریف ۴. فرض کنید که X فضای ضرب داخلی باشد، در این‌صورت نرم تولید شده توسط فضای ضرب داخلی را یک نرم القائی گویند و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall \mathbf{x} \in X, \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

قضیه ۱.۲. فرض‌کنیم که X یک فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه برای هر $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ داریم:

الف) (نامساوی کوشی - شوارتز) $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$

ب) (نامساوی مثلثی) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

ج) (قانون متوازی‌الاضلاع) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^۲ + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^۲ = ۲\left(\|\mathbf{x}\|^۲ + \|\mathbf{y}\|^۲\right)$.

۲.۱.۲ فضای متریک

تعریف ۵. یک متر (یا فاصله) روی مجموعه ناتهی X تابعی مانند $d : X \times X \to \mathbb{R}$ است که در سه ویژگی زیر صدق کند:

۱. به ازای $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ داشته باشیم: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > ۰$ و $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ۰$ اگر و تنها اگر $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

۲. به ازای هر $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$، $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

۳. به ازای هر $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$، $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ (نابرابری مثلثی).

جفت مرتب (X, d) را یک فضای متریک می‌نامند.

۲.۲ معرفی چند فضا

فضای $C[a,b]$، این فضا شامل همه توابع حقیقی پیوسته روی بازه‌ی $[a,b]$ است، این فضا نرم‌دار است و در این فضا چند نرم مختلف را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱) $||f||_۱ = \int_a^b |f(x)|dx$

۲) $||f||_۲ = \left(\int_a^b |f(x)|^۲ dx \right)^{\frac{۱}{۲}}$

۳) $||f||_\infty = \sup |f(x)|$.

فضای $L^p[a,b]$ برای $۱ \leq p < \infty$، شامل همه توابع حقیقی انتگرال‌پذیر لبگ روی بازه‌ی $[a,b]$ است که

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty.$$

این فضا یک فضای نرم‌دار است و نرم آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$||f||_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{۱}{p}}.$$

تعریف ۶. فضای برداری نرم‌دار X را یک فضای باناخ [1] گویند، هرگاه هر دنباله‌ی کوشی روی فضای X همگرا باشد.

تعریف ۷. فضای حاصلضرب داخلی X را یک فضای هیلبرت[2] گوییم هرگاه X نسبت به نرم تولید شده توسط ضرب داخلی $\Big(\|x\|^{2} = \langle x, x\rangle\Big)$ یک فضای باناخ باشد.

تعریف ۸. بازه‌ی کراندار $[a, b]$ روی محور اعداد حقیقی و عدد صحیح n را در نظر بگیرید. فضای سوبولوف روی فضای برداری $L^{2}[a, b]$ را با نماد $H^{n}(a, b)$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$H^{n}(a,b) = \left\{ f \in L^{2}(a,b) : \frac{d^{k}f}{dx^{k}} \in L^{2}(a,b),\ 0 \leq k \leq n \right\}.$$

همچنین نرم روی این فضا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|f\|_{H^{n}(a,b)} = \left(\sum_{k=0}^{n} \left\| \frac{d^{k}f}{dx^{k}} \right\|_{L^{2}(a,b)}^{2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

۳.۲ بهترین تقریب

در این بخش به‌طور مختصر مفهوم نظریه بهترین تقریب [3] را در فضای نرم‌دار بیان می‌کنیم. اثبات قضایای مربوط به این بخش در مراجع [۴۸، ۴۹] آورده شده‌اند.

تعریف ۹. فرض کنیم که (V, d) یک فضای متریک و W یک زیر فضای V باشد، بهترین تقریب برای هر عنصر $\mathbf{x} \in V$، عنصری مانند $\mathbf{y}^{*} \in W$ می‌باشد که در آن

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{*}) = inf\Big\{ d(\mathbf{x}, \mathbf{y})\ :\ \mathbf{y} \in W \Big\} = dist(\mathbf{x}, W),$$

که $dist(\mathbf{x}, W)$، یعنی فاصله $\mathbf{x}$ از مجموعه W و $\mathbf{x}$ را نزدیکترین نقطه به مجموعه W نیز می‌گویند.

اگر عضوی از W مانند $\mathbf{y}_{0}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $dist(\mathbf{x}, W) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_{0}\|$ در این‌صورت $\mathbf{y}_{0}$ را بهترین تقریب $\mathbf{x}$ نسبت به W گویند.

در مورد بحث بهترین تقریب سه سوال اساسی زیر وجود دارند:

این بهترین تقریب وجود دارد؟

در صورت وجود یکتاست؟

نحوه به‌دست آوردن بهترین تقریب چگونه است؟

---

[1] Banach space

[2] Hilbert space

[3] Best approximation

قضیه ۲.۲. فرض کنید W یک زیر فضای متناهی-البعد از فضای نرم دار V و $\mathbf{x} \in V$ باشد. آنگاه $\mathbf{y}^* \in W$ (نه لزوماً یکتا) وجود دارد به‌طوری‌که

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}^*\| = \min_{\mathbf{y}\in W} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

یعنی بهترین تقریب $\mathbf{x}$، نسبت به W وجود دارد.

تعریف ۱۰. فضای نرم‌دار (متریک) (W, d) روی فضای برداری V را اکیداً محدب گوییم، هرگاه برای هر $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in W$ با شرایط $\|x\| \leqslant r$ و $\|y\| \leqslant r$ و برای هر $۱ > \lambda > ۰$ داشته باشیم:

$$.\|\lambda\mathbf{x} + (۱ - \lambda)\mathbf{y}\| < r$$

قضیه ۳.۲. اگر (V, d) یک فضای نرم دار اکیداً محدب و W زیر فضایی از آن باشد، در این‌صورت بهترین تقریب برای هر $\mathbf{x} \in V$ نسبت به Wمنحصر بفرد است.

قضیه ۴.۲. (وایراشتراس) فرض کنیم $f \in C[a, b]$، آنگاه به ازای هر $۰ < \varepsilon$ یک چندجمله‌ای مانند $p(x)$ (که ممکن است به $۰ < \varepsilon$ بستگی داشته باشد) وجود دارد به‌طوری‌که:

$$| f - p |< \varepsilon.$$

نتیجه ۱۱. برای هر $f \in C[a, b]$ و هر عدد مثبت n، چندجمله‌ای $P_n^* \in \Pi_n$ (نه لزوماً یکتا) وجود دارد به‌طوری‌که

$$\|f - P_n^*\| = \min_{P\in\Pi_n} \|f - P\|.$$

در اینجا Π_n فضای همه چندجمله‌ای‌های از درجه کمتر یا مساوی n است.

نتیجه ۱۲. به ازای هر $f \in C[a, b]$ و عدد مثبت n، ثابت $۰ < B < \infty$ وجود دارد به‌طوری‌که اگر

$$\left\| f - \sum_{k=۰}^{n} a_k x^k \right\| \leq \|f\|$$

آنگاه

$$\max_{۰\leq k\leq n} |a_k| \leq B.$$

قضیه ۵.۲. فرض کنیم A یک زیرفضای برداری از فضای نرم‌دار X باشد، همچنین فرض کنیم که $x \in X - A$، اگر K_x شامل همه‌ی بهترین تقریب‌های x از A باشد، آنگاه K_x کراندار و محدب است.

نتیجه ۱۳. اگر X یک فضای نرم‌دار به‌طور اکید محدب و A زیرفضایی از آن باشد در این‌صورت بهترین تقریب $x \in X$ نسبت به A برای عنصر منحصر بفرد است.