دانشکده مهندسی مکانیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد در رشته مهندسی مکانیک - طراحی کاربردی

کاربرد گروههای لی دربررسی کنترل وضعیت سیستمهای مکانیکی پایستار

توسط:

امیر انصاری فرد

استاد راهنما:

دکتر مجتبی محزون

دی‌ماه ۱۳۸۸

بسم الله الرحمن الرحيم

بـــه نـام خـــدا

اظهار نامـــــه

اینجانـب امیر انصاری فرد دانشجـــوی رشـته ی مهندســی مکانیـک گـرایش طراحـی کاربردی دانشکده ی مهندسی مکانیک اظهار می کنم که این پایان نامه حاصـل پـژوهش خودم بوده و در جاهایی که از منابع دیگران استفاده کرده ام، نشانی دقیـق و مشخصـات کامل آن را نوشته ام. همچنین اظهار می کنم که تحقیق و موضوع پایان نامـه ام تکـراری نیست و تعهد می نمایم که بدون مجوز دانشگاه دستاوردهای آن را منتشر ننموده و یا در اختیار غیر قرار ندهم. کلیه حقوق این اثر مطابق با آیین نامه مالکیـت فکـری و معنـوی متعلق به دانشگاه شیراز است.

نام ونام خانوادگی: امیر انصاری فرد

تاریخ و امضاء: ۸۸/۱۱/۲۰

به نام خدا

کاربرد گروههای لی در بررسی کنترل وضعیت سیستم‌های مکانیکی پایستار

به وسیله‌ی:

امیر انصاری فرد

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی

از فعالیت های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

مهندسی مکانیک

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: عالی

دکتر دکتر مجتبی محزون، دانشیار بخش مهندسی مکانیک (رئیس کمیته) .....

دکتر محمد اقتصاد، دانشیار بخش مهندسی مکانیک.....

دکتر محمدرضا فرهنگ دوست، استادیار بخش ریاضی.....

دی ماه ۱۳۸۸

تقدیم به:

کسانیکه درد حقیقت را در وجودشان احساس می کنند که این درد آغاز حرکت به سوی کمال است.

سپاسگزاری

در ابتدا از زحمات پدر و مادر عزیزم که در طول دوران تحصیل پشتیبان و مشوقم بودند.
به طور ویژه از جناب استاد دکتر محزون که در طول دوران تحصیل در دانشگاه شیراز یک الگو برای من بودند و درسهای گوناگونی از منش ایشان آموختم و در مراحل گوناگون پایان نامه از نظرات ارزشمند و دید دقیق و عمیقشان بهره مند شدم.
از استاد دکتر فرهنگ دوست که حضورشان در دانشگاه شیراز همزمان با آغاز پایان نامه فرصت مغتنمی برای من بود و بدون استفاده ار محضر ایشان انجام پایان نامه دشوار می نمود.
از استاد دکتر اقتصاد که روی گشاده و درک عمیقشان از کنترل تأثیر مهمی در تعیین گرایش تحصیلی من داشت و راهنمائیهایشان در طول تدوین پایان نامه راه گشا بود.
و در نهایت از استاد دکتر فرید که قبول زحمت کردند که در جلسهٔ دفاع حضور داشته باشند.

سپاسگزارم

چکیده

کاربرد گروههای لی در کنترل وضعیت سیستم‌های مکانیکی پایستار

بوسیله‌ی:

امیر انصاری فرد

در این پایان نامه به بررسی کاربرد گروههای لی در کنترل وضعیت سیستمهای مکانیکی می پردازیم. مقصود از کنترل وضعیت، کنترل پارامترهایی از سیستم می باشد که به وضعیت سیستم یعنی مکان و جهت گیری مربوط می شوند.

زبان حاکم بر پایان نامه، هندسه دیفرانسیل است ، لذا با مفاهیم اساسی از هندسه دیفرانسیل که در مکانیک و کنترل هندسی کاربرد دارند آشنا شده و نحوهٔ مدلسازی مفاهیم مکانیکی نظیر فضای وضعیت، فضای حالت، سرعت، نیرو و ... را به زبان هندسی بیان می کنیم. سپس با استفاده از معادلات اویلر-لاگرانژ، معادلات هندسی حاکم بر سیستمهای مکانیکی را به دست می آوریم و با مدلسازی هندسی قیود ، این معادلات را برای سیستمهای مقید بازنویسی می کنیم.

گروههای لی به عنوان دسته ای از منیفلدها که ساختار گروهی دارند، به طور طبیعی فضای حالت بسیاری از سیستمهای مکانیکی می باشند. با معرفی ابن گروهها و بیان مفهوم جبر لی، متریک و ارتباط های افاین روی گروههای لی، با مفهوم سیستمهای مکانیکی بر روی گروههای لی آشنا می شویم و سپس به دو کاربرد این گروهها اشاره می کنیم.

در نهایت به دو مسئلهٔ مهم در تئوری کنترل سیستمهای مکانیکی، یعنی کنترلپذیری وضعیت و مسئلهٔ تعقیب در سیستمها بر روی گروههای لی می پردازیم. مسئلهٔ کنترلپذیری از مسائل اساسی در تئوری کنترل است، با این حال تا کنون روشی جامع برای بررسی کنترلپذیری سیستمهای غیر خطی ارائه نشده است. در این پایان نامه روشی برای سنجش مفهومی ضعیفتر از کنترلپذیری، یعنی کنترلپذیری وضیعت ارائه شده است. در مسئلهٔ تعقیب روشی که ارائه می شود، با استفاده از ویژگی زبان هندسی یعنی امکان بررسی مسائل فارغ از انتخاب دستگاه مختصات، بر روی مسائل اساسی و ذاتی طراحی تمرکز دارد.

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
فصل اول: مقدمه	۱
۱-۱- هندسه دیفرانسیل چیست؟	۴
۱-۲- ضرورت پایان نامه	۶
۱-۳- پیشینه تحقیق	۹
۱-۴- نمای کلی پایان نامه	۱۱
فصل دوم : ساختار هندسی سیستمهای کنترلی مکانیکی	۱۲
۲-۱- منیفلد وضعیت	۱۹
۲-۱-۱- چارت و اطلس	۱۹
۲-۱-۲- منیفلد و زیر منیفلد	۲۱
۲-۱-۳- سیستم های مکانیکی مقید داخلی	۲۳
۲-۱-۴- نگاشت سینماتیک پیش رونده	۲۴
۲-۲- کلاف های مماسی و سرعت	۲۶
۲-۲-۱- کلاف مماسی	۲۶
۲-۲-۲- نگاشت مماسی	۲۸
۲-۲-۳- کلاف مماسی از منیفلد وضعیت	۲۹
۲-۳- متریک انرژی جنبشی	۳۲
۲-۳-۱- انرژی جنبشی	۳۲
۲-۳-۲- مختصری از جبر خطی	۳۳
۲-۳-۳- متریک ریمانی و ارتباط آن با انرژی جنبشی	۳۶

۲-۴- معادلات اویلر-لاگرانژ ۳۸
۲-۴-۱- مشتق و براکت لی ۳۸
۲-۴-۲- ارتباط افاین و مشتق هم وردایی ۳۹
۲-۴-۳- ژئودزیک ۴۱
۲-۴-۴- معادلات اویلر- لاگرانژ ۴۴
۲-۵- نیروها ۴۷
۲-۵-۱- ماهیت معادلات اویلر لاگرانژ ۴۷
۲-۵-۲- نیروی لاگرانژی و ماهیت آن ۴۸
۲-۵-۳- مختصری از جبر خطی: نگاشتهای خطی منتسب به نگاشتهای دو خطی ۴۹
۲-۵-۴- معادلات اویلر- لاگرانژ به همراه نیرو ۵۰
۲-۵-۵- نیروهای پتانسیل ۵۲
۲-۶- قیود غیر هولونومیک ۵۴
۲-۶-۱- توزیع و دوگان توزیع ۵۴
۲-۶-۲- از قیود جسم صلب به یک توزیع روی Q ۵۵
۲-۶-۳- تعاریف و خصوصیات ۵۶
۲-۶-۴- معادلات اویلر لاگرانژ در حضور قید ۵۷
۲-۶-۵- سیستم های مکانیکی ساده مقید ۵۸
۲-۶-۶- ارتباط های مقید ۵۹
۲-۶-۷- نمایش پوانکاره معادلات حرکت ۶۱

فصل سوم: سیستمهای کنترلی مکانیکی روی گروههای لی ۶۳

۳-۱- گروهها و جبرهای لی ۶۵
۳-۱-۱- گروه لی ۶۵
۳-۱-۲- زیرگروههای تک پارامتری وجبرهای لی ماتریسی ۶۶
۳-۱-۳- جبرهای لی ۶۷
۳-۱-۴- جبرلی از یک گروه لی ۶۸
۳-۲- متریک ها، ارتباط ها و سیستم ها روی گروه های لی ۷۳

۳-۲-۱- متریک ها و ارتباط های ناوردا ۷۳
۳-۲-۲- سیستم های کنترلی مکانیکی ساده روی گروههای لی ۷۴
۳-۳- برخی کاربردهای گروههای لی ۷۸
۳-۳-۱- سینماتیک رباتهای زنجیره ای ۷۸
۳-۳-۲- هندسه برای مسیریابی ۸۰

فصل چهارم: کنترلپذیری وضعیت برای سیستمهای کنترلی مکانیکی ۸۳

۴-۱- تعریف مسئله و بیان مقدماتی نتایج ۸۵
۴-۲- تئوری کنترل غیر خطی ۸۷
۴-۳- سیستم های کنترلی مکانیکی ساده ۸۹
۴-۴- تعریف کنترلپذیری برای سیستمهای کنترلی مکانیکی ساده ۹۱
۴-۵- ساختار جبر لی کنترلی برای سیستمهای کنترلی مکانیکی ساده ۹۳
۴-۶- نتایج کنترلپذیری برای سیستم های مکانیکی ساده ۹۷
۴-۷- مثالهایی از سیستم های کنترلی مکانیکی ۹۹
۴-۷-۱- بازوی رباتیکی ۹۹
۴-۷-۲- جسم صلب صفحه ای واداشته ۱۰۰
۴-۷-۳- دیسک در حال غلتیدن ۱۰۲

فصل پنجم: تعقیب مسیر روی گروه لی ۱۰۴

۵-۱- توصیف هندسی خطای وضعیت و سرعت ۱۰۶
۵-۱-۱- تابع خطا و خطای وضعیت ۱۰۶
۵-۱-۲- نگاشت انتقال و خطای سرعت ۱۰۷
۵-۱-۳- طراحی روی کره ۱۰۸
۵-۱-۴- مشتق نگاشت انتقال و فرضیات کرانداری ۱۰۹
۵-۲- تعقیب روی منفیلد ۱۱۱
۵-۳- مسئلهٔ تعقیب برای یک سیستم نقطه ای روی کره ۱۱۶

فصل ششم : جمع‌بندی و پیشنهادات ۱۱۸

۶-۱- جمع‌بندی ۱۱۹
۶-۲- پیشنهادات ۱۲۰

منابع ۱۲۲
پیوست ۱۲۵

فهرست شکل‌ها

عنوان	صفحه
شکل ۲-۱ نمایش چارت	۲۰
شکل ۲-۲ نمایش اطلس	۲۱
شکل ۲-۳ نمایش محلی نگاشت	۲۲
شکل ۲-۴ نمایش زیرمنیفلد	۲۳
شکل ۲-۵ نمایش چارچوب فضایی و متصل به جسم	۲۳
شکل ۲-۶ منحنی های هم ارز یک بردار مماسی می سازند	۲۶
شکل ۲-۷ تعبیر معادلات ژئودزیک به شتاب	۴۳
شکل ۳-۱ : میدان های برداری چپ ناوردا	۷۰
شکل ۳-۲ : انتقال در گروهها و جبرهای لی	۷۰
شکل ۳-۳ ربات صفحه ای دو لینکی	۷۹
شکل ۴-۱ نیرو روی جسم صلب	۸۵
شکل ۴- ۲ بازوی رباتیکی	۹۹
شکل ۴-۳ جسم صلب صفحه ای	۱۰۰
شکل ۴-۴ دیسک در حال غلتیدن	۱۰۲
شکل A1 دیسک در حال غلتیدن	۱۲۵

فهرست جداول

عنوان	صفحه
جدول ۴-۱ نتایج کنترلپذیری برای **بازوی رباتیکی**	۱۰۰
جدول ۴-۲ نتایج کنترلپذیری برای جسم صلب صفحه ای	۱۰۱
جدول ۴-۳ نتایج کنترلپذیری برای **دیسک در حال غلتیدن**	۱۰۳

علایم

δ_{ij}	دلتای کرانیکر
$\alpha(v), \alpha \cdot v, \langle \alpha; v \rangle$	تصویر $v \in V$ در $\mathbb{R}$ توسط α
$[X, Y]$	براکت لی از Y, X
$ad_X Y$	مشتق لی Y نسبت به X
$\mathscr{L}_X Y$	مشتق لی Y نسبت به X
$\mathbb{G}$	متریک انرژی جنبشی
Q	منیفلد وضعیت
$T_q Q$	فضای مماسی در یک نقطه $q \in Q$
TQ	کلاف مماسی
$T_q^* Q$	مجموعه نگاشتهای خطی روی فضای برداری $T_q Q$
$T^* Q$	کلاف کتانژانتی
$\nabla_X Y$	مشتق هم وردایی Y نسبت به X
∇	ارتباط افاین
$\overset{\mathbb{G}}{\nabla}$	ارتباط لوی چیویتا
D	توزیع
Λ	دوگان توزیع
$ann(S)$	پوچ ساز S
$coann(S)$	دوگان پوچ ساز S
$L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$	توابع خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$
$SO(n)$	ماتریس های متعامد ویژه
Π_a	نگاشت سینماتیک پیش رونده
π_{TM}	تصویر کلاف مماسی
Tf	نگاشت مماسی از f
$\Vert_{X_0}$	تانسور اینرسی (β, μ) حول $X_0 \in \mathbb{R}^3$
KE	انرژی جنبشی
$\langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle$	ضرب داخلی برروی فضای بردای V بین زوج بردارهای $v_1, v_2 \in V$
V^*	فضای دوگان فضای برداری V

$\mathscr{L}_X f$	مشتق لی f نسبت به X
Γ_{ij}^{k}	مؤلفه های ارتباط برای ∇
$\overset{\mathbb{G}}{\Gamma}_{ij}^{k}$	نمادهای کریستوفل برای $\overset{\mathbb{G}}{\nabla}$
L	لاگرانژین
$L_{\mathbb{G}}$	لاگرانژین برای منیفلد ریمانی $(Q,\mathbb{G})$ و انرژی جنبشی $\mathbb{G}$
E	تابع انرژی
G	گروه لی
$\mathcal{G}(G)$	مجموعه مولدهای زیرگروه تک پارامتری
V	جبرلی
ad	عملگر الحاقی
L_g	نگاشت انتقال چپ
$\mathfrak{g}$	جبرلی $\mathfrak{g}$ از گروه G
R_g	نگاشت انتقال راست
φ	تابع خطا
$\varphi(q,r)$	خطای وضعیت
$\mathsf{T}_{(q,r)}$	نگاشت انتقال
$\dot{e}$	خطای سرعت
$B^{\#}$	$B-sharp$
B^{b}	$B-flat$

فصل اول :

مقدمه

سیستمهای کنترلی مکانیکی زیرمجموعه وسیع و جالبی از کل سیستمهای کنترلی را تشکیل می دهند. علی رغم تعدد این سیستم ها، کارهای اساسی اندکی جهت استفاده از ساختار خاص سیستمهای مکانیکی در راستای ایجاد ابزار تئوریک مناسبی جهت کنترل اینگونه سیستمها انجام شده است. ساختار در سیستمهای مکانیکی اساسا از دو دیدگاه ایجاد می شود، در فرمولبندی لاگرانژی، ساختار دینامیک مرتبه دو بر روی کلاف مماسی[1] منیفلد وضعیت است و در فرمولبندی هامیلتونی ساختار یک منیفلد سمپلکتیک[2] است.

بسیاری از سیستمهای مکانیکی رفتاری غیر خطی دارند و امکان تحلیل آنها به کمک خطی سازی و استفاده از روشهای خطی وجود ندارد و به علاوه همواره امکان ارائه یک راه حل عام برای آنها وجود ندارد. کنترل سیستمهای غیر خطی از یک سو با تئوری سیستمهای دینامیکی که به بررسی رفتار کیفی سیستمها (که توسط معادلات دیفرانسیل مشخص می شوند) می پردازد، آمیخته شده است و از سوی دیگر جهت بررسی و کنترل سیستمهای غیر خطی از هندسه دیفرانسیل استفاده می شود.

همچنین، علاقه به بررسی سیستمها به صورت عام و فارغ از محدودیتهای انتخاب دستگاه مختصات که باعث می شود توجه از مسائل اساسی طراحی و رفتار ذاتی سیستم به پیچ و خم های انتخاب مختصات منحرف شود، از یک طرف و از طرف دیگر این حقیقت که بردارها و ماتریس ها حالت خاصی از مفهوم عام تر تانسور هستند و همواره نمی توان تمامی مفاهیم فیزیکی را با یک بردار یا ماتریس شناخت (به عنوان مثال می توان به ماهیت نیرو اشاره کرد که یک بردار هم وردا است) پای شاخه دیگری از ریاضیات یعنی آنالیز تانسوری را به تئوری کنترل باز می کند.

لذا علی رغم اینکه تئوری کنترل به عنوان شاخه ای از علوم مهندسی شناخته می شود به صورت گسترده با شاخه های مختلف ریاضیات که به طور مشخص می توان به جبر خطی، تئوری معادلات دیفرانسیل، تئوری سیستم های دنیامیکی، آنالیز تانسوری و هندسه دیفرانسیل اشاره کرد، آمیخته شده است.

عموما در میان مهندسان دو دیدگاه قابل تمیز در مورد ریاضیات وجود دارد. حامیان دیدگاه اول مدعی این موضوع هستند که اصولا رسالت یک مهندس، بررسی جنبه های کاربردی مسائل است و آموختن ریاضیات تا آنجا ضرورت می یابد که بتوان میوه های ریاضی را که توسط ریاضی دانان پرورش داده شده است، چید.

(1) Tangent bundle
(2) Symplectic Manifold

طرفداران دیدگاه دوم علی رغم اعتقاد به لزوم کاربردی بودن تحقیقات، معتقدند که بیان و فهم دقیق مسائل نیاز به دانستن دقیق ریاضیات دارد و به علاوه حل برخی از مسائل تنها با ریاضیات سطح بالا امکان پذیر است. به نظر می رسد که مسئله ای که در این جا مطرح است میزان پذیرفتن هزینه، جهت آموختن ریاضیات و نوع نگاه به ریاضیات به عنوان هدف یا وسیله است.

ریاضیات زبان علم است و تاریخ علم با تاریخ ریاضیات به هم آمیخته اند. علم فیزیک و به طور خاص مکانیک نقش ویژه ای در توسعه ریاضیات بازی کرده است و این دو خدمات متقابلی به یکدیگر داشته اند. گاهی یک مسئله فیزیکی به توسعه ریاضیات کمک کرده است و گاه سالها پس از توسعه یک شاخه از ریاضیات کاربردهای فیزیکی جدیدی برای آن مطرح شده است. برای رابطه اول مثالهای متعددی قابل ذکر هستند و برای رابطه دوم می توان به مکانیک هندسی و کنترل هندسی به عنوان کاربردهای هندسه دیفرانسیل در مکانیک و تئوری کنترل اشاره کرد.

ارتباط تنگاتنگ بین ریاضیات و سایر علوم باعث ایجاد شاخه ای از ریاضیات با عنوان ریاضیات کاربردی شده است تا خلا موجود بین ریاضی دانان و محققان سایر علوم را پر کند تا با ایجاد زبانی مشترک بین آنها، بتوان به رسالت ریاضیات که همانا یافتن پاسخ برای مسائل گوناگون است، دست یافت و به ریاضیات به عنوان وسیله و نه هدف نگاه کرد. می توان ادعا کرد که فضای کلی حاکم بر این پایان نامه آمیخته ای از ریاضیات کاربردی و تئوری کنترل است.

۱-۱- هندسه دیفرانسیل چیست؟

هندسه دیفرانسیل شاخه ای از ریاضیات است که با استفاده از روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال و جبرهای خطی و چند خطی به مطالعه مسائل هندسی می پردازد. تئوری منحنی های صفحه ای و منحنی های فضایی و رویه ها در فضای اقلیدسی سه بعدی اساس توسعه این شاخه از ریاضیات را در قرن هجدهم و نوزدهم میلادی تشکیل داد. از اواخر قرن نوزدهم هندسه دیفرانسیل به سمت حوزه کلی تری از هندسه با ساختارهای هندسی روی منیفلدهای مشتق پذیر جهت گیری پیدا کرد. این علم به طور نزدیک با توپولوژی دیفرانسیلی و همچنین جنبه های هندسی تئوری معادلات دیفرانسیل ارتباط دارد و قدرت بالایی در ارائه روشهای تحلیلی در حل مسائل از خود نشان داده است.

مفهوم منیفلد (که بعدا به طور دقیق تعریف خواهد شد) مفهوم مرکزی بسیاری از شاخه های هندسه و برخی دیگر از شاخه های ریاضیات است، زیرا اجازه می دهد که ساختارهای پیچیده تری با زبان و خصوصیات شناخته شدهٔ فضاهای ساده تر نظیر فضای اقلیدسی معمول، بیان و درک شوند. به عنوان مثال، منیفلدی که با یک ساختار مشتق پذیر همراه شده است اجازه می دهد تا حساب به مفهوم رایج آن، روی آن منیفلد انجام شود و یا متریک ریمانی (مفهومی از فاصله که توسط یک فرم دو خطی[1] متقارن مثبت معین هموار بر روی فضای مماسی در هر نقطه منیفلد تعریف می شود) زمانی که به منیفلد اضافه می شود امکان اندازه گیری فاصله و زوایا را روی منیفلد فراهم می آورد. از منیفلدهای مشهور می توان به منیفلدهای سیمپلکتیک به عنوان فضای حالت در فرمولبندی هامیلتونی در مکانیک کلاسیک و یا منیفلدهای چهار بعدی لورنز که زمان- مکان را در تئوری عمومی نسبیت مدل می کنند، اشاره کرد.

هندسه ریمانی[2] که زیرشاخه ای از هندسه دیفرانسیل را تشکیل می دهد، به مطالعه منیفلد های ریمانی که منیفلدهایی هموار به همراه یک متریک ریمانی هستند، می پردازد. هندسه ریمانی، هندسه اقلیدسی را به فضاهایی که الزاما تخت نیستند که البته در یک همسایگی بی نهایت کوچک از هر نقطه به فضای اقلیدسی شبیهند، تعمیم می دهد. مفهوم مشتق سوئی از یک تابع از حساب چند متغیره، در هندسه ریمانی به مفهوم مشتق هم وردایی[3] از یک تانسور گسترش می یابد. همچنین مفاهیم و تکنیکهای بسیار دیگری از آنالیز و معادلات دیفرانسیل به هندسه ریمانی تعمیم داده شده اند. در این پایان نامه از این شاخه از هندسه دیفرانسیل استفاده می شود.

(1) Bilinear
(2) Reimanian Geometry
(3) Covariant Derivative

گروه خاصی از منیفلدها که ساختاری اضافی دارند، گروههای لی[1] می باشند که تمرکز در این پایان نامه بر این گروه از منیفلدهاست. یک گروه لی، گروهی است که همچنین یک منیفلد مشتق پذیر است با این خصوصیت که عمل گروهی با ساختار هموار منیفلد سازگار باشد. علاوه بر این موضوع که گروههای لی به طور طبیعی فضای وضعیت بسیاری از سیستمهای مکانیکی نظیر سیستمهای فضایی، زیر دریایی ها و بازوهای رباتیکی و... هستند، به دلیل هموار بودن آنها، امکان بررسی حرکت روی این گروهها فراهم می آید. یکی از دلایل اصلی استفاده از آنها این است که در سیستمهای مکانیکی بر روی گروههای لی (به این مفهوم که فضای وضعیت، گروه لی است) به دلیل ناوردایی خواص مکانیکی نسبت به اعمال گروهی، معمولا می توان مسئله را از روی گروه لی که یک منیفلد است در فرمول بندی لاگرانژی به جبرلی مربوط به آن و در فرمولبندی هامیلتونی به دوگان جبرلی مربوطه، فروکاست داد و با توجه به این که جبرهای لی، فضای برداری هستند، این فروکاست باعث ساده سازی در حل مسئله می شود.

(1) Lie groups