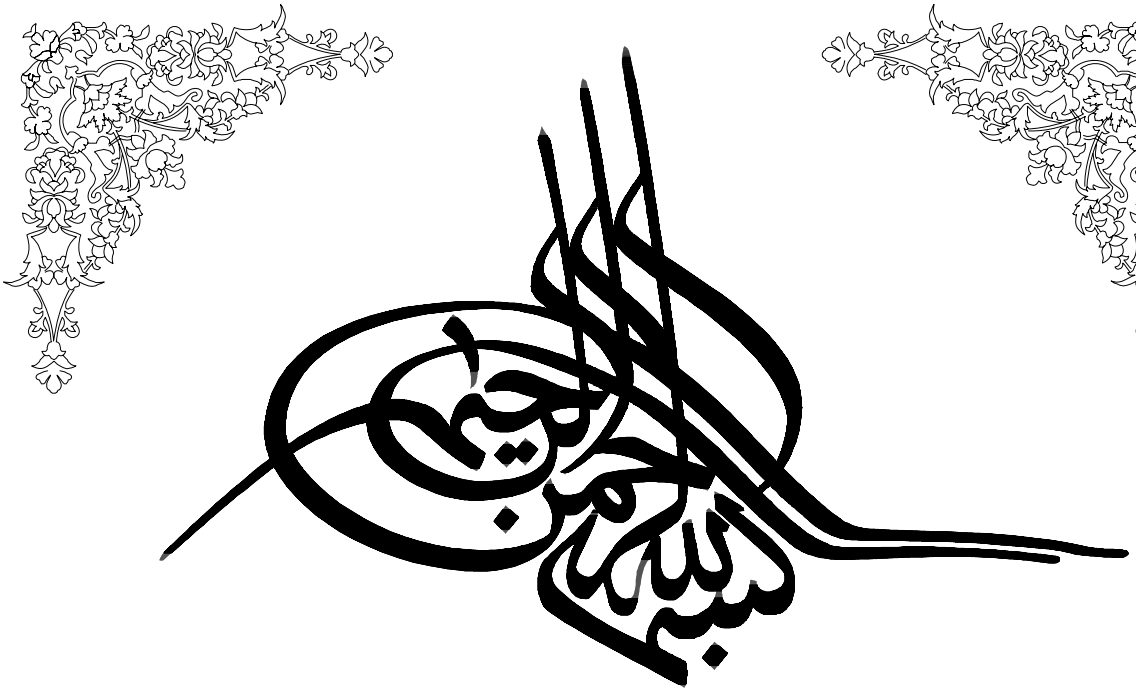

شکر خدای را که ز فضل خدای

گشت مزین چون بهشت این سرای

دانشکدهٔ مهندسی مکانیک

بررسی ارتعاشات ورق میندلین مستطیلی تحت تنش صفحه‌ای و واقع بر فونداسیون پسترناک با استفاده از روش ریلی ریتز

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد
در رشته
مهندسی مکانیک-طراحی کاربردی

یاسر میرزایی

استاد راهنما: دکتر شاهرخ حسینی هاشمی

شهریور ۸۵

چکیده:

ورقهای مستطیلی کاربرد وسیعی در سازه های مختلف مکانیکی ، فضایی ، دریـایی ، هـسته‌ای و در صنایع عمران دارند.از آنجائیکه درموارد مختلفی این ورقها متحمـل بارهـای دینـامیکی مـی‌شـوند ، بررسی ارتعاشات آزاد آنها اجتناب‌ناپذیر می‌باشد و در هر مسئله ارتعاشـی قبـل از هـر چیـز بدسـت آوردن فرکانس‌های طبیعی سازه و شکل حالت‌های ارتعاشی و نیروی کمانش در اولویت قرار دارد.

ورقی که در این پروژه مـورد بررسـی قـرار میگیـرد ، ورق مینـدلین مـستطیلی تحـت تـنش صفحه‌ای تک محوری یا دو محوری و واقع بر فونداسیون پسترناک می‌باشـد. بـا اسـتفاده از ترکیـب شرایط مرزی مختلف ، برای ورق مستطیلی ۲۱ شرط مرزی متفاوت وجود دارد. هدف اصلی در ایـن پروژه بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد شده و شکل حالت‌های ارتعاشـی و نیـروی کمـانش بی‌بعد شده و شکل مد کمانش برای ورق مذکور تحت شـرایط مـرزی مختلـف اسـت.تئـوری مـورد استفاده تئوری میندلین می‌باشد و روش حل نیز ، روش ریلی ریتز است.برای این کـار بـا تکیـه بـر تئوری میندلین انـرژی جنبـشی و انـرژی کرنـشی وانـرژی پتانـسیل ناشـی از فونداسـیون و تـنش صفحه‌ای محاسبه شده و برای نشان دادن درستی روابـط ، بـا اسـتفاده از روش همیلتـون معـادلات حاکم بر شرایط استاتیکی ورق استخراج شده و با روابطی که با استفاده از دیا گرام آزاد و تعـادل بـر ورق بدست آمده مقایسه شده است که پس از اطمینان ، از درستی روابط ، با استفاده از روش ریلـی ریتز برای ورقهای میندلین فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد شده و نیـروی کمـانش بـی‌بعـد شـده بـرای شرایط مرزی مختلف بدست آورده شده است.

تقدیم به

پدر عزیز و مادر مهربانم

به پاس قدردانی از زحمات بی دریغ ایشان

با تشکر و قدردانی فراوان از :

خداوند که به من وجود داد ، تا بتوانم زندگی کنم .

استاد بزرگ زندگی ام ، پدر بزرگوارم و یکتا مأمن هستیم ، مادر عزیزم .

استاد گرامیم جناب آقای دکتر شاهرخ حسینی هاشمی و جناب آقای دکتر کوروش خورشیدی ، که در تمامی مراحل انجام پایان نامه با عشق و علاقه فراوان مرا راهنمایی فرمودند و همواره بنده را مرهون لطف والای خویش قرار دادند .

و تمامی دوستانی که کمک های فراوانی به من ارزانی داشتند .

فهرست

عنوان	صفحه
فصل اول : مقدمه	
1-1مقدمه	2
1-2مطالعات انجام شده در زمینه ورق مستطیلی	2
فصل دوم : معادلات انرژی جنبشی و پتانسیل ورق تحت نیروی صفحه‌ای وروی فونداسیون پسترناک	
2-1 مقدمه	10
2-2 تئوری میندلین	10
2-3بدست آوردن انرژی جنبشی	14
2-4فرمولاسیون انرژی پتانسیل (کرنشی)	15
2-5فرمولاسیون اثر تنش صفحه ای	17
2-6فرمولاسیون اثر فونداسیون	19
2-7بی بعد سازی روابط بدست آمده	20
2-8بدست آوردن معادله حاکم بر شرایط استاتیکی ورق	22
فصل سوم : استفاده از روش ریلی ریتز در ورق مستطیلی میندلین	23
3-1مقدمه ای راجع به روش ریلی ریتز	30
3-2استفاده از روش ریلی ریتز برای ارتعاشات ورقهای میندلین مستطیلی	36
فصل چهارم : کمانش	
4-1مقدمه	45
4-2مقادیر نیروی کمانش	45
4-3بررسی همگرایی مقادیر نیروی کمانش	50
4-4بحث و بررسی نتایج بدست آمده	52
4-5تغیرات نیروی کمانش بر حسب نسبت ا ضلاع	74
4-6تغیرات نیروی کمانش بر حسب K_1	75

7-4تغیرات نیروی کمانش بر حسب δ 79

فصل پنجم : فرکانس طبیعی

5-1بررسی همگرایی مقادیر فرکانس طبیعی 84

5-2مقادیر فرکانس طبیعی 85

5-3تغیرات فرکانس طبیعی بر حسب نسبت اضلاع 106

5-4تغیرات فرکانس طبیعی بر حسب K_1 109

5-5تغیرات فرکانس طبیعی بر حسب K_2 112

5-6تغیرات فرکانس طبیعی بر حسب δ 114

مراجع 116

فهرست اشکال و نمودارها

عنوان	صفحه
شکل(۱-۲-۲): ورق ایزوتروپیک ضخیم	۱۰
شکل(۲-۲-۲): سطح مقطع ورق ضخیم در صفحه y-z	۱۱
شکل(۱-۳-۲): ورق ایزوتروپیک ضخیم	۱۴
شکل(۱-۵-۲): ورق ایزوتروپیک ضخیم	۱۷
شکل(۲-۵-۲): المان ورق ایزوتروپیک ضخیم بعد از تغیر شکل	۱۷
شکل(۱-۲-۳) : سطح مقطع ورق fscs	۳۷
شکل(۲-۲-۳) : ورق sssc	۳۸
شکل(۳-۲-۳) : ورق sfss	۳۸
شکل(۴-۲-۳) : ورق sfsf	۳۹
شکل(۵-۲-۳) : ورق ssss	۳۹
شکل(۶-۲-۳) : ورق scsc	۳۹
شکل(۷-۲-۳): ورق sfff	۳۹
شکل(۸-۲-۳) : ورق cccf	۳۹
شکل(۹-۲-۳) : ورق ccsf	۴۰
شکل(۱۰-۲-۳) : ورق cfcf	۴۰
شکل(۱۱-۲-۳) : ورق cscf	۴۰
شکل(۱۲-۲-۳): ورق cfff	۴۰
شکل(۱۳-۲-۳) : ورق cfsf	۴۰
شکل(۱۴-۲-۳) : ورق sfcs	۵۰
شکل(۱۵-۲-۳) : ورق cccc	۵۰
شکل(۱۶-۲-۳) : ورق cccs	۵۰
شکل(۱۷-۲-۳): ورق ccff	۵۰

شکل(۱۸-۲-۳) : ورق ccss ۵۰
شکل(۱۹-۲-۳) : ورق csff ۵۱
شکل(۲۰-۲-۳): ورق ffff ۵۱
شکل(۲۱-۲-۳) : ورق sfff ۵۱
جدول(۱-۴-۴) : شکل مد کمانش برای ورق مربعی میندلین S-C-S-C و بدون فونداسیون و0.2 = ۵۳
جدول(۲-۴-۴) : شکل مد کمانش برای ورق مربعی میندلین S-C-S-S و بدون فونداسیون و0.2 = ۵۴
جدول(۳-۴-۴) : شکل مد کمانش برای ورق مربعی میندلین S-F-S-F و بدون فونداسیون و0.2 = ۵۵
جدول(۴-۴-۴) : شکل مد کمانش برای ورق مربعی میندلین S-S-S-F و بدون فونداسیون و0.2 = ۵۶
جدول(۵-۴-۴) : شکل مد کمانش برای ورق مربعی میندلین S-S-S-S و بدون فونداسیون و0.2 = ۵۷
جدول(۶-۴-۴) : شکل مد کمانش برای ورق مربعی میندلین S-F-S-C و بدون فونداسیون و0.2 = ۵۸
جدول(۷-۴-۴) : شکل مد کمانش برای ورق مربعی میندلین C-F-C-C و بدون فونداسیون و0.2 = ۵۹
جدول(۸-۴-۴) : شکل مد کمانش برای ورق مربعی میندلین C-C-S-F و بدون فونداسیون و0.2 = ۶۰
جدول(۹-۴-۴) : شکل مد کمانش برای ورق مربعی میندلین C-F-C-F و بدون فونداسیون و0.2 = ۶۱
جدول(۱۰-۴-۴) : شکل مد کمانش برای ورق مربعی میندلین C-S-C-F و بدون فونداسیون و0.2 = ۶۲
جدول(۱۱-۴-۴) : شکل مد کمانش برای ورق مربعی میندلین C-F-F-F و بدون فونداسیون و0.2 = ۶۳
جدول(۱۲-۴-۴) : شکل مد کمانش برای ورق مربعی میندلین C-F-S-F و بدون فونداسیون و0.2 = ۶۴
جدول(۱۳-۴-۴) : شکل مد کمانش برای ورق مربعی میندلین S-F-C-S و بدون فونداسیون و0.2 = ۶۵
جدول(۱۴-۴-۴) : شکل مد کمانش برای ورق مربعی میندلین S-F-F-F و بدون فونداسیون و0.2 = ۶۶
جدول(۱۵-۴-۴) : شکل مد کمانش برای ورق مربعی میندلین C-C-C-C و بدون فونداسیون و0.2 = ۶۷
جدول(۱۶-۴-۴) : شکل مد کمانش برای ورق مربعی میندلین C-C-C-S و بدون فونداسیون و0.2 = ۶۸
جدول(۱۷-۴-۴) : شکل مد کمانش برای ورق مربعی میندلینC-C-F-F و بدون فونداسیون و0.2 = ۶۹
جدول(۱۸-۴-۴) : شکل مد کمانش برای ورق مربعی میندلین C-C-S-S و بدون فونداسیون و0.2 = ۷۰
جدول(۱۹-۴-۴) : شکل مد کمانش برای ورق مربعی میندلین C-S-F-F و بدون فونداسیون و0.2 = ۷۱
جدول(۲۰-۴-۴) : شکل مد کمانش برای ورق مربعی میندلین F-F-F-F و بدون فونداسیون و0.2 = ۷۲
جدول(۲۱-۴-۴) : شکل مد کمانش برای ورق مربعی میندلین S-S-F-F و بدون فونداسیون و0.2 = ۷۳
نمودار(۱-۵-۴): نمودار تغیرات نیروی کمانش بر حسب η ۷۴

نمودار(۱-۶-۴) : نمودار تغیرات نیروی کمانش بر حسب K_1 برای $\xi_1 = 0, \xi_2 = -1$ ۷۵
نمودار(۲-۶-۴): نمودار تغیرات نیروی کمانش بر حسب K_1 برای $\xi_1 = -1, \xi_2 = 0$ ۷۶
نمودار(۳-۶-۴): نمودار تغیرات نیروی کمانش بر حسب K_1 برای $\xi_1 = -1, \xi_2 = -1$ ۷۶
نمودار(۱-۷-۴): نمودار تغیرات نیروی کمانش بر حسب K_2 برای $\xi_1 = -1, \xi_2 = 0$ ۷۹
نمودار(۲-۷-۴): نمودار تغیرات نیروی کمانش بر حسب K_2 برای $\xi_1 = 0, \xi_2 = -1$ ۷۹
نمودار(۳-۷-۴): نمودار تغیرات نیروی کمانش بر حسب K_2 برای $\xi_1 = -1, \xi_2 = -1$ ۸۰
نمودار(۱-۸-۴) : نمودار تغیرات نیروی کمانش بر حسب δ برای $\xi_1 = -1, \xi_2 = 0$ ۸۰
نمودار(۲-۸-۴) : نمودار تغیرات نیروی کمانش بر حسب δ برای $\xi_1 = 0, \xi_2 = -1$ ۸۱
نمودار(۳-۸-۴) : نمودار تغیرات نیروی کمانش بر حسب δ برای $\xi_1 = -1, \xi_2 = 0$ ۸۱
جدول(۱۰-۳-۵) : شکل مد ارتعاشی برای ورق مربعی میندلین S-C-S-C و بدون فونداسیون ۹۶
جدول(۱۱-۳-۵) : شکل مد ارتعاشی برای ورق مربعی میندلین S-C-S-S و بدون فونداسیون ۹۶
جدول(۱۲-۳-۵) : شکل مد ارتعاشی برای ورق مربعی میندلین S-F-S-F و بدون فونداسیون ۹۷
جدول(۱۳-۳-۵) : شکل مد ارتعاشی برای ورق مربعی میندلین S-S-S-F و بدون فونداسیون ۹۷
جدول(۱۴-۳-۵) : شکل مد ارتعاشی برای ورق مربعی میندلین S-S-S-S و بدون فونداسیون ۹۸
جدول(۱۵-۳-۵) : شکل مد ارتعاشی برای ورق مربعی میندلین S-F-S-C و بدون فونداسیون ۹۸
جدول(۱۶-۳-۵) : شکل مد ارتعاشی برای ورق مربعی میندلین C-F-C-C و بدون فونداسیون ۹۹
جدول(۱۷-۳-۵) : شکل مد ارتعاشی برای ورق مربعی میندلین C-C-S-F و بدون فونداسیون ۹۹
جدول(۱۸-۳-۵): شکل مد ارتعاشی برای ورق مربعی میندلین C-F-C-F و بدون فونداسیون ۱۰۰
جدول(۱۹-۳-۵) : شکل مد ارتعاشی برای ورق مربعی میندلین C-S-C-F و بدون فونداسیون ۱۰۰
جدول(۲۰-۳-۵) : شکل مد ارتعاشی برای ورق مربعی میندلین C-F-F-F و بدون فونداسیون ۱۰۱
جدول(۲۱-۳-۵) : شکل مد ارتعاشی برای ورق مربعی میندلین C-F-S-F و بدون فونداسیون ۱۰۱
جدول(۲۲-۳-۵) : شکل مد ارتعاشی برای ورق مربعی میندلین S-F-C-S و بدون فونداسیون ۱۰۲
جدول(۲۳-۳-۵) : شکل مد ارتعاشی برای ورق مربعی میندلین S-F-F-F و بدون فونداسیون ۱۰۲
جدول(۲۴-۳-۵) : شکل مد ارتعاشی برای ورق مربعی میندلین C-C-C-C و بدون فونداسیون ۱۰۳
جدول(۲۵-۳-۵) : شکل مد ارتعاشی برای ورق مربعی میندلین C-C-C-S و بدون فونداسیون ۱۰۳
جدول(۲۶-۳-۵) : شکل مد ارتعاشی برای ورق مربعی میندلین C-C-F-F و بدون فونداسیون ۱۰۴

جدول(۲۷-۳-۵) : شکل مد ارتعاشی برای ورق مربعی میندلین C-C-S-S و بدون فونداسیون ۱۰۴
جدول(۲۸-۴-۴) : شکل مد ارتعاشی برای ورق مربعی میندلین C-S-F-F و بدون فونداسیون ۱۰۵
جدول(۲۹-۳-۵) : شکل مد ارتعاشی برای ورق مربعی میندلین F-F-F-F و بدون فونداسیون ۱۰۵
جدول(۳۰-۳-۵) : شکل مد ارتعاشی برای ورق مربعی میندلین S-S-F-F و بدون فونداسیون ۱۰۶
نمودار(۱-۴-۵): نمودار تغیرات فرکانس طبیعی اول بر حسب η ۱۰۷
نمودار(۲-۴-۵): نمودار تغیرات فرکانس طبیعی دوم بر حسب η ۱۰۷
نمودار(۳-۴-۵): نمودار تغیرات فرکانس طبیعی سوم بر حسب η ۱۰۸
نمودار(۴-۴-۵): نمودار تغیرات فرکانس طبیعی چهارم بر حسب η ۱۰۸
نمودار(۵-۴-۵): نمودار تغیرات فرکانس طبیعی پنجم بر حسب η ۱۰۸
نمودار(۶-۴-۵): نمودار تغیرات فرکانس طبیعی ششم بر حسب η ۱۰۹
نمودار(۱-۵-۵): نمودار تغیرات فرکانس طبیعی اول بر حسب K_1 ۱۰۹
نمودار(۲-۵-۵): نمودار تغیرات فرکانس طبیعی دوم بر حسب K_1 ۱۱۰
نمودار(۳-۵-۵): نمودار تغیرات فرکانس طبیعی سوم بر حسب K_1 ۱۱۰
نمودار(۴-۵-۵): نمودار تغیرات فرکانس طبیعی چهارم بر حسب K_1 ۱۱۱
نمودار(۵-۵-۵): نمودار تغیرات فرکانس طبیعی پنجم بر حسب K_1 ۱۱۱
نمودار(۶-۵-۵): نمودار تغیرات فرکانس طبیعی ششم بر حسب K_1 ۱۱۱
نمودار(۱-۶-۵): نمودار تغیرات فرکانس طبیعی اول بر حسب K_2 ۱۱۲
نمودار(۲-۶-۵): نمودار تغیرات فرکانس طبیعی دوم بر حسب K_2 ۱۱۲
نمودار(۳-۶-۵): نمودار تغیرات فرکانس طبیعی سوم بر حسب K_2 ۱۱۳
نمودار(۴-۶-۵): نمودار تغیرات فرکانس طبیعی چهارم بر حسب K_2 ۱۱۳
نمودار(۵-۶-۵): نمودار تغیرات فرکانس طبیعی پنجم بر حسب K_2 ۱۱۳
نمودار(۶-۶-۵): نمودار تغیرات فرکانس طبیعی ششم بر حسب K_2 ۱۱۴
نمودار(۱-۷-۵): نمودار تغیرات فرکانس طبیعی اول بر حسب δ ۱۱۴
نمودار(۲-۷-۵): نمودار تغیرات فرکانس طبیعی دوم بر حسب δ ۱۱۵
نمودار(۲-۷-۵): نمودار تغیرات فرکانس طبیعی سوم بر حسب δ ۱۱۵

فهرست جداول

عنوان	صفحه
جدول (1-2-4) : نیروی کمانش بی بعد شده برای ورق میندلین مستطیلیS-S-S-S	46
جدول (2-2-4): نیروی کمانش بی بعد شده برای ورق میندلین مستطیلی S-S-S-S واقع بر فونداسیون پسترناک	47
جدول (3-2-4):نیروی کمانش بی بعد شده برای ورق میندلین مستطیلی S-S-S-S واقع بر فونداسیون پسترناک	48
جدول (4-2-4): نیروی کمانش بی بعد شده برای ورق میندلین مستطیلی S-S-S-S واقع بر فونداسیون پسترناک	49
جدول(1-3-4) : نحوه همگرایی نیروی کمانش برای شرایط مرزی چهار طرف گیردار	51
جدول(1-1-5) :نحوه همگرایی فرکانس‌های طبیعی برای شرایط مرزی چهار طرف گیردار	84
جدول (1-2-5) : شش فرکانس طبیعی بی بعد شده اول برای ورق میندلین مربعی ، تحت تنش صفحه ای تک محوری یا دو محوری	87
جدول (2-2-5) : شش فرکانس طبیعی بی بعد شده اول برای ورق میندلین مربعی، تحت تنش صفحه ای تک محوری یا دو محوری	88
جدول (3-2-5) : شش فرکانس طبیعی بی بعد شده اول برای ورق میندلین مربعی، تحت تنش صفحه ای تک محوری یا دو محوری	89
جدول (4-2-5) : شش فرکانس طبیعی اول بی بعد شده برای ورق میندلین مربعیS-S-S-S واقع بر فونداسیون پسترناک، تحت تنش تک محوری یا دو محوری	90
جدول (5-2-5) : شش فرکانس طبیعی اول بی بعد شده برای ورق میندلین مربعیS-S-S-S واقع بر فونداسیون پسترناک، تحت تنش تک محوری یا دو محوری	91
جدول (6-2-5) : شش فرکانس طبیعی اول بی بعد شده برای ورق میندلین مربعیS-S-S-S واقع بر فونداسیون پسترناک، تحت تنش تک محوری یا دو محوری	92
جدول (7-2-5) : شش فرکانس طبیعی اول بی بعد شده برای ورق میندلین مربعیS-S-S-S واقع بر	93

فونداسیون پسترناک، تحت تنش تک محوری یا دو محوری
جدول (8-2-5) : شش فرکانس طبیعی اول بی بعد شده برای ورق میندلین مربعیS-S-S-S واقع بر 94
فونداسیون پسترناک، تحت تنش تک محوری یا دو محوری
جدول (9-2-5) : شش فرکانس طبیعی اول بی بعد شده برای ورق میندلین مربعیS-S-S-S واقع بر 95
فونداسیون پسترناک، تحت تنش تک محوری یا دو محوری

فصل اول

مقدمه

۱-۱ مقدمه :

ورقهای مستطیلی کاربرد وسیعی در سازه های مختلف مکانیکی ، فضایی ، دریایی ، هسته‌ای و در صنایع عمران دارند.از آنجائیکه درموارد مختلفی این ورقها متحمل بارهای دینامیکی می‌شوند ، بررسی ارتعاشات آزاد آنها اجتناب‌ناپذیر می‌باشد و مطالعه در زمینه ارتعاشات این ورقها باعث بهینه کردن طراحی و کاهش هزینه های اقتصادی در پروژه‌ها می‌شود و دسترسی به بازدهی بیشتر را میسر می‌نماید ، به لحاظ کاربردی شناخت و آنالیز ارتعاشات ورق ، همچنین آشنایی با مشخصات ارتعاشی سازه برای کاهش عکس العمل ارتعاشی و پیدا کردن یک تنش بهینه در هنگامی که سازه تحت یک نیروی دینامیکی مثل حرکات ناشی از ترافیک ماشینها ، نیروهای آیرودینامیکی و غیره قرار دارد ، لازم است.

یکی از پر کاربردترین اشکال ورق ، ورق ضخیم مستطیلی است وبا توجه به اینکه در هر مسئله ارتعاشی قبل از هر چیز بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی سازه و شکل حالت‌های ارتعاشی و نیروی کمانش در اولویت قرار دارد هدف اصلی در این پروژه بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی سازه و شکل حالت‌های ارتعاشی و نیروی کمانش برای شرایط مرزی مختلف و نسبتهای متفاوت است.

۱-۲ مطالعات انجام شده در زمینه ورق مستطیلی:

مطالعه ارتعاش آزاد ورق به سال ۱۸۰۰ میلادی بر میگردد.در سال۱۸۰۲ کلدنی[1] (Chladini) ارتعاشات آزاد ورق مربعی با لبه‌های آزاد را مورد مطالعه قرار داد و الگوهای مدی ورق را مشاهده نمود.در سال 1872ریلی(Rayleigh) [2] یک روش کلی برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی در ساختارهای متفاوت ارائه نمود.

در سال 1909ریتز(Ritz)[3] روش ریلی را ، با انتخاب ضرایبی از یک دسته توابع شکل قابل قبول ، بهبود بخشید ، این روش به عنوان روش ریلی–ریتز یا روش ریتز شناخته می شودو یکی از محبوبترین روشهای شناخته شده تقریبی برای آنالیز ارتعاشی ساختارهای متفاوت است.بررسی‌های زیادی در مورد ارتعاشات ورق با شکل ، مرز و بارگذاری‌های متفاوت انجام شده است و درمتن‌های استانداردی همچون

مراجع [4,5] وهمچنین مراجع [8-6] و مقالات [11-9] گـزارش شـده اسـت.در بـسیاری از کارهـای صـورت گرفته اثر تغییر شکل برشی نادیده انگاشته شده ، که می‌توان از آنها به مرور لیسا (Leissa) [17-12] ، مـرور برت (Bert)[23-18] در مورد ورقهای ساندویچی و کامپوزیتی و مقالات مرروی دیگری مثـل [24,25] اشـاره کرد.

اثر برشی برای ورقهای ضخیم بسیار مهم است.اگر اثر برشی نادیده انگاشته شود حـل بدسـت آمـده از دقت خوبی برخوردار نیست.از اینرو تحقیقات بسیاری در زمینه وارد کردن اثر برشی در ورق انجام شده اسـت و به همین علت تئوریهای مختلفی در این زمینه بوجود آمده است که از ایـن دسـته مـی‌تـوان بـه تئوریهـای زیراشاره کرد:

تئوری مرتبه اول میندلین و رزینر(Mindlin-Reissner)[26,28].

تئوری میندلین اصـلاح شـده بوسـیله : بـرگن و وانـگ(Wang-Bergan)[29] ، یانـگ(Yang)[30] ، ویتنی و پاگانو(Pagano-Whitney)[31].

تئـــوری مرتبـــه بـــالاتر بوســـیله نلـــسون و لـــورچ (Nelson Lorch)[32] ، لـــو(Lo)[33] ، لوینـــــــــسون(Levinson)[34] ، مـــــــورثی(Murthy)[35] ، ردی(Reddy)[36] ، Senthilnathan [37]و دونگ(Doong)[38].

در آنـالیز ارتعاشـی ورق نـسبتاً ضـخیم ایزوتروپیـک ، تئـوری مرتبـه اول مینـدلین–رزینـر مناسـب می‌باشد.اگرچه در این تئوری توزیع تنش برشی در ضخامت ورق ثابت فرض شده است اما می توان با انتخاب فاکتور اصلاحیK ، دقت مناسبی از حل را بدست آوریم به این فاکتور اصلاحی مدول برشـی نیـز گفتـه مـی شـود کـه بوسـیله(Rao ، Serinivas)[27] و دیگـران توضـیح داده شـده اسـت.معمـولاً فـاکتور برشـی را $k = 5/6$انتخاب می‌کنند(کـه بوسـیله ریتـز [۲۸] بدسـت آورده شـده اسـت) ، همچنـین فـاکتور بـرش را می‌توانیم $k = \pi^2/12$انتخاب کنیم (که بوسیله میندلین [26] بدست آورده شده است)وهمچنین می‌توانیم اثر برشی را با توجه به رابطه $k = 20(1+\nu)(24+25\nu+\nu^2)$ برحسب νبیان کنیم.

ما باید بدانیم هنگامی که از ورق اورتروپیک یا کامپوزیتی استفاده می‌کنیم باید از تئوریهای کرنش برشی مرتبه بالا به جای کرنش برشی مرتبه اول استتفاده کنیم تا بتوانیم رفتار این ورقها را بدرستی توضیح دهیم.اخیراً مطالعات بسیار خوبی در این زمینه توسط بورژن(Burton)[39] انجام شده است. در بررسی ارتعاش آزاد ورق کامپوزیتی بدست آمده که اگر از یک فاکتو برشی مناسب استفاده شود آنگاه تئوری مرتبه اول میندلین نتایج قابل قبولی بدست می‌دهد.

دراین قسمت مروری فهرست‌وار در مورد کارهای انجام شده بر روی ورق مستطیلی میندلین انجام می‌دهیم.

میندلین(Mindlin)[40] ارتعاشات ورق مستطیلی میندلین با شرایط مرزی چهار طرف ساده و همچنین شرایط مرزی دو ضلع مقابل ساده و دو ضلع مقابل دیگر آزاد را مورد بررسی قرار داد و حلی تحلیلی برای ورق مورد نظر بدست آورد.همچنین شکل مدهای ممکن برای یک ورق چهار لبه ساده را بدست آورد و کوپلینگ بین مدی برای sfsf را مورد مطالعه قرار داد.

ویتنی و پاگانو (Pagano ، Whitney)[31] ، تئوری میندلینی را که یانگ (Yang)[30] برای ورقهای لایه ای پیشنهاد کرده‌بود ، اندکی اصلاح کردندو خمش و ارتعاش ورق لایه ای ایزوتروپیک را بررسی کردند و حل تحلیلی بسته ای برای محاسبه فرکانس ارتعاشی ورق مستطیلی لایه ای وایزومتریک با شرایط مرزی چهار طرف ساده بدست آوردندو نتایج عددی برای فرکانس‌های اصلی یک ورق مربعی چهار لایه ای نامتقارن را ارائه کردند.

سرینواس(Srinivas) [27] از تئوری دقیق سه بعدی ورق برای مطالعه ورق مستطیلی ضخیم لایه‌ای با شرایط مرزی چهار طرف ساده استفاده کردو کارهای مهمی در این مقاله همچون نتایج آن صورت گرفت و این نتایج در بسیاری از تحقیقات به عنوان مرجع استفاده شده است.

چنگ و چاکرابارتی (Chakrabarti ، Cheung)[41] ، آنالیز ارتعاش آزاد یک ورق مستطیلی ضخیم و لایه‌ای را با روش المان لایه‌ای انجام دادند.

نور(Noor) [42] ، بررسی‌هایی درباره ورق‌های کامپوزتی چند لایه انجام داد.او نتایج تئوری میندلین و تئوری الاستیک سه بعدی را با هم مقایسه کرد ، نتایج حاصله نشان داد تئوری کلاسیک ورق نمی‌تواند رفتار ارتعاش آزاد ورق کامپوزیتی اورترپیک با نسبت ضخامت بیشتر از 0.1 را توضیح دهد ، در حالی که تئوری میندلین فرکانس‌های پایین یک ورق با نسبت ضخامت کمتراز 0.2 را با دقت قابل قبولی مشخص می‌کند.

برانل و رابرتسون (Robertson ، Brunelle) [43] مسأله ارتعاشی ورق میندلین را تحت تنش اولیه مورد مطالعه قرار دادند.آنها با استفاده از روش تفیر شکل جزئی و روش حساب تفیرات (که اصل همیلتون را در بردارد) معادلات غیرخطی حرکت را بدست آوردند ، سپس ورق مستطیلی با شرایط مرزی چهار لبه ساده را در نظر گرفتند که تحت تنش اولیه ای ناشی از خمش یکنواخت وکشش یکنواخت قرار دارد و هر دو منتجه تنش در یک جهت عمل می‌کند. چن و دونگ(Chen ، Doong) [44] مطالعات مشابه‌ای با استفاده از روش گلرکین انجام دادند و ارتعاشات با دامنه بزرگ برای یک ورق مستطیلی ضخیم با شرایط مرزی ساده تحت تنش ناشی از کشش و خمش خالص را مورد مطالعه قرار دادند دونگ(Doong)[45] با استفاده از تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی ، ارتعاشات و ایستابی ورق مستطیلی ضخیم را مورد مطالعه قرار داد.که در آن تنش اولیه ورق می‌تواند ناشی از تنش محوری یا تنش خمشی باشد.

راک و هینتون(Hinton ، Rock)[46] المان خمشی ورق مربعی ایزومتریک را معرفی کرده و با استفاده از آن ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی را آنالیز کردند ، در این مطالعات تئوری میندلین مورد استفاده قرار گرفت.

بنسون و هینتون(Hinton ، Benson)[47] با روش finite strip استاتیک ، ارتعاشات و ایستادگی ورق میندلین را آنالیز کردند و مدل نوار راست و مدل نوار منحنی را مورد توجه قرار دادند و فرکانس‌های طبیعی برای ورق مربعی با شرایط مرزی چهار طرف ساده و شرایط مرزی سه طرف ساده و یک طرف گیردار رابدست آوردند.

ماگراب (Magrab) [48] بـا اسـتفاده از روش گلـرکین ، ارتعاشـات آزاد ورق مـستطیلی اورترپیـک را مطالعه نمود.تئوری میندلین را استفاده کرد و فرکانس‌های اصلی برای ورق چهار طـرف سـاده یـا ورق چهـار طرف گیردار و همچنین لبه‌ها روی پایه الاستیک ، ارائه شد.

دیو(Dawe) [49] با استفاده از روش finite strip ارتعاشات ورق میندلین را مورد مطالعه قـرار داد.ورق میندلین مربعی با انواع شرایط مرزی مد نظر بود.همچنین اثر اندازه فاکتور برشی مورد بررسـی قـرار گرفـت. دیـو و رافائـل(Roufaeil ، Dawe) [50] از روش حـل یکـسانی اسـتفاده کردنـد و ارتعـاش ورق مـستطیلی میندلین را مطالعه کردند.

دیو و رافائل(Roufaeil ، Dawe) [51] بـا اسـتفاده از روش ریلـی ریتـز ارتعـاش آزاد ورق مینـدلین را مطالعه کردند.در مدلشان برای توابع شکل مجاز ازتوابع تیر تیموشنکر برای میدان جابه‌جایی استفاده کردنـد و ورق مربعی با پنج شرط مرزی مختلف مثال زده شد.آنها [52] مطالعات قبلی را برای ارتعاش ورق میندلین مستطیلی تحت کشش در صفحه بسط دادند.

اکسو و الکابی(Aksu ، Al-Kaabi) [53] با استفاده از روش اختلاف جزئـی ، ارتعاشـات آزاد یـک ورق میندلین با ضخامت متغیر خطی را مطالعه کردند. فرکـانس ارتعاشـی بـرای ورق مربعـی ضـخامت متغیـر بـا شرایط مرزی چهار طرف ساده یا شرایط مرزی دو ضلع روبروی هم ساده و دو ضلع دیگر گیردار بدست آورده شد. آنها مجدداً [54] برای ورق مربعی با ضخامتی که بطور خطی از دو طرف ورق تغییر میکند ، نتایجی ارائه کردند. روش یکسانی توسط اکسو [55] برای ورق میندلین که گوشه‌های آن بصورت نقطه ای گیر شده انـد ، استفاده شد.

ردی(Reddy) [56] ارتعاشات با دامنه زیاد ورق مستطیلی را با روش المان محدود مورد بررسـی قـرار داد.تئوری میندلین مورد استفاده قرار گرفت.همچنین فرکانس های ارتعاشی برای ورق مربعی ایزوتروپیک بـا لایه کامپوزیتی ارائه شد.

ردی و فان(Phan,Reddy) [57] ایستایی و ارتعاشات ورق لایه ای ، اورتروپیک وایزوتروپیک بااسـتفاده از تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی ، پیشنهاد شده بوسیله ردی [36] ، را مورد مطالعـه قراردادنـد. حـل

دقیق برای ورق چهار طرف ساده بدست آورده شد و با حل دقیق با استفاده از تئوری سه بعـدی الاستیـسیته و تئوری تغییر شکل برش مرتبه اول وتئوری کلاسیک ورق مقایسه شد. آنها پی‌بردند که تئوری مرتبه بـالا از تئوری مرتبه اول و تئوری کللاسیک دقت بیشتری در بدست آوردن فرکانس‌هـای طبیعـی و نیـروی کمـانش دارد. لازم به ذکر است که در تئوری ردی هیچگونه فاکتور برشی اصلاحی لازم نیست.

دیو و کریـگ (Craig ، Dawe) [58-60] ، مطالعـاتی دربـاره آنـالیز ارتعاشـی ورق مـستطیلی لایـه‌ای متقارن و ضخیم انجام دادند آنها از تئوری مینـدلین اسـتفاده کـرده و از روش ریلـی ریـز و روش finit strip برای حل استفاده کردندو همچنین فرکانس ارتعاشی برای ورق مـستطیلی لایـه‌ای متقـارن باشـرایط مـرزی مختلف ارائه شد. همچنین آنها [60] اثر تنش صفحه ای را بر روی ورق مد نظر قرار دادند.

ونگ و دیو (Dawe ، Wange) [61] با استفااده از روش ریلی ریتز و توابع spiline ارتعاشـات آزاد ورق مستطیلی ضخیم را آنالیز کردند.تئوری مورد استفاده تئوری میندلین بود.فرکانس‌های ارتعاشـی ورق لایـه‌ای ایزوتروپیک و اورتروپیک برای شرایط مرزی مختلف بدست آمد.

لیو(Liew) [62-65] رفتار ارتعاشی ورق میندلین مستطیلی ایزوتروپیک را مورد مطالعه قـرار داد.روش مورد استفاده برای حل ، روش ریلی ریتز و آنالیز مورد استفاده در این تحقیقات ، تئـوری مینـدلین بـود.ورق تحت 21 حالت شرط مرزی مختلف مدنظر بوده است.[62] ارتعـاش ورق مـستطیلی ضـخیم ، [63] ارتعـاش ورق مستطیلی ضخیم با تکیه بر خط تکیه‌گاهی ، [64] ارتعاش ورق مستطیلی ضـخیم بـا تکیـه بـر خطـوط تکیه‌گاهی ، [65] ارتعاش ورق مستطیلی تحت تـنش در صـفحه میـانی مـدنظر بـوده اسـت.لیـو [66] رفتـار ارتعاشی ورقی را که در وسط آن سختی اضافه شده ، مورد توجه قرار دادو اثر تـنش ناشـی از سـختی اضـافه شده در وسط ، بر فرکانس ارتعاشی مد نظر قرار داد.

ونگ (Wang) [67] روابط دقیق بـین فرکـانس ارتعاشـی را ، از تئـوری ورق کیرشـهف و تئـوری ورق میندلین برای شرایط مرزی چهار طرف ساده استخراج کرد و این روابط را برای مشخص کردن فرکانس‌هـای ارتعاشی ورق ضخیم با شرایط مرزی ساده و دیگر اشکال (دایره‌ای ،مثلثی) با استفاده از دانش ورق نازک بکار