دانشگاه سیستان و بلوچستان

تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

۰-کرانداری گروه های توپولوژیکی آزاد

استاد راهنما:

دکتر غلامرضا رضایی

تحقیق و نگارش:

مهدی دیانتی

شهریور ۹۰

تقدیر و تشکر:

خداوند مهربان را به شکرانهٔ الطاف بی‌کرانش و به واسطهٔ نعمت آگاهی که بر آدم بخشید، می‌ستایم. امیدوارم با یاری حق تعالی آنچه را فرا گرفته‌ام، در راه رضای او و پیشرفت جامعه بکارگیرم.

پیش از همه، از اساتید بزرگ زندگی ام، پدر و مادر عزیزم، تشکر می‌کنم که اگر کمک ها و دعاهای آن ها نبود، نمی توانستم به این مرحله برسم.

از استاد راهنمای گرانقدرم، جناب آقای دکتر غلامرضا رضایی که این پایان‌نامه حاصل راهنمایی ها و حمایت های صمیمانه و ارزنده ایشان می‌باشد کمال تشکر را دارم.

از اساتید بزرگوار جناب آقای دکترحاجی محمد محمدی نژاد و جناب آقای دکتر رحمت ا... لشکری پور که زحمت مطالعه و داوری پایان نامه را برعهده داشتند تشکر و قدر دانی می نمایم.

هم چنین از دوستان عزیزم آقایان : غلامرضا جلالی ، جواد جمالزاده ، جواد گلزار پور، محمد امین ناصری کمال تشکر را دارم و امیدوارم ، همیشه موفق و پیروز باشند.

مهدی دیانتی

چکیده

با فرض عدم وجود Qـنقاط گروه توپولوژیکی آزاد $F(X)$ روی فضای تیخونوف X، ۰ـکراندار است اگر و فقط اگر هر تصویر متری پذیر T از X اسچیپرز باشد اگر و فقط اگر همه توان های متناهی $F(X)$، ۰ـکراندار باشند.

فهرست مندرجات

پیش گفتار

جبر و توپولوژی دو شاخه اصلی از ریاضیات می باشند که می توانند نقش مکملی را بازی کنند. توپولوژی درباره همگرایی وپیوستگی مطالعه می کند وچارچوبی را برای مطالعه حد مشخص می کند و بیشتر مطالعه آن اختصاص به مجموعه های نامتناهی دارد و در کل روش توسیع آن کیفی است. اما جبر مطالعه انواع عمل ها را نشان می دهد و پایه ای برای الگوریتم ها و محاسبات است. هر چند به علت این تضاد رفتاری به نظر نمی آید این دو بخواهند برخوردی با هم داشته باشند، اما در کاربرد و در مراتب بالای ریاضی مانند سیستم های دینامیک وآنالیز تابعی جبر و توپولوژی ناگزیر به هم برخورد می کنند. در بسیاری از مباحث ریاضی ترکیبی از ساختارهای جبری و توپولوژیکی را داریم، فضاهای توابع خطی، فضاهای توپولوژیکی خطی، گروه ها و میدان های توپولوژیکی از این نوع اند. عاملی که می تواند رابطه بین توپولوژی و عمل جبری را توصیف کند تقریبا واضح است، مانند پیوستگی عمل به طور منفک یا با هم. اصطلاح جبر توپولوژیکی در قرن بیستم توسط توپولوژی دانان وجبری دانان به کار برده شد . بعضی از افراد شاخص در این رابطه: جی دیودونه[۱]، پونتریاگین [۲]و ای.ویل [۳] می باشند. نظریه گروه های توپولوژیکی که شاخه ای از جبر توپولوژیکی است جنبه های توپولوژیکی جبر توپولوژیکی را بررسی می کند که این شامل مطالعه همه خواص توپولوژیکی ازجایگاه ساختار جبری کاملا وابسته به آن می باشد.

---

[۱] J.dieudonne

[۲] Pontryagin

[۳] A.Weil

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱—۱ مقدمه

در فصل اول تعاریف و مفاهیم مقدماتی از فضاهای توپولوژیکی و ساختارهای جبری برای آشنایی بیشتر با موضوع پایان نامه بیان شده‌است. تعاریف و قضایای این فصل را می توان در اکثر کتاب های توپولوژی یافت، به خصوص قضایای این فصل از کتاب انگلکینگ [۱] مورد استفاده قرار گرفته است. در فصل بعدی با برخی مفاهیم نیم فیلترها و بعضی خواص آن ها آشنا می‌شویم. سپس برای آشنایی بیشتر با این مفاهیم، خواص و قضایایی از آن ها را بیان و اثبات می‌کنیم. فصل سوم را با معرفی فضاهای چند پوششی آغاز کرده و اطلاعات لازم و مرتبط با فضاهای چند پوششی جمع آوری شده که در آن عمل ضرب نیم مستقیم فضاهای چند پوششی را تعریف می کنیم. در بخش بعدی آن با خاصیت Fـمنجر در فضاهای چند پوششی آشنا می شویم.سپس این خاصیت را در گروه واره های(نیمه)چند پوششی نشان می دهیم. در ادامه به دنبال بررسی این خاصیت در گروه های توپولوژیکی و مونوئیدهای توپولوژیکی می پردازیم. این نتایج ابزارهای مورد نیاز برای اثبات قضایا در بخش پایانی را فراهم می آورد.

۲—۱ گروه

تعریف ۱.۲.۱: مجموعه S همراه با عمل دوتایی $S \times S \to S$: . بینوئید نامیده می شود. در صورتی که عمل دوتایی شرکت پذیر باشد مجموعه S نیم گروه نامیده می شود.

تعریف ۲.۲.۱: عنصر e از نیم گروه S را همانی گوییم، اگر

$$\forall x \in S \quad xe = x = ex$$

تعریف ۳.۲.۱: نیم گروهS که دارای عضو همانی باشد مونوئید نامیده می شود.

تعریف ۴.۲.۱: فرض کنید نیم گروه S شامل همانی باشد. عنصر a را در S معکوس

[۱] Engelking

پذیر گوییم، اگر عنصری مانند b از S یافت شود که $ab = ba = e$.

تعریف ۵.۲.۱: اگر هر عنصر نیم گروه S که شامل همانی است معکوس پذیر باشد S را یک گروه نامیم.

مثال ۶.۲.۱: $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}$ با عمل ضرب نیم گروه هایی هستند که گروه نمی باشند.

مثال ۷.۲.۱: $\mathbb{Z}$ با عمل جمع و $\mathbb{Q}^*$ و $\mathbb{R}^*$ با عمل ضرب گروه می باشند.

تعریف ۸.۲.۱: زیر مجموعه A از گروه S را متقارن گوییم اگر $A = A^{-1}$.

تعریف ۹.۲.۱: زیر مجموعه H از گروه G زیر گروه نامیده می شود، اگر به ازای هر a و b متعلق به H، $ab^{-1} \in H$.

تعریف ۱۰.۲.۱: فرض کنید H زیر گروهی از گروه G باشد و $a \in G$. آن گاه مجموعه های aH و Ha به ترتیب همدسته های چپ و راست H در G نامیده می شوند.

تعریف ۱۱.۲.۱: فرض کنید H یک زیر گروه از گروه G باشد. اگر برای هر $a \in G$ داشته باشیم $a^{-1}Ha = H$ یا $aH = Ha$، H زیر گروه نرمال از G نامیده می شود.

تعریف ۱۲.۲.۱: فرض کنید G و H دو نیم گروه باشند. یک هم ریختی از نیم گروه H به نیم گروه S نگاشتی مانند $f : H \to S$ است به طوری که $f(ab) = f(a)f(b)$.

تعریف ۱۳.۲.۱: هم ریختی که یک به یک و برو باشد یک ریختی نامیده می

شود.

۱–۳ فضاهای توپولوژیکی

تعریف ۱.۳.۱: فرض کنید X مجموعه ای غیر تهی وτ گردایه ای از زیر مجموعه های X باشد، یعنی $\tau \subseteq P(X)$، τ را یک توپولوژی روی X نامیم، هرگاه

(۱) $\phi \in \tau$ و $X \in \tau$،

(۲) اگر $U_۱, U_۲ \in \tau$ آن گاه $U_۱ \cap U_۲ \in \tau$،

(۳) اگر به ازای هر$i \in I$، $U_i \in \tau$ آن گاه $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$.

به هر یک ازاعضای τ یک مجموعه باز و به مجموعه هایی که متمم آن ها باز است، بسته گفته می شود.

در ادامه منظوراز فضای توپولوژیکی X، (X,τ) خواهد بود.

تعریف ۲.۳.۱: کوچک ترین توپولوژی که فقط شامل ϕ وX است توپولوژی ناگسسته و توپولوژی که شامل تمام زیر مجموعه های X باشد توپولوژی گسسته نامیده می شود.

تعریف ۳.۳.۱: توپولوژی $\tau_۱$ را قوی تر از توپولوژی $\tau_۲$(توپولوژی $\tau_۲$ را ضعیف تر از $\tau_۱$) نامیم اگر $\tau_۱ \subseteq \tau_۲$.

اگر روی یک مجموعه توپولوژی های متعددی تعریف شود، توپولوژی ناگسسته ضعیف ترین و توپولوژی گسسته قوی ترین توپولوژی خواهد بود.

تعریف ۴.۳.۱: فرض کنید(X,τ) یک فضای توپولوژیکی باشد گردایه $\mathcal{B}$ از زیر مجموعه های باز X یک پایه برای τ گفته می شود، اگر هر مجموعه باز $U \in \tau$، اجتماعی از عناصر $\mathcal{B}$ باشد.

گزاره ۵.۳.۱: هر پایه در شرایط زیر صدق می کند:

(آ) برای هر $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ و هر نقطه $x \in U_1 \cap U_2$، $U \in \mathcal{B}$ چنان موجود است که $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$.

(ب) $X = \bigcup\{U : U \in \mathcal{B}\}$. به عبارت دیگر برای هر $x \in X$، $U \in \mathcal{B}$ چنان موجود است که $x \in U$.

تعریف ۶.۳.۱: خانواده $p \subseteq \tau$ یک زیر پایه برای X نامیده می شود، اگر اشتراک متناهی از عناصر p پایه ای برای X باشد.

تعریف ۷.۳.۱: خانواده $\mathcal{B}(x)$ از همسایگی های x پایه ای برای X در نقطه x نامیده می شود، اگر برای هر همسایگی V از x، $U \in \mathcal{B}(x)$ وجود داشته باشد که $x \in U \subseteq V$.

۱—۴ توابع پیوسته

تعریف ۱.۴.۱: فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیکی و $f : X \to Y$ باشد. در این صورت f را در $x \in X$ پیوسته گویند، هرگاه به ازای هر مجموعه باز شامل $f(x)$ مانند V، مجموعه بازی مانند U شامل x وجود داشته باشد به طوری که $f(U) \subseteq V$.

قضیه ۲.۴.۱: فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیکی دلخواه باشند و $f : X \to Y$ یک تابع باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل اند:

(۱) f پیوسته است.

(۲) به ازای هر مجموعه باز مانند U در Y ، $f^{-1}(U)$ در X باز است.

(۳) به ازای هر مجموعه بسته مانند F در Y ، $f^{-1}(F)$ در X بسته است.

(۴) به ازای هر $B \subseteq Y$، $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

(۵) به ازای هر $A \subseteq X$، $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

۱ــ۵ فضاهای فشرده

تعریف ۱.۵.۱: فرض کنید X یک مجموعه و $A \subseteq X$ باشد. گردایه $\mathcal{C}$ از زیرمجموعه‌های X را یک پوشش برای A(یا یک پوشش A) گویند، در صورتی که $A \subseteq \bigcup\limits_{C \in \mathcal{C}} C$. به بیان دیگر، گویند $\mathcal{C}$ مجموعه A را می‌پوشاند.

تعریف ۲.۵.۱: فضای X را فشرده گویند، هرگاه هر پوشش باز X دارای یک زیر پوشش متناهی باشد. به عبارت دیگر، هرگاه $\mathcal{C}$ پوشش باز دلخواهی برای X باشد، آنگاه $\mathcal{C}$ اعضایی مانند $C_۱$،$C_۲$،$\cdots$وC_n داشته باشد به طوری که $X = \bigcup\limits_{i=۱}^{n} C_i$.

قضیه ۳.۵.۱: هر زیرمجموعه بسته یک فضای فشرده، فشرده است.

قضیه ۴.۵.۱: فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیکی و $f : X \to Y$ تابعی پیوسته باشد. اگر X فشرده باشد، آنگاه $f(X)$ فشرده است.

۱ــ۶ اصول جداسازی

تعریف ۱.۶.۱: فضای توپولوژیکی X را یک فضای $T_۰$ گوییم، هرگاه برای هر دو نقطه متمایز از آن مجموعه بازی موجود باشد که یک و تنها یکی از آن ها را شامل شود.

تعریف ۲.۶.۱: فضای توپولوژیکی X فضای $T_۱$ گفته می‌شود، اگر برای هر دو نقطه متمایز x و y از آن مجموعه‌های بازی مانند U و V موجود باشد که $x \in U$ و $y \in V$ و $x \notin V$ و $y \notin U$.

تعریف ۳.۶.۱: فضای توپولوژیکی X یک فضای T_2 یا هاسدورف[2] است، هرگاه برای هر دو نقطه متمایز x و y از آن، مجموعه‌های باز U و V موجود باشند که دارای اشتراک تهی هستند و $x \in U$ و $y \in V$.

تعریف ۴.۶.۱: فضای توپولوژیکی X را منظم گوییم، هرگاه X یک فضای T_1 باشد که برای $x \in X$ و زیرمجموعه بسته F از X که x را شامل نمی‌شود، زیرمجموعه‌های باز جدا از هم U و V موجود باشند به قسمی که $x \in U$ و $F \subseteq V$.

تعریف ۵.۶.۱: فضای توپولوژیکی X را T_3 گوییم، هرگاه منظم و T_0 باشد.

تعریف ۶.۶.۱: فضای توپولوژیکی X را کاملا منظم گوییم، هرگاه X یک فضای T_1 باشد که برای هر $x \in X$ و هر زیرمجموعه بسته $F \subseteq X$ که x را شامل نمی‌شود، تابع پیوسته $f : X \to [0, 1]$ موجود باشد چنان که $f(x) = 0$ و $f(F) = 1$.

تعریف ۷.۶.۱: فضای توپولوژیکی X فضای $T_{3\frac{1}{2}}$ یا فضای تیخونوف[3] گفته می‌شود، اگر X فضای T_1 و کاملا منظم باشد.

تعریف ۸.۶.۱: فضای توپولوژیکی X را نرمال گوییم، هرگاه X یک فضای T_1 باشد که برای زیرمجموعه‌های بسته جدا از هم F و K از آن، بتوان زیرمجموعه‌های باز جدا از هم U و V را یافت چنان که $F \subseteq U$ و $K \subseteq V$.

تعریف ۹.۶.۱: فضای توپولوژیکی X، T_4 نامیده می شود، هرگاه T_1 ونرمال باشد.

---

[2] Hausdorff

[3] Tychonoff

گزاره ۱۰.۶.۱: فرض کنید X یک فضای T_i باشد. آنگاه زیرفضای آن نیز یک فضای T_i خواهد بود($i \leq ۳\frac{۱}{۲}$).

۱—۷ اصول شمارایی

تعریف ۱.۷.۱: هر مجموعه از اعداد اصلی با رابطه($\leq$)خوش ترتیب است و بنابراین مجموعه تمام اعداد اصلی به شکل $|\mathcal{B}|$ که در آن $\mathcal{B}$ پایه ای از فضای توپولوژیکی X است دارای کوچک ترین عضو است. این عدد اصلی وزن فضای توپولوژیکی X گفته می شود و با $W(X)$ نشان داده می شود.

تعریف ۲.۷.۱: فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی و$x \in X$ باشد. به کوچکترین عدد اصلی به صورت $|\mathcal{B}(x)|$ که در آن(x) $\mathcal{B}$ پایه ای برای x باشد مشخصه X در x گفته می شود وبا $\chi(x,(X,\tau))$ نمادگذاری می شود.

تعریف ۳.۷.۱: سوپریمم اعداد$\chi(x,(X,\tau))$ برای هر $x \in X$، مشخصه X نامیده می شود. این عدد اصلی با $\chi(X)$ نشان داده می شود.

تعریف ۴.۷.۱: اگر $\chi(X) \leq N_۰$ باشد، گوییم فضای توپولوژیکی X در اولین اصل شمارایی صدق می کند.

تعریف ۵.۷.۱: اگر$W(X) \leq N_۰$، گوییم فضای توپولوژیکی X در دومین اصل شمارایی صدق می کند. به عبارت دیگر خانواده شمارایی چون $A = \{U_i\}_{i\in I}$ از همسایگی های باز X چنان باشد که هر مجموعه باز در X به صورت اجتماعی از عناصر A باشد.

گزاره ۶.۷.۱: فرض کنید فضای X در اولین(دومین) اصل شمارایی صدق کند، آن گاه هر

زیر فضای آن نیز در اولین(دومین) اصل شمارایی صدق می کند.

تعریف ۷.۷.۱: فضای X را لیندلوف[۴] گوییم، هرگاه هر پوشش باز آن زیرپوشش شمارایی داشته باشد.

گزاره ۸.۷.۱: زیر مجموعه بسته فضای لیندلوف، لیندلوف است.

گزاره ۹.۷.۱: هر فضای منظم ولیندلوف، نرمال است.

گزاره ۱۰.۷.۱: هر فضا که در دومین اصل شمارایی صدق کند، لیندلوف است.

۱—۸ همسان ریختی وخاصیت توپولوژیکی

قضیه ۱.۸.۱: فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیکی باشند و $f : X \longrightarrow Y$ یک تناظر یک به یک و برو باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل اند:

(۱) f باز است.

(۲) f بسته است.

(۳) f^{-1} پیوسته است.

تعریف ۲.۸.۱: نگاشت دوسویی پیوسته f که در یکی از شرایط قضیه قبل صدق کند را یک همسان ریختی گوییم.

[۴] Lindelof

تعریف ۳.۸.۱: خاصیت ρ را توپولوژیکی گوییم اگر فضای توپولوژیکی (X,τ) دارای خاصیت ρ باشد، آنگاه هر فضای همسان ریخت با آن نیز دارای خاصیت ρ باشد.

۱ـ۹ فیلترها

تعریف ۱.۹.۱: فرض کنید $P(X)$ مجموعه همه زیرمجموعه‌های X باشد. برای هر $X \neq \phi$ و $F \neq \phi$ و $F \subseteq P(X)$، F را یک فیلتر روی X گوییم، هرگاه

(۱) اعضای F ناتهی باشند.

(۲) اشتراک هر تعداد متناهی از اعضای F عضو F باشد.

(۳) هر زیر مجموعه از X و شامل عضوی از F، متعلق به F باشد، یعنی اگر $B \subseteq X$ و $A \in F$ و $A \subseteq B$، آنگاه $B \in F$.

با توجه به شرط های (۱) و (۲) هر اشتراک متناهی از مجموعه‌های F، ناتهی است. علاوه بر این شرط (۳) نتیجه می‌دهد که X نیز عضو F می‌باشد.

تعریف ۲.۹.۱: فیلتر F روی X آزاد نامیده می شود، هرگاه $\cap F = \emptyset$ باشد.

تعریف ۳.۹.۱: فیلتر Y را تظریف F گوییم، هرگاه $F \subseteq Y$.

تعریف ۴.۹.۱: فیلتر U را یک ابرفیلتر گوییم، اگر هیچ تظریف غیربدیهی نداشته باشد، به عبارت دیگر برای هر فیلتر F که $U \subseteq F$، آنگاه $F = U$.

تعریف ۵.۹.۱: ابرفیلتر p ابرفیلتر آزاد روی X است، اگر p ابرفیلتری باشد که شامل

هیچ زیرمجموعه متناهی از X نیست.

۱ــ۱۰ متر و فضاهای متری پذیر

تعریف ۱.۱۰.۱: (X,d) را یک فضای متری گویند، هرگاه X یک مجموعه و تابع d روی مجموعه $X\times X$ تعریف شده باشد و به ازای هر $x,y\in X$ داشته باشیم:

(۱) $d(x,x)=0$،

(۲) اگر $x\neq y$، $d(x,y)>0$،

(۳) $d(x,y)=d(y,x)$،

(۴) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$.

در این صورت مجموعه X را فضا و عناصر X را نقطه و تابع d را متر روی مجموعه X می‌نامند. $d(x,y)$ را فاصله بین x,y نامند.

تعریف ۲.۱۰.۱: فضای توپولوژیک X را متری پذیر گویند، اگر متر d روی مجموعه X موجود باشد، به‌طوریکه توپولوژی القائی توسط متر d با توپولوژی اصلی فضای X منطبق باشد.

قضیه ۳.۱۰.۱: هر فضای منظم X که دارای یک پایه شمارا باشد، متری پذیر است.

۱ــ۱۱ آشنایی باگروه های توپولوژیکی، پیراتوپولوژیکی و نیم توپولوژیکی

تعریف ۱.۱۱.۱: فضای توپولوژیکی G که در آن G یک گروه نیز است یک گروه نیم توپولوژیکی نامیده می شود، اگر نگاشت $g:(x,y)\to xy$ از $G\times G$ به G نسبت به هر متغیر به طور جداگانه پیوسته باشد. به عبارت دیگر به ازای هر مجموعه بازی از xy مانند W، مجموعه بازی مانند U شامل x و بازی مانند V شامل y وجود داشته باشد که $Uy\subseteq W$ و $xV\subseteq W$.

تعریف ۲.۱۱.۱: فضای توپولوژیکی G که در آن G گروه نیز می باشد، گروه پیراتوپولوژیکی نامیده می شود، اگر نگاشت $h:(x,y)\to xy$ از $G\times G$ به روی G پیوسته باشد، یعنی به ازای هر بازی مانند W شامل xy بازی شامل x مانند U و بازی شامل y مانند V وجود داشته باشدکه $UV\subseteq W$.

تعریف ۳.۱۱.۱: یک گروه پیراتوپولوژیکی که در آن نگاشت معکوس $k: x\mapsto x^{-1}$ از G به G پیوسته باشد گروه توپولوژیکی نامیده می شود.

نتیجه ۴.۱۱.۱: هر گروه توپولوژیکی،گروهی پیراتوپولوژیکی وهر گروه پیراتوپولوژیکی یک گروه نیم توپولوژیکی می باشد.

قضیه ۵.۱۱.۱: گروه G همراه با توپولوژی τ گروه توپولوژیکی است اگر وفقط اگر نگاشت $\left\{\begin{smallmatrix} G\times G\to G \\ (x,y)\mapsto xy^{-1}\end{smallmatrix}\right.$، پیوسته باشد.

قضیه ۶.۱۱.۱: فرض کنید G یک گروه نیم توپولوژیکی باشد. آنگاه انتقال‌های چپ تحت عناصر G، همسان ریختی‌هایی از G هستند.

نتیجه ۷.۱۱.۱: اگر G گروه نیم توپولوژیکی باشد، آن گاه انتقال های راست تحت عناصر G همسان ریختی هایی از G هستند.

گزاره ۸.۱۱.۱: فرض کنید G گروه نیم توپولوژیکی و A و B زیر مجموعه هایی از G و $g\in G$ باشد. آن گاه

(آ) اگر A باز باشد، Ag و gA باز هستند.

(ب) اگر A بسته باشد، Ag و gA بسته هستند.

(ج) اگر A باز باشد، AB و BA باز هستند.

(د) اگر A بسته و B متناهی باشد، AB و BA بسته هستند.

قضیه ۹.۱۱.۱: فرض کنید G گروه‌توپولوژیکی و $\mathcal{B}$ یک پایه از همسایگی های باز حول همانی e در G باشد آن گاه:

(آ) به ازای هر $U \in \mathcal{B}$، V از$\mathcal{B}$ چنان موجود است که $V^{۲} \subseteq U$.

(ب) به ازای هر $U \in \mathcal{B}$ و به ازای هر $x \in U$، V از$\mathcal{B}$ چنان موجود است که $Vx \subseteq U$.

(ج) به ازای هر $U \in \mathcal{B}$ و به ازای هر $x \in G$، V از$\mathcal{B}$ چنان موجود است که $xVx^{-۱} \subseteq U$.

(د) به ازای هر $U,V \in \mathcal{B}$، $W \in \mathcal{B}$ چنان موجود است که $W \subseteq U \cap V$.

(ه) G هاسدورف است اگر و فقط اگر $e = \bigcap\{UU^{-۱} : U \in \mathcal{B}\}$. به ویژه اگر G هاسدورف باشد، آن گاه $\bigcap_{U\in\mathcal{B}} U = \{e\}$.

(و) برای هر $U \in \mathcal{B}$، $V \in \mathcal{B}$ چنان موجود باشد که $V^{-۱} \subseteq U$.

۱ــ۱۲ گروه های توپولوژیکی آزاد

در این قسمت مفهوم گروه های جبری آزاد را به گروه های توپولوژیکی توسیع می دهیم و نشان می دهیم که اگر X فضای توپولوژیکی کاملا منظم باشد، آن گاه گروه توپولوژیکی آزاد $F(X)$ وجود دارد و از نظر یکریختی، گروه توپولوژیکی منحصر به فرد است.

تعریف ۱.۱۲.۱: رسته دسته ای از اشیا می باشد مانند $A, B, C, ...$ به همراه

(۱) یک دسته از مجموعه ها که به صورت $hom(A,B)$ نمایش داده می شوند(A,B هر زوج دلخواه در رسته بوده و هر عنصر $hom(A,B)$ را یک ریخت از A به B نامیده و به صورت $f : A \to B$ نمایش می دهند.).

(۲) برای هر دسته سه تایی (A,B,C) از اعضای رسته یک تابع به صورت زیر وجود دارد: