دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده عمران

حل نیمه تحلیلی معادلات حاکم بر ورق سه بعدی در حالات دینامیکی و استاتیکی با استفاده از روش توابع پایه هموار

پایان نامه کارشناسی ارشد عمران

گرایش سازه

حسن صبوری

استاد راهنما

دکتر بیژن برومند

۱۳۸۹

تشکر و قدردانی

- با تشکر و سپاس فراوان از **جناب آقای دکتر بیژن برومند** که هدایت و راهنمایی این پایان نامه را به عهده داشته و هم‌چنین در طی همکاری درس‌هایی فراتر پایان نامه را به این جانب آموختند.
- با تشکر از **جناب آقای دکتر مجتبی ازهری** که مشاوره این پایان نامه را پذیرفته و بی شک اندوخته‌های اینجانب از ایشان در پیشبرد این تحقیق تأثیری بسزا داشته است.
- سپاس فراوان از **جناب آقای دکتر محمد مهدی سعادت پور** که در روند تحصیلی اینجانب تأثیر به سزایی داشته‌اند.
- با تشکر از جناب آقای دکتر فرشید مسیبی و تمامی افرادی که اینجانب را در راستای انجام این پروژه یاری نمودند.

فهرست مطالب

چکیده

موضوع این تحقیق حل نیمه تحلیلی معادلات استاتیکی و دینامیکی حاکم بر محیط سه بعدی ورق ضخیم با استفاده از روش توابع پایه هموار که یک روش بدون شبکه محسوب می‌شود، بدون محدودیت در ضخامت، شکل بارگذاری و شرایط مرزی می‌باشد. این معادلات شامل معادلات تعادل (ناویر) حاکم بر کل محیط ورق، تنش سطحی در سطوح بالا و پایین و همچنین شرایط مرزی در لبه ها اعم از شرایط مرزی نیرویی و تغییر مکانی می‌باشند. استفاده از معادلهٔ تعادل به عنوان معادلهٔ حاکم بر رفتار سیستم و در مرحله بعد شروع حل آن با در نظرگیری میدان تغییرمکانی که در معادله تعادل صدق می‌کند، در روش ارائه شده در این پایان نامه، موجب از بین رفتن خطاهای معمول در روش‌های مرسوم برای آنالیز رفتار ورق می‌شوند. همچنین در روش حاضر از تبدیل ویژه‌ای برای ارضاء شرایط مرزی استفاده شده است که علاوه بر قابلیت ارضاء شرایط مرزی مختلف، مدلسازی مسائل مختلف را با دقت زیاد ممکن می‌سازد.

چنان‌که در روند حل این معادلات دیده خواهد شد، کلید اساسی در دست یافتن به نتایجی با دقت مطلوب، بکارگیری پایه های مناسب در ساخت سری جواب می باشد. لذا هدف اصلی در این پایان‌نامه بدست آوردن پایه‌هایی است که معادلات تعادل و تنش سطحی در سطوح بالا و پایین را بطور همزمان ارضاء نمایند. برای محاسبه بخش خصوصی جواب نیز از دو روش، یعنی استفاده از سری فوریه و تبدیل ویژه استفاده خواهد شد. روش ارائه شده یکی از دقیق‌ترین روش‌های حل در حیطهٔ مسائل ورق ضخیم بوده و تنها منبع خطا در مرحله ارضاء شرایط مرزی است. به منظور بررسی دقت و میزان کارآمدی روش ارائه‌شده، در انتهای پایان‌نامه نتایج به دست آمده از مثالهای حل شده با استفاده از روش پیشنهادی با حل‌های در دست در این زمینه مقایسه می‌گردد.

کلمات کلیدی : حل نیمه تحلیلی، روش توابع پایه هموار، روش بدون شبکه، ورق ضخیم، معادلات تعادل (ناویر) ، تبدیل ویژه،

فصل اول

مقدمه و کلیات

۱-۱- مقدمه

حل معادلات دیفرانسیل گوناگون از قبیل تحلیل معادلات دیفرانسیل حاکم بر محیط ورق‌های ضخیم از جمله چالش‌های پیش‌روی مهندسین و محققین بوده است. آنالیز تنش و جابجایی در ورق‌های ضخیم، از جمله تحلیل‌های پیچیده به حساب می‌آید و همین موضوع باعث اعمال فرضیات و ساده‌سازی‌هایی در روابط بکارگرفته شده برای حل آنها می‌شود. از طرف دیگر همین ساده‌سازی‌ها، به خصوص هنگام افزایش ضخامت موجب به وجود آمدن خطاهای چشمگیر در آنالیز رفتار این سیستم‌ها می‌شود. صرف‌نظرکردن از تغییر شکل‌های برشی عرضی که در تئوری‌های کلاسیک ارائه شده است، موجب بدست‌آمدن تغییر شکل‌های کم و یا تغییر شکل‌هایی با فرکانس طبیعی زیاد در این موارد می‌شود. به همین علت تئوری‌های اصلاحی مانند تئوری تغییر شکل‌های برشی درجه اول [۱] و تئوری تغییر شکل‌های برشی درجات بالاتر [۲] ،برای تحلیل آنها ارائه شده است که نتایجی دقیق‌تر نسبت به تئوری‌های کلاسیک ارائه می دهند.

تئوری تغییرشکل‌های برشی درجه اول بواسطه اعمال اصلاحاتی بر تئوری کلاسیک بدست آمده است، به طوری که صفحات عمود بر صفحه میانی، پس از تغییرشکل، عمود باقی نمانده و با صفحه میانی زاویه غیرقائمه می‌سازند. با وجود اصلاحات انجام گرفته، در این تئوری‌ها هنوز مشکلاتی وجود دارند، که با افزایش ضخامت ورق تأثیر خود را

بیشتر نشان می‌دهند. از جمله مهمترین این مشکلات، بدون انحناء ماندن صفحات پس از تغییرشکل می‌باشد، این حالت از این فرض ناشی می‌شود که در این روش کرنش‌های برشی عمودی در امتداد ضخامت ثابت فرض شده‌اند. از این رو تئوری‌های تغییرشکل‌های برشی درجه اول قادر به مدل‌سازی تمام رفتارهای ممکن در اثر اعمال شرایط مرزی و بارگذاری مختلف نمی‌باشند. در تئوری‌های درجات بالاتر نیز با افزایش مرتبه تابع تغییرمکان و درنظرگیری پارامترهای بیشتر، رفتار ورق بهتر و دقیق‌تر تحلیل می‌شود، اما همچنان با افزایش ضخامت ورق خطاهای معمول بخصوص در مرزها غیرقابل چشم‌پوشی می‌باشند.

یکی از مهمترین علل بروز خطا در تئوری‌های ورق ضخیم، استفاده از توابع تنش برای تحلیل رفتار ورق می‌باشد. اشکال این رویکرد آن است که تابع تغییرمکان، طی عملیات انتگرال‌گیری از تابع تنش و اعمال شرایط مرزی بدست می‌آید، در صورتی‌که حل مسئله از طریق بدست آوردن تابع تغییرمکانی که در معادله تعادل حاکم بر ورق صدق می‌کند دنبال شود، خطاهای معمول کاهش یافته و حل دقیق‌تر خواهد شد. بنابراین با توجه به مطالب گفته شده اولین گام برای دست‌یابی به تابع تغییرمکانی نسبتاً دقیق، که قادر به بیان رفتار ورق تحت بارگذاری و شرایط مرزی مختلف باشد، یافتن تابع تغییرمکانی است که از حل معادله تعادل حاکم بر ورق بدست آید.

لازم به ذکر است که معادله تعادل حاکم بر ورق از خانواده‌ی معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت است. از جمله تکنیک‌های ارائه شده برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای با ضرایب ثابت، تکنیک استفاده از روش توابع پایه می‌باشد. این روش که در حقیقت یک روش بدون شبکه محسوب می‌شود، بسیاری از مشکلات موجود در روش‌هایی چون روش المان‌های محدود مانند تولید شبکه مناسب را برطرف می‌سازد. از اینرو در این پایان‌نامه معادلات دیفرانسیل حاکم بر محیط ورق (معادلات تعادل به عنوان معادله حاکم بر رفتار جسم) نیز با استفاده از همین روش ارضاء می‌شوند، با این تفاوت که در سطوح بالا و پایین پایه‌ها به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که علاوه بر ارضاء معادلات تعادل، تنش سطحی نیز در این سطوح به صورت تحلیلی ارضاء شده و تنها در لبه‌های مرزی از روش های نقطه‌گذاری استفاده می‌شود. اساس این روش، تقریب جواب معادله دیفرانسیل با استفاده از سری متشکل از توابع پایه صدق کننده در معادله دیفرانسیل است. در این حالت جواب همگن معادله تعادل به صورت یک سری مرکب از توابع نمایی بیان می‌گردد. آن چه که روش مورد استفاده در پایان‌نامه حاضر را از روش‌های متداول توابع پایه متمایز می‌سازد، استفاده از توابع هموار در بیان جواب‌ها و همچنین نحوه برآورد ضرایب ثابت در سری جواب می‌باشد. در مرحله ارضاء شرایط مرزی نیز از تبدیلی ویژه برای محاسبه این ضرایب استفاده می‌گردد. این تبدیل برای اولین‌بار در مرجع [۳] و در حل مسائل انتشار امواج در محیط‌های نیمه بینهایت به روش المان‌های محدود معرفی گردید. با استفاده از این تبدیل، محاسبه ضرایب در سری جواب، تنها بر اساس ارضاء شرایط مرزی در گروهی از نقاط

درنظرگرفته شده بر روی مرز ناحیه حل انجام می‌گیرد. هم چنین لازم به ذکر است که در این روش از توابع نمایی به عنوان توابع هموار پایه استفاده گردیده است که متفاوت با توابع منفرد مورد استفاده در حل مسائل المانهای مرزی در دیگر روش‌های توابع پایه می‌باشد.

۱-۲- تاریخچهٔ روش توابع پایه

روش توابع پایه که نوعی روش مرزی غیرمستقیم محسوب می‌گردد، اولین بار در اواسط دهه ۶۰ میلادی توسط دو محقق روس، الکسیدزه و کوپرادزه معرفی گردید [۴]. هم‌چنین فرمول‌بندی کامل این روش برای اولین‌بار در سال ۱۹۷۷ توسط میتون و جانسون ارائه شد [۴].

در این روش جواب معادله دیفرانسیل، توسط سری متشکل از ترکیب خطی توابع صدق کننده در آن، تقریب زده می‌شود. از این رو بدلیل آن‌که کلیه جملات سری جواب در معادله دیفرانسیل حاکم صدق می‌کنند، تنها منبع بروز خطا در روند حل مسئله در مرحله ارضاء شرایط مرزی است.

از مهم‌ترین نقاط قوت این روش، علاوه بر دست‌یابی به جواب‌هایی با دقت مناسب علی‌رغم استفاده از تعداد کمی از نقاط برای مدل‌سازی، عدم نیاز به شبکه‌بندی ناحیه حل و یا انتگرال‌گیری می‌باشد، که از این حیث کاربرد آن در مقایسه با روش‌هایی چون روش المان‌های محدود و روش المان‌های مرزی آسان‌تر است.

با توجه به تحقیقات انجام شده تا کنون استفاده از روش توابع پایه بیشتر در حل مسائل مقادیر مرزی بیضوی مورد توجه قرار گرفته است. مقاله فیرودر و کاراجورجیس در سال ۱۹۹۸ از جمله تحقیقاتی است که در آن علاوه بر بررسی گسترده بر روی روش توابع پایه و روش‌های مشابه در طول سه دهه گذشته، نمونه‌هایی از مسائل مقادیر مرزی بیضوی با استفاده از روش توابع پایه حل شده است [۴]. هم‌چنین مطالعاتی نیز توسط بگومونلی در زمینه حل مسائل با عملگرهای مختلف از جمله معادله اصلاح شده هلمهولتز و عملگر بای‌هارمونیک با استفاده از این روش در مرجع [۵] ارائه شده است.

از جمله مسائل دیگری که حل آنها با استفاده از روش توابع پایه به طور ویژه‌ای مورد توجه قرارگرفته است، مسائل الاستیسیته می‌باشد. در زمینه‌ی حل معادلات الاستیسیته با استفاده از روش توابع‌پایه می‌توان به مقاله پولیکاس و همکاران در سال ۲۰۰۲ اشاره نمود [۶]. در این مقاله از توابع پایه چندجمله‌ای برای حل مسائل سه‌بعدی الاستیسیته بر روی محیط‌های ایزوتروپیک استفاده شده است. از جمله مزایای این روش انعطاف‌پذیری آن در حل مسائل بر روی ناحیه‌هایی با اشکال مختلف در دستگاه مختصات کارتزین می‌باشد. هم‌چنین در زمینه حل مسائل دوبعدی الاستیسیته

در حالت ایزوتروپیک و غیرایزوتروپیک تک‌جنسی و دوجنسی با استفاده از روش توابع‌پایه، برگر وکاراجورجیس در سال ۲۰۰۱ حلی را در مرجع [۷] روش حلی ارائه نمودند، در این مقاله در حالت دو جنسی، ناحیه حل برای هر یک از این دو جنس بطور جداگانه در نظرگرفته شده و سطح مشترک دو ناحیه به عنوان شرایط مرزی هر یک از این نواحی تقریب زده می‌شود. در این راستا، هر ناحیه به صورت جداگانه مورد بررسی قرار گرفته و سپس با اعمال شرایط پیوستگی جابجایی و نیروهای سطحی در مرز مشترک میان دو ناحیه، ارتباط میان دو قسمت برقرار می گردد.

۱-۳- پیشینه علمی مسأله

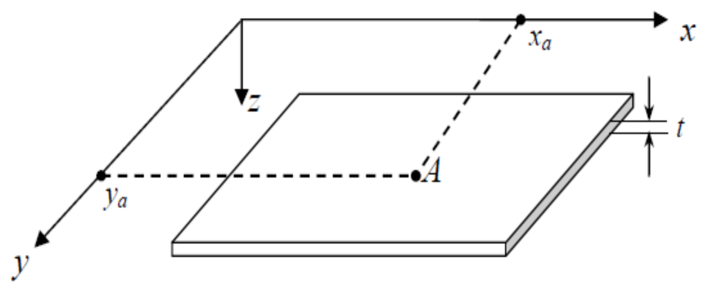
از جمله تلاش‌های اولیهٔ صورت‌گرفته در زمینه حل ورق، حل صفحات نازک براساس تئوری کرشهف[۸] می‌باشد، که به تئوری کلاسیک ورق نیز شهرت دارد. این تئوری بر فرضیات زیر بنا شده است :

۱) خمیدگی سطح میانی در مقایسه با ضخامت صفحه کوچک بوده، که همین موضوع باعث کوچک شدن شیب سطح خم شده می‌شود، در نتیجه مربع شیب یک کمیت قابل صرفه‌نظر کردن در مقایسه با مقدار واحد خواهد بود.

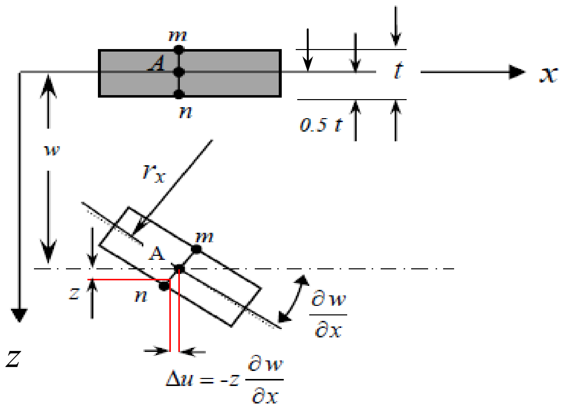
۲) سطح میانی در اثر خمش بدون کرنش باقی می‌ماند.

۳) صفحات عمود بر سطح میانی، بعد از خمش نیز به صورت صفحه و عمود بر سطح میانی باقی می‌مانند، به عبارت دیگر کرنش‌های برشی عمودی γ_{xz}و γ_{yz} قابل صرفه‌نظرکردن هستند.

۴) تنش نرمال σ_z بر سطح میانی در مقایسه با سایر مؤلفه‌های تنش، کوچک و قابل صرفه‌نظر کردن است.[۹]



شکل ۱-۱ شکل شماتیک یک ورق نازک ($\frac{t}{L} \le 0.1$) [۹]



شکل ۱-۲ بررسی چگونگی تغییرشکل یک المان کوچک در ورق نازک [۹]

در شکل بالا منظور از u و v و w به ترتیب مؤلفه‌های جابجایی در راستاهای x و y و z بوده و همان‌طور که از شکل مشخص است $\Delta u = -z\frac{\partial w}{\partial x}$. حال چنان‌چه همین مراحل در راستای y دنبال شود روابط زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{cases} \Delta u(x,y,z) = -z\,\dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \Delta v(x,y,z) = -z\,\dfrac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \tag{۱-۱}$$

در نتیجه توابع تغییر مکان به شکل زیر می‌باشند.

$$\begin{cases} u(x,y,z) = u_0(x,y) + \Delta u(x,y,z) = u_0(x,y) - z\dfrac{\partial w(x,y)}{\partial x} \\ v(x,y,z) = v_0(x,y) + \Delta v(x,y,z) = v_0(x,y) - z\dfrac{\partial w(x,y)}{\partial y} \end{cases} \tag{۲-۱}$$

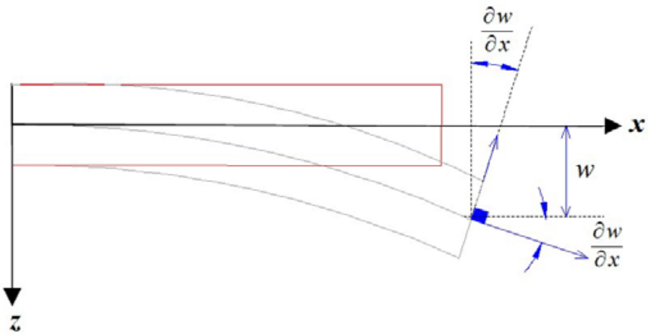
حال چنان‌چه مقادیر کرنش را طبق روابط زیر بدست آوریم.

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{zx} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \end{cases} \tag{۳-۱}$$

این مقادیر در ورق نازک با در نظرگیری فرضیات حاکم، به شکل زیر قابل ارائه می‌باشد.

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0, \gamma_{zx} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{۴-۱}$$

حال چنان‌چه بخواهیم بر اساس فرضیات صفحات نازک، صفحه را پس از تغییر شکل نشان دهیم، همان‌طور که در شکل زیر نیز نشان داده شده صفحات عمود بر صفحه میانی پس از تغییر شکل به صورت عمودی باقی می‌مانند.



شکل ۱-۳ تغییرشکل ورق با در نظرگیری تئوری کلاسیک برای ورق نازک [۱۰]

همان‌طور که در فرضیات کرشهف گفته شد، تئوری کلاسیک ورق قادر به بیان کردن میزان کرنش برشی عرضی یا تنش برشی عرضی نمی‌باشد، این ساده‌سازی خود موجب به وجود آمدن نتایج نادرست در تحلیل ورق‌های ضخیم شده و استفاده از این تئوری را در حد تحلیل صفحات نازک محدود می‌نماید.

پس از مطرح شدن تئوری کرشهف، به منظور حل ورق‌هایی با ضخامتی بیشتر از محدوده‌ی ورق‌های نازک، تئوری‌های اصلاحی ورق مطرح شدند. هدف این تئوری‌ها، (منظور تئوری‌هایی می‌باشد که مبنای حل آنها حل مستقیم معادله الاستیسیته سه بعدی حاکم بر محیط ورق نیست) اجتناب از مراحل دشوار حل معادلات الاستیسیته سه‌بعدی تحت شرایط مرزی معین بوده است. به‌طوری‌که سعی نهایی تئوری‌های ورق، اولاً ارائه یک یا چند معادله دیفرانسیل برای توابعی که تنها وابسته به ۲ مختصه x و y در صفحه میانی بوده و در مرحله بعد حل این معادلات دیفرانسیل تحت شرایط مرزی خاص (برای مثال مؤلفه‌های تنش) و مطابق با تئوری در نظر گرفته شده می‌باشد. در این تئوری‌ها برای رسیدن به این اهداف، به ناچار فرضیاتی برای چگونگی توزیع تنش، کرنش و تغییرمکان در راستای ضخامت در نظر گرفته شده است.

از مهمترین فرضیاتی که برای چگونگی توزیع تغییر مکان در راستای ضخامت در نظر گرفته شده، فرضیاتی است که به فرضیات ریسنر- میندلین مشهور شده اند (ریسنر[۱۲-۱۱]، میندلین[۱۳] و لاو [۱۴]). این فرضیات با اعمال اصلاحاتی روی تئوری ورق نازک توأم می‌باشند، برای نمونه یکی از مهمترین این اصلاحات تأثیر دادن تغییرشکل‌برشی عرضی روی خمش می‌باشد، به‌طوری‌که کرنش‌های برشی عرضی γ_{xz}و γ_{yz} دارای مقادیر غیرصفر می‌شوند. ازاین‌رو این تئوری‌ها به تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول معروف شدند.

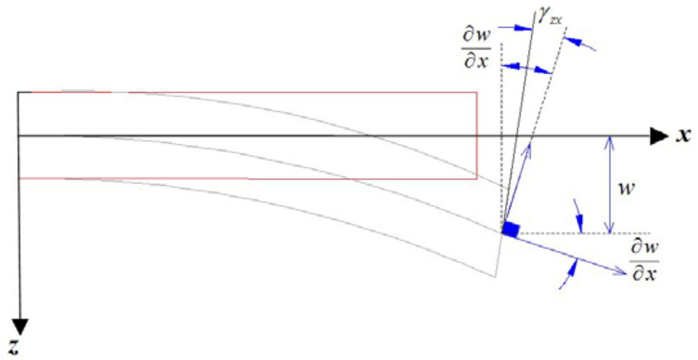
این اصلاحات مبتنی بر برداشتن محدودیت موجود در تئوری کلاسیک می‌باشند، با این فرض که صفحات عمود بر صفحهٔ میانی، چرخش‌های مستقل ϕ_xو ϕ_yرا در راستای محورهای xو y تجربه می‌کنند. پس از اعمال این اصلاحات توابع تغییر مکان در راستاهای xو y و z به شکل زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{cases} \phi_x(x,y) = \dfrac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{zx}\ , \phi_y(x,y) = \dfrac{\partial w}{\partial y} - \gamma_{zy} \\ u(x,y,z) = z\,\phi_x(x,y) + u_0 \\ v(x,y,z) = z\,\phi_y(x,y) + v_0 \\ w(x,y,z) = w(x,y) \end{cases} \tag{۵-۱}$$

مقادیر کرنش برشی عرضی در ورق نازک با در نظرگیری فرضیات حاکم به شکل زیر قابل ارائه می‌باشد.

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = z\dfrac{\partial \phi_x}{\partial y} + z\dfrac{\partial \phi_y}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} = \phi_y + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} = \phi_x + \dfrac{\partial w}{\partial x} \end{cases} \tag{۶-۱}$$

چنانچه بخواهیم بر اساس فرضیات تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول، ورق را پس از تغییرشکل نشان دهیم، همان‌طورکه در شکل زیر نیز نشان داده شده، باید صفحات عمود بر صفحه میانی پس از تغییر شکل به حالت غیر قائم اما کماکان به صورت خطی مستقیم بر صفحه میانی، تغییر وضعیت دهند.



شکل ۱-۴ تغییر شکل ورق با در نظرگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول [۱۰]

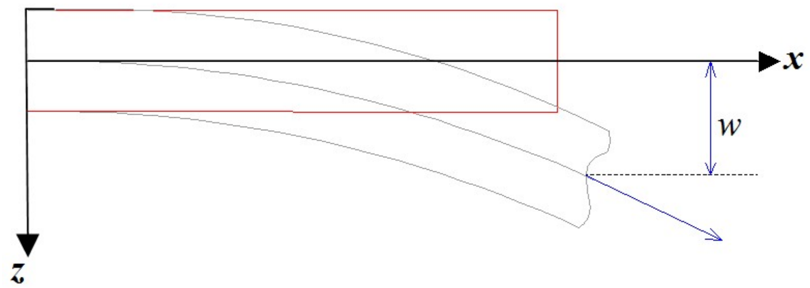
پس از ارائه تئوری تغییرشکل‌برشی مرتبه‌اول، تئوری‌های مرتبهٔ بالاتر مطرح شدند که از آن میان می‌توان به تئوری‌های مرتبه دوم و سوم اشاره نمود، که در آنها به منظور بیان دقیق‌تر تابع تغییرمکان، از چندجمله‌ای هایی با درجات بالاتر استفاده شده است. برای نمونه میدان جابجایی در تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم که توسط ردی پیشنهاد شده‌است، به صورت زیر می‌باشد [۱۵].

$$\begin{cases} u(x,y,z) = z\,\phi_x(x,y) + z^3\left(-\dfrac{4}{3h^2}\right)\left(\phi_x + \dfrac{\partial w(x,y)}{\partial x}\right) + u_0 \\ v(x,y,z) = z\,\phi_y(x,y) + z^3\left(-\dfrac{4}{3h^2}\right)\left(\phi_y + \dfrac{\partial w(x,y)}{\partial y}\right) + v_0 \end{cases} \tag{۷-۱}$$

همان‌طور که از روابط(۱-۷) مشخص است علاوه بر بالا بردن درجه توابع تغییر مکان، پارامتر ضخامت ورق نیز

وارد توابع شده است، که به نوعی تأثیر ازدیاد ضخامت را نیز در محاسبات لحاظ نموده و از افت شدید دقت نتایج با افزایش ضخامت می‌کاهد.

حال چنانچه بخواهیم بر اساس فرضیات تئوری‌های تغییرشکل‌برشی مرتبه‌بالاتر، ورق را پس از تغییرشکل نشان دهیم، مانند آنچه که در شکل بعدی نشان داده شده است، صفحات امکان تغییر شکل به صورت منحنی‌هایی با مرتبه بالاتر از یک را داشته و از این رو بهتر از تئوری‌های کلاسیک و مرتبه اول می‌توانند تغییر شکل ورق ضخیم را مدل کنند.



شکل ۱-۵ تغییر شکل ورق با در نظرگیری تئوری‌های برشی با مرتبه بزرگتر از یک [۱۰]

بطورکلی تئوری‌های ورق ضخیم (به غیر از مورد مرجع [۱۴] که توسط لاو ارائه شده است) بر اساس فرضیات و تقریب‌زنی‌های معین در میدان تغییرمکان یا تنش‌ها بوده و همین موضوع باعث بروز اشکالات و نارسایی‌هایی در جواب‌ها می‌شود، چرا که همین تقریب‌ها و ساده‌سازی‌هایی که توسط تئوری‌های ورق ضخیم در نظر گرفته شده‌اند، روی شرایط مرزی در لبه‌ها نیز اعمال می‌شوند. از این رو می‌توان نتیجه گرفت که اعمال این شرایط تقریبی منجر به حصول مقادیر غیردقیق برای تغییرمکان‌ها، تنش‌ها و نیروهای داخلی در لبه‌ها به ویژه در ورق‌های بسیار ضخیم با لبه‌های گیردار کامل می‌شود. با تمام این نارسایی‌ها تئوری‌های ورق ضخیم به دلیل سادگی در روش حل و محاسبات عددی، به‌طور گسترده‌ای برای حل خمش ورق های ضخیم مستطیلی، دایره ای و حلقوی مورداستفاده قرار می‌گیرند.

پس از گسترش روابط مربوط به تئوری تغییرشکل‌برشی مرتبه‌اول و مراتب‌بالاتر(لو، کریستنین و وو [۱۶])، محققین زیادی روابط اجزاء محدود را بر اساس این تئوری‌ها گسترش دادند که ثمره آن به وجود آمدن المان‌هایی بود که روابط مربوط به این تئوری‌ها را ارضاء می‌نمودند. هر چند این المان‌ها بسیار کارآمد بودند ولی هنوز مشکلاتی در آن‌ها وجود داشت. از جمله مشکلاتی که این دسته از المان‌ها با آن مواجه بودند می‌توان به قفل‌برشی، به وجود آمدن مودهای ناصحیح در حل المان‌ها و مشکلاتی در بدست آوردن تنش در آنها اشاره نمود. همین موضوع محققان را برآن داشت که از فرمولاسیون جدیدتری استفاده نمایندکه در آنها مشکلات ذکر شده نیز برطرف شده باشند. در نهایت از دیگر مطالعاتی که روی تئوری‌های ورق و حل آنها انجام شده است می‌توان به تحقیقات

ارائه شده توسط هنکی [۱۷]، و پودیو گویی دوگلی [۱۸] نیز اشاره نمود.

همان‌طور که پیش‌تر هم گفته شد استخراج یک فرمولاسیون برای ورق بدون فرضیاتی که موجب عدم عمومیت آن شود، می تواند با حل معادله الاستیسیته سه‌بعدی شروع شود چرا که در روند حل معادلات تئوری الاستیسیته سه‌بعدی هیچ‌گونه فرض یا تقریبی برای تغییرمکان‌ها یا تنش‌ها در نظرگرفته‌نشده است. هم‌چنین مزیت بزرگی که می‌توان به آن اشاره نمود، اعمال دقیق شرایط مرزی حاکم بر محیط مسئله می‌باشد. در نتیجه می‌توان گفت در صورت ارضاء شرایط مرزی، تئوری الاستیسیته سه‌بعدی دقیق‌ترین روش حل برای آنالیز ورق‌های ضخیم می‌باشد.

چنانچه بخواهیم به طور خلاصه به فعالیت‌های محققان در زمینه حل مسائل سه‌بعدی بپردازیم در ابتدا باید به مطالعات پاپکوویچ [۱۹] و نئوبر [۲۰] در زمینه‌ی ارائه فرمولاسیونی برای ورق با استفاده از توابع حقیقی بدون درنظرگیری فرضیات ساده‌کننده بر مبنای حل معادلات الاستیسیته سه‌بعدی اشاره نمود. هم‌چنین به نظر می‌رسد که اولین‌بار مطالعاتی توسط وینوفسکی [۲۱] روی خمش ورق ضخیم مبتنی بر حل سه‌بعدی صورت گرفته است.

لازم به‌ذکر است که تا کنون تنها برای لبه‌های مفصلی، حل دقیق و به فرم بسته ارائه شده است. از سوی دیگر برای شرایط مرزی آزاد و گیردارکامل حلی دقیق و شایان توجه، به جز موارد معدودی که در ادامه به آنها اشاره خواهد شد، وجود ندارد.

از جمله تحقیقاتی که روی حل معادلات سه بعدی ورق با لبه‌های مفصلی صورت گرفته می‌توان به مواردی همچون تحقیقات نوماچی [۲۲] درباره رفتار الاستیک لبه‌های مفصلی ورق‌های مستطیلی به همراه ارضاء کامل شرایط مرزی لبه‌ها و ارائه حلی دقیق برای ورق مستطیلی با لبه‌های مرزی مفصلی توسط لوینسن [۲۳] اشاره نمود. هم‌چنین اسرینیواس و همکاران [۲۴-۲۵] توانستند علاوه بر مطالعه روی خمش ورق‌های مستطیلی ضخیم و لایه‌ای با لبه‌های مفصلی و ارائه حل دقیق برای ارتعاش آنها، شرایط مرزی را نیز به طور کامل ارضاء کنند. پیلتنر نیز مطالعاتی روی کاربرد توابع موهومی در روند آنالیز ورق‌های ضخیم مستطیلی با لبه‌های مفصلی [۲۶] ارائه کرد، این محقق هم‌چنین مطالعات فراوانی در زمینه‌ی استفاده از توابع مختلط و حقیقی در روند حل مسائل الاستیسیته سه‌بعدی برای ورق‌های نازک و ضخیم [۲۷-۲۸] انجام داده است، علاوه بر این مطالعات میدان‌های تغییر مکان الاستیسیته سه‌بعدی با استفاده از توابع‌مختلط مناسب در دستگاه مختصات منحنی‌الخط نیز توسط پیلتنر ارائه شده است[۲۹]. هم‌چنین ازجمله تحقیقات انجام شده روی ورق‌های مستطیلی لایه‌ای با شرایط مرزی مفصلی نیز می‌توان به پژوهش‌های سونودا [۳۰] اشاره نمود.

پس از آن‌که حل‌های دقیق متعددی برای ورق‌ها با لبه‌های مفصلی ارائه شد، با پیشرفت ابزار و روش‌های محاسباتی و هم‌چنین انجام تحقیقاتی که سعی در ارائه فرمولاسیون با کاربری ساده‌تر در روش‌های حل مختلف

داشتند، پژوهش‌هایی در زمینه‌ی حل ورق با لبه‌های غیرمفصلی آغاز شد. از میان اولین تلاش‌های صورت‌گرفته در زمینه‌ی حل ورق با لبه‌های گیردار، می‌توان به تحقیقات شیمادا و اکومارا [۳۱] در راستای ارزیابی تنش و تغییرشکل در دال‌های مستطیلی ضخیم بر اساس یک روش انتگرال‌گیری اشاره نمود، در این تحقیق میدان‌های تغییرمکان و تنش به صورت دقیق حل شده‌اند، اما شرایط مرزی به صورت تقریبی و توسط روش اجتماع نقاط در صفحات تعدیل شده تنش، ارضاء شده اند. اتسو، اوچییاما و دباشی [۳۲] هم توانستند براساس تئوری ریسنر ورق‌های مستطیلی با لبه های گیردار را آنالیز کنند. اما بهترین نمونه حل ورق ضخیم با لبه‌های گیردار توسط اکومورا و اُگوما [۳۳] ارائه شده است به‌طوری‌که این دو محقق با بکارگیری روشی مشابه سری فوریه و استفاده از حل تعمیم یافته بوسینسک، حل دقیقی را برای ورق مستطیلی ضخیم با شرایط مرزی کاملاً گیردار و تحت بارگذاری یکنواخت عرضی ارائه دادند. هم‌چنین تحقیقی روی شرایط مرزی آزاد توسط اوکومورا و میاکه [۳۴] ارائه گردیده است که در آن یک قطاع دایره ای ضخیم با لبه آزاد مورد مطالعه قرار گرفته است.

۱-۴- روش حل و محتوای فصول آینده

در این پایان‌نامه از روشی مشابه با روش توابع‌پایه برای حل مسائل الاستیسیته و مسئله انتشار موج الاستیک در محیط همسانگرد ورق در حالت‌سه بعدی استفاده شده است. در روش بکارگرفته شده در این پایان‌نامه، از توابع پایه‌نمایی به عنوان حل پایه معادلات استفاده شده است که متفاوت با توابع منفرد (مورد استفاده در حل مسائل المان های مرزی) می‌باشند، البته در برخی مواقع به دلیل وجود جواب‌های گمشده به منظور حصول جواب‌هایی به فرم کامل از چندجمله‌ایی‌هایی استفاده می‌شود که به تمام فرم‌های توابع‌پایه نمایی اضافه می‌شوند. باید خاطر نشان ساخت که بدست آوردن پایه‌های حل (توابع‌گرین) یکی از ارکان تحقیق حاضر و شالوده تحقیقات آینده در این زمینه است.

در روش ارائه شده در این تحقیق جواب همگن معادلات، به صورت یک سری متشکل از ترکیب خطی توابع پایه نمایی (و یا ترکیبی از توابع پایه نمایی و توابع چندجمله‌ای) بیان می‌گردد. آنچه که این روش را از سایر روشهای رایج در توابع پایه متمایز می‌سازد، نوع این توابع پایه بوده که طبق آنچه که پیش‌تر ذکر شد از توابع‌پایه نمایی برای تشکیل سری جواب استفاده می‌شود، همچنین در روش حاضر نحوه برآورد ضرایب ثابت مودها در سری جواب نیز با روش‌های دیگر توابع‌پایه متفاوت می‌باشد.

در روش‌های متداول توابع‌پایه برای محاسبه این ضرایب از روش نقطه‌ای و یا روش حداقل مربعات و با استفاده از نقاط مرجع در خارج از ناحیه حل استفاده شده است. اما در روش حاضر از تبدیلی ویژه برای محاسبه این ضرایب استفاده می‌گردد. این تبدیل برای اولین بار در مرجع [۳] و در حل مسائل انتشار امواج در محیط‌های نیمه بی‌نهایت،

به روش المان‌های محدود معرفی گردید. با استفاده از این تبدیل، محاسبه ضرایب در سری جواب، تنها بر اساس ارضاء شرایط مرزی در گروهی از نقاط بر روی مرز ناحیه انجام می‌گیرد. با این وجود، استفاده از تبدیل اشاره شده در مقایسه با روش‌های متداولی چون روش نقطه‌ای و یا روش حداقل مربعات دارای مزایای ویژه‌ای است که در فصل دوم به طور کامل به آن پرداخته خواهد شد.

بر این اساس، در فصول دوم و سوم به ترتیب حل مسائل ارتعاش اجباری ورق‌های ضخیم ایزوتروپیک و حل مسائل الاستیسیته این مواد با استفاده از روش توابع پایه مورد بررسی قرارگرفته است. در فصل چهارم نیز روابط ارائه شده برای مسائل ارتعاش اجباری توسط مثال‌هایی مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

در ادامه به توضیح و تشریح بیشتر روش توابع پایه و چگونگی به کارگیری آن در حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر محیط ورق در حالات استاتیک و دینامیک پرداخته شده است.

فصل دوم

حل ورق‌های ضخیم همسانگرد تحت ارتعاشات اجباری

۲-۱- مقدمه

در این فصل حل ورق های ضخیم تحت ارتعاشات اجباری مورد بررسی قرار گرفته است. به معادله حاکم بر رفتار ورق تحت بارهای دینامیکی، معادله موج الاستیک گویند. در تشریح موج الاستیک می‌توان گفت که در صورتی که ماده‌ای دارای خاصیت ارتجاعی بوده و ذرات آن در ناحیه خاصی تحت حرکت ارتعاشی قرار گیرند، موج الاستیک در سیستم انتشار می‌یابد. در این حالت نیرویی متناسب با میزان جابجایی ذرات برای بازگرداندن آنها به حالت اولیه در سیستم تولید می‌شود، که باعث توزیع تنش در ماده می‌گردد. توزیع امواج زلزله در خاک را (با فرض رفتار الاستیک خاک) می‌توان نمونه‌ای از انتشار امواج الاستیک دانست.

در این فصل به منظور حل ورق های ضخیم تحت بارهای دینامیکی، به بررسی چگونگی حل معادله موج الاستیک با استفاده از یک سری متشکل از توابع‌نمایی (توابع‌گرین) پرداخته شده است. در مرحله بعد راه‌های مختلف بدست آوردن ضرایب این سری و ارضاء شرایط مرزی مورد بررسی قرار می‌گیرد، هم‌چنین در صورت لزوم جواب خصوصی معادله بر اساس تبدیلی ویژه برآورد و در نهایت جواب کلی ارائه می‌گردد. در ادامه و در راستای ارائه نتایج دقیق‌تر، منابع خطای موجود در این حل و تمهیدات لازم برای به حداقل رساندن خطا مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۲-۲- معرفی معادله موج الاستیک و شرح روند حل آن

معادله حاکم بر انتشار امواج الاستیک در محیطی همگن و ایزوتروپیک به صورت زیر بیان می گردد.

$$\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{DSu}-\rho\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{b}=\mathbf{0} \tag{۱-۲}$$

در این رابطه $\mathbf{D}$ ماتریس ضرایب الاستیک، $\mathbf{b}$ نیروی بدنه، $\mathbf{S}$ عملگر تبدیل میدان تغییر مکان به کرنش‌ها، ρ چگالی محیط و $\mathbf{u}$ تابع تغییر مکان می‌باشد.

$\mathbf{D}$ به عنوان ماتریس ضرایب الاستیک به شکل زیر تعریف شده است، که در آن منظور از ν و E، به‌ترتیب ضریب پواسون و مدول الاستیسیته می باشد.

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} D_1 & D_2 & D_2 & & & \\ D_2 & D_1 & D_2 & & & \\ D_2 & D_2 & D_1 & & & \\ & & & D_3 & & \\ & & & & D_3 & \\ & & & & & D_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} D_1=\dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(1-\nu) \\ D_2=\dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\nu \\ D_3=\dfrac{E}{2(1+\nu)} \end{cases} \tag{۲-۲}$$

نیروی بدنه نیز به شکل زیر تعریف می شود.

$$\mathbf{b}=\begin{pmatrix} \mathrm{b}_x \\ \mathrm{b}_y \\ \mathrm{b}_z \end{pmatrix} \tag{۳-۲}$$

بنابراین، حل معادله (۲-۱)، کلید اساسی در آنالیز تنش و بررسی توزیع کرنش در محیط‌های ایزوتروپیک سه‌بعدی تحت انتشار موج الاستیک می‌باشد. قابل ذکراست که پس از حل معادله موج الاستیک و بدست آوردن میدان‌های تغییرمکان، کرنش به شرح زیر قابل دستیابی می‌باشد.

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}=\mathbf{S}[\mathbf{u}]=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{u}_x \\ \mathrm{u}_y \\ \mathrm{u}_z \end{pmatrix} \tag{۴-۲}$$

میدان تنش نیز از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{pmatrix}=\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (۵-۲)$$

از اینرو می‌توان ادعا کرد که با حل معادله موج الاستیک، رفتار سیستم در قبال تغییر وضعیت به وجود آمده در محیط، (که می‌تواند از جنس نیرویی (بارگذاری) یا تغییرشکل (نشست) باشد) در دسترس می‌باشد.

۲-۳- بدست آوردن فرم‌های مودی صادق در معادله تعادل

ازآنجا که در این تحقیق حل یک مسئله در حوزه فرکانس مد نظر است، تابع تغییر مکان به شکل حاصل‌ضرب دو تابع مکانی و زمانی درنظرگرفته شده است.

$$\mathbf{u}=e^{\mathbb{i}\omega t}\,\mathbf{U} \quad , \quad \mathbb{i}=\sqrt{-1} \qquad (۶-۲)$$

که درآن منظور از $\mathbf{U}$ دامنه میدان تغییر مکان است.

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}\mathrm{U}_x\\ \mathrm{U}_y\\ \mathrm{U}_z\end{pmatrix} \qquad (۷-۲)$$

با نامگذاری زیر

$$k^2=\rho\omega^2 \qquad (۸-۲)$$

و جایگذاری روابط فوق در معادله موج الاستیک و با فرض $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ داریم.

$$e^{\mathbb{i}\omega t}(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{S}+k^2\,\mathbf{I})\,\mathbf{U}=\mathbf{0} \qquad (۹-۲)$$

با توجه به رابطه فوق برای ارضاء معادله موج الاستیک باید رابطه زیر برقرار باشد.

$$(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{S}+k^2\mathbf{I})\,\mathbf{U}=\mathbf{0} \qquad (۱۰-۲)$$

به این‌ترتیب، برای حل معادله دیفرانسیل حاکم بر مسائل موج الاستیک سه بعدی در حوزه فرکانس باید دستگاه ارائه شده در رابطه زیر را، که بسط ماتریسی رابطه فوق می‌باشد، حل نمود.