دانشگاه صنعتی شیراز

دانشکده علوم، گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی گرایش کاربردی

تبدیل الزاکی و کاربردهای آن در حل معادلات دیفرانسیل

نگارش:

الهام نجفی

استاد راهنما:

دکتر اسماعیل حسام الدینی

استاد مشاور:

دکتر بهنام هاشمی

مهرماه ۱۳۹۲

تقدیم به مهربانانی

که دستان مهربانشان

سایه بان خستگی هایم هستند،

پدر و مادر عزیزتر از جانم

و

برادران و خواهران و دوستان عزیزم.

پروردگارا

به من آرامش ده تا بپذیرم آن‌چه را که نمی‌توانم تغییر دهم،
دلیری ده تا تغییر دهم آن‌چه را که می‌توانم تغییر دهم،
بینش ده تا تفاوت این دو را دریابم،
مرا فهم ده تا متوقع نباشم دنیا و مردم آن مطابق میل من رفتارکنند .

سپاس گزاری...

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. سلام و دورد بر محمّد و خاندان پاك او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است. بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند و سلامت امانت هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب" من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللّه عزّ و جلّ" : ازپدر و مادر عزیزم...این دو معلم بزرگوارم... که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند؛

از جناب آقای دکتر حسام‌الدینی که در کمال سعه صدر، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛ از استاد صبور، جناب آقای دکتر هاشمی که زحمت مشاوره این رساله را متقبل شدند کمال تشکر و قدردانی را دارم. در پایان بر خود لازم می‌دانم از تمامی استادان، دوستان و عزیزانی که در طول این دوره تا به ثمر رسیدن آن مرا یاری و همراهی نمودند سپاسگزاری نمایم.

چکیده

تبدیل الزاکی و کاربردهای آن در حل معادلات دیفرانسیل

نگارش:
الهام نجفی

یکی از روش‌های حل معادلات دیفرانسیل، استفاده از تبدیلات انتگرالی می‌باشد. در این پایان نامه، ابتدا به یادآوری برخی از تبدیل‌های انتگرالی می‌پردازیم. در ادامه، تبدیل جدیدی به نام تبدیل الزاکی را معرفی می‌نماییم و کاربردهای این تبدیل انتگرالی را در حل معادلات دیفرانسیل معمولی، جزئی و سیستم این معادلات بررسی می‌کنیم. در پایان، ترکیب این تبدیل با روش هموتوپی تداخلی را برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی شرح می‌دهیم.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فهرست شکل‌ها

عنوان | صفحه

فصل ۱

انواع تبدیلات دیفرانسیل و کاربردهای آن در حل معادلات دیفرانسیل

۱−۱ مقدمه

معادلات دیفرانسیل برای زمان طولانی در ریاضیات کاربردی نقش اساسی را بازی کرده است و با ظهور کامپیوتر، اهمیت آن‌ها نیز افزایش یافته است. بررسی و تجزیه و تحلیل معادلات دیفرانسیل و کاربردهای آن منجر به مسائل ریاضی بسیار عمیقی می‌شود. به علاوه برای حل معادلات دیفرانسیل تبدیل‌های انتگرالی وسیعی مانند تبدیل ملین، تبدیل فوریه، تبدیل سامادو، تبدیل لاپلاس و غیره استفاده می‌شود . در این فصل تعدادی از این تبدیلات دیفرانسیل را بررسی می‌کنیم [۴].

۱−۲ تبدیل ملین

فرض کنید تابع $f(t)$ یک تابع تعریف شده برای $t \in (0, +\infty)$ باشد و در دو شرط زیر صدق کند:

$$\int_0^1 |f(t)|t^{a_1-1}dt < \infty \qquad , \qquad \int_0^1 |f(t)|t^{a_2-1}dt < \infty$$

تبدیل ملین[۱]، عملگری است که تابع $f(t)$ را به F روی صفحه مختلط با رابطه :

$$M[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)t^{s-1}dt,$$

تعریف می‌شود، می‌نگارد. تابع $F(s)$ را تبدیل ملین تابع $f(t)$ می‌نامند. معمولاً انتگرال فقط برای مقادیر مختلط $s = a+ib$ وجود دارد جایی که $a_1 < a < a_2$ و a_1 و a_2 به تابع $f(t)$ وابسته

[۱] Mellin

اند [۱، ۱۲] .

۱-۲-۱ تبدیل ملین چند تابع خاص

لم ۱.۱: [۱۲] اگر $f(t)$ تمام شرایط بالا را داشته باشد و a عددی ثابت باشد، داریم :

$$M[f(at)] = a^{-s}F(s).$$

اثبات : به کمک تغییر متغیر $t = \frac{x}{a}$ داریم :

$$\int_{0}^{+\infty} f(at)t^{s-1}dt = \int_{0}^{+\infty} f(x)(\frac{x}{a})^{s-1}\frac{1}{a}dx = a^{-s}\int_{0}^{+\infty} f(x)x^{s-1}dx = a^{-s}F(s).$$

$\square$

لم ۲.۱: [۱۲] اگر $a > 0$ ، آن‌گاه: :

$$M[t^a f(t)] = F(a+s).$$

اثبات :

$$M[t^a f(t)] = \int_{0}^{+\infty} t^a f(t)t^{s-1}dt = \int_{0}^{+\infty} t^{a+s-1}f(t)dt = F(a+s)$$

$\square$

لم ۳.۱: [۱۲] اگر $M[f(t)] = F(s)$ در این‌صورت :

$$M[f(\frac{1}{t})] = -F(-s).$$

اثبات : طبق تعریف داریم:

$$M[f(\frac{1}{t})] = \int_{0}^{+\infty} f(\frac{1}{t})t^{s-1}dt.$$

اگر از تغییر متغیر $t = \frac{1}{x}$ استفاده کنیم، داریم :

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty} f(x)(\frac{1}{x})^{s-1}(-\frac{1}{x^{2}})dx &= -\int_{0}^{+\infty} f(x)\frac{1}{x^{s+1}}dx \\ = -\int_{0}^{+\infty} f(x)x^{-s-1}dx &= -F(-s).\end{aligned} \tag{1-1}$$

□

لم ۴.۱: [۱۲] اگر $\beta > 0$ آن‌گاه داریم:

$$M[f(t^{\beta})] = \frac{1}{\beta}F(\frac{s}{\beta}).$$

اثبات : می‌دانیم:

$$M[f(t^{\beta}] = \int_{0}^{+\infty} f(t^{\beta})t^{s-1}dt$$

با تغییر متغیر $t^{\beta} = x$ داریم:

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty} f(x)(x^{\frac{1}{\beta}})^{s-1}(\frac{1}{\beta})x^{\frac{1-\beta}{\beta}}dx &= \frac{1}{\beta}\int_{0}^{+\infty} f(x)(x^{\frac{s-1}{\beta}})(x^{\frac{1-\beta}{\beta}})dx \\ = \frac{1}{\beta}\int_{0}^{+\infty} f(x)x^{\frac{s-\beta}{\beta}}dx &= \frac{1}{\beta}\int_{0}^{+\infty} f(x)x^{\frac{s}{\beta}-1}dx = \frac{1}{\beta}F(\frac{s}{\beta}).\end{aligned}$$

□

لم ۵.۱: [۱۲] اگر $\beta > 0$ ، آن‌گاه :

$$M[f(t^{-\beta})] = -\frac{1}{\beta}F(-\frac{s}{\beta}).$$

اثبات : طبق تعریف داریم:

$$M[f(t^{-\beta})] = \int_{0}^{+\infty} f(t^{-\beta})t^{s-1}dt$$

با تغییر متغیر : $t^{-\beta} = x$ داریم :

$$\int_0^{+\infty} f(x)(x^{-\frac{1}{\beta}})^{s-1}(-\frac{1}{\beta})(x^{\frac{-1-\beta}{\beta}})dx = -\frac{1}{\beta}\int_0^{+\infty} f(x)x^{\frac{-s+1}{\beta}}x^{\frac{-1-\beta}{\beta}}dx$$

$$= -\frac{1}{\beta}\int_0^{+\infty} f(x)x^{\frac{-s-\beta}{\beta}}dx = -\frac{1}{\beta}\int_0^{+\infty} f(x)x^{\frac{-s}{\beta}-1}dx = -\frac{1}{\beta}F(-\frac{s}{\beta}).$$

□

لم ۶.۱: [۱۲] اگر $\alpha, \beta > 0$ ، آن‌گاه :

$$M[t^\lambda f(\alpha t^\beta)] = \frac{1}{\beta}(\alpha^{\frac{-s+\lambda}{\beta}})F(\frac{s+\lambda}{\beta}).$$

اثبات : با استفاده از تعریف و روابط قبل حکم اثبات می‌شود. □

قضیه ۷.۱: [۱۲] اگر $f'(t)$ مشتق تابع $f(t)$ باشد، در این‌صورت :

$$.M[f'(t)] = -(s-1)F(s-1).$$

اثبات : داریم:

$$M[f'(t)] = \int_0^{+\infty} f'(t)t^{s-1}dt.$$

با انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء نتیجه می‌شود :

$$f(t)t^{s-1}|_0^{+\infty} - (s-1)\int_0^{+\infty} f(t)t^{s-1-1}dt = -(s-1)F(s-1).$$

□

لم ۸.۱: [۱۲] اگر $M[f(t)]=F(s)$ ، آن‌گاه :

$$M[tf'(t)]=-sF(s).$$

اثبات : با توجه به تعریف داریم:

$$M[tf'(t)]=\int_{۰}^{+\infty} tf'(t)t^{s-۱}dt=\int_{۰}^{+\infty} f'(t)t^{s}dt.$$

با انتگرال‌گیری جزبه‌جز داریم :

$$t^{s}f(t)|_{۰}^{+\infty}-s\int_{۰}^{+\infty} f(t)t^{s-۱}dt=-sF(s).$$

□

قضیه ۹.۱: [۱۲] اگر $f''(t)$ مشتق دوم تابع $f(t)$ باشد، آن‌گاه:

$$M[f''(t)]=(s-۱)(s-۲)F(s-۲).$$

اثبات: با توجه به تعریف داریم:

$$M[f''(t)]=\int_{۰}^{+\infty} f''(t)t^{s-۱}dt.$$

با دو بار انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء داریم :

$$-(s-۱)[f(t)t^{s-۲}|_{۰}^{+\infty}-(s-۲)\int_{۰}^{+\infty} f(t)t^{s-۲-۱}dt]=(s-۱)(s-۲)F(s-۲).$$

□

قضیه ۱۰.۱: [۱۲] اگر $f^{(n)}(t)$ مشتق nام تابع $f(t)$باشد، در این‌صورت داریم:

$$M[f^{(n)}(t)]=(-۱)^{n}(s-۱)(s-۲)...(s-n)F(s-n). \qquad (۱-۲)$$

اثبات: با استقرا و استفاده از قضیه قبل چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. □

تعریف ۱۱.۱: (تبدیل ملین معکوس) اگر تبدیل ملین تابع $f(t)$ به صورت زیر باشد :

$$F(s) = M[f(t)] = \int_{\circ}^{+\infty} f(t)t^{s-۱}dt,$$

آن‌گاه تبدیل ملین معکوس را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f(t) = M^{-۱}[F(s)] = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-s}F(s)ds.$$

مثال ۱۲.۱: فرض کنید برای $t_{\circ} < t < +\infty$ ، $f(t) = t^n$ باشد، در این‌صورت با استفاده از تعریف داریم:

$$M[t^n] = \int_{t_{\circ}}^{+\infty} t^n t^{s-۱}dt = \int_{t_{\circ}}^{+\infty} t^{n+s-۱}dt = \frac{t^{n+s}}{n+s}\Big|_{t_{\circ}}^{+\infty} = \frac{t_{\circ}^{n+s}}{n+s}.$$

مثال ۱۳.۱: تبدیل ملین تابع $f(t) = e^{-pt}$ را برای $p > \circ$ به‌دست می‌آوریم:

با استفاده از تعریف داریم :

$$M[e^{-pt}] = \int_{\circ}^{+\infty} e^{-pt}t^{s-۱}dt = p^{-s}\Gamma(s).$$

مثال ۱۴.۱: تبدیل ملین تابع $f(t) = \frac{۱}{t+۱}$ را محاسبه می‌کنیم، داریم:

$$M[(۱+t)^{-۱}] = \int_{\circ}^{+\infty}(۱+t)^{-۱}t^{s-۱}dt,$$

با تغییر متغیر به صورت $۱ - x = (۱+t)^{-۱}$ خواهیم داشت:

$$\int_{\circ}^{+\infty}(۱-x)\frac{x^{s-۱}}{(۱-x)^{s-۱}}\frac{dx}{(۱-x)^{۲}} = \int_{\circ}^{+\infty} x^{s-۱}(۱-x)^{-s}dx = \beta(s-۱, s).$$

مثال ۱۵.۱: می‌خواهیم با استفاده از تبدیل ملین معادله دیفرانسیل زیر را حل کنیم :

$$f(t) + f'(t) = \circ$$

ابتدا از طرفین تبدیل ملین می‌گیریم، با فرض اینکه $M[f(t)] = F(s)$ داریم :

$$F(s) - (s-۱)F(s-۱) = \circ \Rightarrow F(s) = (s-۱)F(s-۱)$$

فرض کنید $s - ۱ = t$ در نتیجه :

$$F(t+۱) = tF(t) \Rightarrow F(t) = t^{-۱}F(t+۱).$$

حال با گرفتن تبدیل ملین معکوس خواهیم داشت :

$$f(t) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-s}s^{-۱}F(s+۱)ds.$$

۱-۳ تبدیل فوریه

سری فوریه : اگر $f(x)$ روی بازه $[-L, L]$ متناوب باشد دراین‌صورت سری فوریه $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}[a_n cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n sin(\frac{n\pi}{L}x)].$$

هم‌چنین اگر $f(x)$ متناوب نباشد از تبدیلی به نام تبدیل فوریه[۱] استفاده می‌شود که این تبدیل می‌تواند معادلات دیفرانسیل جزئی را به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل کند. با این تبدیل مسائل موج و گرما به مسائل مقدار اولیه بر حسب متغیر t تبدیل می‌شوند [۱۶] .

برای تعریف تبدیل فوریه تابع $f(x)$ ، ابتدا قضیه زیر که به قضیه دیریکله[۲] مشهور است، بیان می کنیم. این قضیه شرایط لازم برای اینکه تابعی متناوب دارای سری فوریه همگرا باشد را بیان می‌دارد .

قضیه ۱.۱۶: [۱۵](قضیه دیریکله) اگر $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب T باشد و در شرایط زیر صدق کند، آن‌گاه دارای سری فوریه همگرا خواهد بود:

الف) تابع $f(x)$ مقدار متوسط معینی در دوره تناوب T داشته باشد؛

ب) اگر ناپیوسته است، تعداد معینی از نقاط ناپیوستگی‌ها در دوره تناوب T باشد؛

ج) مقدار معینی اکسترمم مثبت و منفی داشته باشد.

[۱] Fourier Transform

[۲] Dirichlet Theorem

اثبات : برای مشاهده اثبات می‌توان به [۱۶] مراجعه نمود. □

قضیه ۱.۱۷: [۱۶] اگر تابع $f(x)$ در بازه $[-L,L]$ در شرایط قضیه دیریکله صدق کند و به علاوه $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ موجود باشد، آن‌گاه در نقاط پیوستگی x داریم :

$$f(x)=\int_{\circ}^{+\infty}[A(\lambda)cos(\lambda x)+B(\lambda)sin(\lambda x)]d\lambda \qquad (۱-۳)$$

که در آن :

$$A(\lambda)=\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)cos(\lambda x)dx \qquad (۱-۴)$$

و

$$B(\lambda)=\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)sin(\lambda x)dx. \qquad (۱-۵)$$

هم‌چنین این سری در نقاط پیوستگی $x_{\circ}$ به مقدار $\frac{f(x_{\circ}^{+})+f(x_{\circ}^{-})}{۲}$ همگرا می‌باشد.

اثبات : اثبات قضیه را می‌توان در [۱۶] ملاحظه نمود. □

با جایگذاری روابط (۱-۴) و (۱-۵) در رابطه (۱-۳) نتیجه می‌شود :

$$f(x)=\frac{۱}{\pi}\int_{\circ}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)cos\lambda(x-u)dud\lambda. \qquad (۱-۶)$$

از طرفی با استفاده از رابطه :

$$cos\lambda(x-u)=\frac{e^{j\lambda(x-u)}-e^{-j\lambda(x-u)}}{۲}$$

تساوی (۱-۶) به شکل زیر نوشته می‌شود :

$$f(x)=\frac{۱}{۲\pi}[\int_{\circ}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{j\lambda(x-u)}dud\lambda+\int_{\circ}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-j\lambda(x-u)}dud\lambda].$$

با توجه به این‌که دومین انتگرال در رابطه اخیر عبارت است از $\int_{-\infty}^{\circ}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{j\lambda(x-u)}dud\lambda$،

بنابراین خواهیم داشت :

$$f(x) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{j\lambda(x-u)}dud\lambda = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\lambda x}[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-j\lambda u}]d\lambda.$$

تابع $F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-j\lambda u}du$ را تبدیل فوریه تابع $f(x)$ و تبدیل فوریه معکوس $F(\lambda)$ را به صورت $f(x) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{j\lambda x}d\lambda$ تعریف می‌کنیم [۱۵] .

مثال ۱۸.۱: می‌خواهیم تبدیل فوریه تابع زیر را محاسبه کنیم:

$$f(t) = \begin{cases} ۱ & |t| < \frac{۱}{۲}, \\ ۰ & |t| > \frac{۱}{۲}, \end{cases} \qquad (۷-۱)$$

با استفاده از تعریف داریم :

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\lambda t}dt = \int_{-\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}} e^{-j\lambda t}dt = -\frac{e^{-j\lambda t}}{j\lambda}|_{-\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}}$$

$$= -\frac{۱}{j\lambda}(e^{-\frac{۱}{۲}j\lambda} - e^{\frac{۱}{۲}j\lambda}) = \frac{۲}{\lambda}sin(\frac{\lambda}{۲}).$$

مثال ۱۹.۱: تبدیل فوریه تابع زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq ۰, \\ ۰ & t < ۰. \end{cases} \qquad (۸-۱)$$

با استفاده از تعریف داریم:

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\lambda t}dt = \int_{۰}^{+\infty} e^{-at}e^{-j\lambda t}dt = \int_{۰}^{+\infty} e^{-(a+j\lambda)t}dt$$

$$= \frac{-۱}{a+j\lambda}e^{-(a+j\lambda)t}|_{۰}^{+\infty} = \frac{۱}{a+j\lambda}.$$

فرم سینوسی و کسینوسی تبدیل فوریه به شکل زیر است :

تبدیل فوریه فرم سینوسی:
$$F_s(\lambda) = \int_{0}^{+\infty} f(x) sin(\lambda x) dx$$

تبدیل فوریه معکوس فرم سینوسی:
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} F(\lambda) sin(\lambda x) dx$$

تبدیل فوریه فرم کسینوسی:
$$F_c(\lambda) = \int_{0}^{+\infty} f(x) cos(\lambda x) dx$$

تبدیل فوریه معکوس فرم کسینوسی:
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} F(\lambda) cos(\lambda x) dx$$

۱-۳-۱ ویژگی‌های تبدیل فوریه

قضیه ۲۰.۱: [۱۵](خطی بودن) اگر $h(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$ که در آن α و β مقادیری ثابت هستند، آن‌گاه داریم :

$$H(\lambda) = \alpha F(\lambda) + \beta G(\lambda).$$

اثبات : بنا به تعریف داریم:

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\lambda t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t)) e^{-j\lambda t} dt \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\lambda t} dt + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\lambda t} dt = \alpha F(\lambda) + \beta G(\lambda). \end{aligned}$$

□

قضیه ۲۱.۱: [۱۵](انتقال) اگر $h(t) = f(t - t_0)$ انتقال تابع $f(x)$ به‌وسیله t_0 باشد، آن‌گاه داریم:

$$H(\lambda) = e^{-j\lambda t_0} F(\lambda).$$

اثبات : بنا به تعریف داریم:

$$H(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\lambda t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-j\lambda t} dt$$

بنابراین با استفاده از تغییر متغیر $t - t_\circ = t'$ خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')e^{-j\lambda(t'+t_\circ)}dt' = e^{-j\lambda t_\circ} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')e^{-j\lambda t'}dt' = e^{-j\lambda t_\circ}F(\lambda).$$

□

قضیه ۲۲.۱: [۱۵](مقیاس بندی) اگر $h(t) = f(\frac{t}{\alpha})$ آن‌گاه داریم:

$$H(\lambda) = \alpha F(\alpha\lambda).$$

اثبات : با توجه به تعریف داریم:

$$H(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\lambda t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\frac{t}{\alpha})e^{-j\lambda t}dt$$

با تغییر متغیر به صورت $\frac{t}{\alpha} = t'$ خواهیم داشت :

$$\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')e^{-\alpha j\lambda t'}dt' = \alpha F(\alpha\lambda).$$

□

قضیه ۲۳.۱: [۱۵](مشتق اول) اگر $h(t) = f'(t)$ در این‌صورت خواهیم داشت :

$$H(\lambda) = j\lambda F(\lambda).$$

اثبات :

$$H(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\lambda t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-j\lambda t}dt$$

بنابراین با استفاده از انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء خواهیم داشت :

$$e^{-j\lambda t}f(t)|_{-\infty}^{+\infty} + j\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\lambda t}dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(-j\lambda)e^{-j\lambda t}dt = j\lambda F(\lambda).$$

□