بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (محض)

جبر باناخ توابع لیپشیتس و نگاشت‌های به طور ضعیف ضربی مرزی

توسط

فرمیسک خالدی

استاد راهنما

دکتر فرشته سعدی

فروردین ۱۳۸۸

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

تاییدیه اعضای هیات داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

عضای هیئت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **خانم فرمیسک خالدی** رشته **ریاضی محض** تحت عنوان:«**جبر باناخ توابع لیپ شیتس و نگاشتهای به طور ضعیف ضربی مرزی**» از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آنرا برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تائید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱– استاد راهنما	دکتر فرشته سعدی	استادیار	
۲– استاد ناظر داخلی	دکتر محمد باقری	استادیار	
۳– استاد ناظر داخلی	دکتر وحید شیربیشه	استادیار	
۴– استاد ناظر خارجی	دکتر حکیمه ماهیار	دانشیار	
۵– نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر محمد باقری	استادیار	

بسمه‌تعالی

آیین‌نامهٔ چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس، مبیّن بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادّهٔ ۱ در صورت اقدام به چاپ پایان‌نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اطلاع دهد.

مادّهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد/~~رسالهٔ~~ دکتری نگارنده در رشتهٔ ریاضی *است که در سال* ۱۳۸۸ *در دانشکدهٔ* علوم پایه *دانشگاه تربیت مدرّس به راهنمایی سرکار خانم/~~جناب~~ آقای دکتر* فرشته ملکی *، مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر* ـــــــ *و مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر* ــــ *از آن دفاع شده است.»*

مادّهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادّهٔ ۴ در صورت عدم رعایت مادّهٔ ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرّس، تأدیه کند.

مادّهٔ ۵ دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادّهٔ ۴ را از محلّ توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادّهٔ ۶ اینجانب [illegible] خادمی دانشجوی رشته ریاضی مقطع ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام خانوادگی: [illegible] خادمی

تاریخ و امضا:

۸۸/۵/۲۶

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی

دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه:

با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت وکرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت‌علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان‌نامه/رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می‌باشد ولی حقوق معنوی پدیدآورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه / رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجوی مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان‌نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می‌باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب و یا نرم‌افزار و یا آثار ویژه حاصل از نتایج پایان‌نامه / رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده‌ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده‌ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین‌نامه‌های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته‌ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت‌رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱٥ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

همسر مهربانم

و

اساتیدگرانقدرم

قدردانی

خداوند متعال را شاکرم که تدوین این پایان نامه جز در سایه لطف و عنایت او امکان پذیر نبود. از پدر و مادر بزرگوار و مهربانم که با زحمات خالصانه خود در تمام مراحل زندگی مرا یاری نموده‌اند از صمیم قلب سپاسگزارم. از استاد راهنمای بزرگوارم سرکار خانم دکتر فرشته سعدی که با صبر و حوصله بسیار زیادی مرا در تدوین این پایان نامه راهنمایی نمودند قدردانی می‌نمایم. همچنین قدردان زحمات صبورانه همسر مهربانم هستم. در پایان از درگاه خدواند متعال برای همه کسانی که در راه پیشرفت علم و دانش گام بر می‌دارند، طلب توفیق روز افزون دارم.

فرمیسک خالدی   فروردین ۱۳۸۸

چکیده

دراین پایان نامه که مراجع اصلی آن [۸] و [۱۳] می‌باشند ابتدا شکل کلی نگاشت‌های پوشای به طور ضعیف ضربی مرزی (نه لزوماً خطی) روی جبرهای لیپشیتس مشخص می‌شود. به عبارت دقیق‌تر، اگر X و Y فضاهای متریک نقطه‌ای هاسدورف فشرده باشند و $Lip_0(X)$ جبر باناخ توابع لیپشیتس اسکالر مقدار بر X باشد که روی نقطه متمایز X صفرند، آنگاه برای هر نگاشت (نه لزوماً خطی) پوشا و به طور ضعیف ضربی مرزی مانند T از $Lip_0(X)$ به $Lip_0(Y)$، یک همسانریختی لیپشیتس مانند $\phi : Y \longrightarrow X$ و تابعی مانند $\tau : Y \longrightarrow \{-1, 1\}$ وجود دارند به طوری که برای هر $f \in Lip_0(X)$ و $y \in Y$، $\Phi(f)(y) = \tau(y)f(\phi(y))$. در ادامه نشان داده می‌شود اگر A و B جبرهای یکنواختی به ترتیب روی فضاهای هاسدورف فشرده X و Y باشند، $\lambda \in \mathcal{C}\backslash\{0\}$ و $T : A \longrightarrow B$ نگاشت پوشایی (نه لزوماً خطی) باشد به طوری که برای هر $f, g \in A$، $\|T(f)T(g) + \lambda\|_\infty = \|fg + \lambda\|_\infty$ آنگاه T یک نگاشت ایزومتری $\Re-$ خطی است و عضو خودتوانی مانند $e \in B$ و تابع $k \in B$ که $k^2 = 1$ و نیز یک یکریختی جبری ایزومتری مانند $\tilde{T} : A \longrightarrow Be \oplus \bar{B}(1 - e)$ وجود دارد که به ازای $\gamma = \frac{\lambda}{|\lambda|}$ برای هر $f \in A$، $T(f) = k\Big(\tilde{T}(f)e + \gamma\overline{\tilde{T}(f)}(1 - e)\Big)$. در اینجا $\|.\|_\infty$ نشان دهنده سوپریمم نرم می‌باشد. بعلاوه اگر T یکال باشد آنگاه از $T(i) = i$ نتیجه می‌شود T یک یکریختی جبری ایزومتری استو از $T(i) = -i$ نتیجه می‌شود T مزدوج - یکریختی است.

واژه‌های کلیدی: برد مرزی، به طور ضعیف ضربی مرزی، همسانریختی لیپشیتس، جبرهای یکنواخت، طیف مرزی، یکریختی جبری ایزومتری

فهرست مندرجات

مقدمه

این پایان نامه که مراجع اصلی آن [۸] و [۱۳] می‌باشند شامل ۳ فصل است. در فصل اول مقدمات مورد نیاز در ارتباط با آنالیز تابعی، جبرهای باناخ و جبرهای یکنواخت بیان می‌شود.

در فصل دوم که مرجع اصلی آن [۸] می‌باشد ابتدا فرض می‌شود X یک فضای فشرده با نقطه متمایز e_X است. سپس با در نظر گرفتن $Lip_\circ(X)$ به عنوان جبر باناخ تمام توابع لیپشیتس اسکالر مقدار که روی e_X صفرند، ثابت می‌شود برای هر نگاشت پوشای به طور ضعیف مرزی ضربی (نه لزوماً خطی) مانند $\Phi : Lip_\circ(X) \longrightarrow Lip_\circ(Y)$، یک همسانریختی لیپشیتس از Y به X مانند ϕ و یک نگاشت از Y به مجموعه $\{-۱, ۱\}$ مانند τ وجود دارند به طوری که برای هر $f \in Lip_\circ(X)$، $\Phi(f)(y) = \tau(y)f(\phi(y))$. همچنین ثابت می‌گردد که تابع τ فقط در صورتی لیپشیتس است که نقطه e_X یک نقطه تنها از X باشد. در انتهای فصل، نتیجه فوق به همه نگاشت‌های پوشای به طور ضعیف مرزی ضربی (نه لزوماً خطی) که از $Lip(X)$ به $Lip(Y)$ تعریف می‌شوند، تعمیم داده می‌شود.

در فصل سوم که مرجع اصلی آن [۱۳] است ابتدا فرض می‌شود A و B جبرهای یکنواخت به ترتیب روی فضاهای هاسدورف فشرده X و Y هستند. سپس برای هر نگاشت پوشای (نه لزوماً خطی) مانند $T : A \longrightarrow B$ که به ازای هر $f, g \in A$، $\|T(f)T(g) + ۱\|_\infty = \|fg + ۱\|_\infty$، ثابت می‌شود عضو خودتوانی مانند $e \in B$ و یکریختی جبری ایزومتری مانند $\widetilde{T} : A \longrightarrow Be \oplus \bar{B}(۱ - e)$ وجود دارند به طوری که برای هر $f \in A$،

$$T(f) = T(۱)\Big(\widetilde{T}(f)e + \overline{\widetilde{T}(f)}(۱ - e)\Big)$$

در ادامه فصل حکم فوق تعمیم داده می‌شود به این ترتیب که با فرض $\lambda \in \mathcal{C}\setminus\{\circ\}$ ثابت

می‌شود به ازای هر نگاشت پوشای (نه لزوماً خطی) مانند $T: A \longrightarrow B$ که برای هر $f, g \in A$، $\|T(f)T(g) + \lambda\|_\infty = \|fg + \lambda\|_\infty$، عضو خودتوانی مانند $e \in B$ و تابع $k \in B$ که $k^۲ = ۱$ و نیز یک یکریختی جبری ایزومتری مانند $\tilde{T}: A \longrightarrow Be \oplus \bar{B}(۱ - e)$ وجود دارد که برای هر $f \in A$،

$$T(f) = k\Big(\tilde{T}(f)e + \gamma\overline{T(f)}(۱ - e)\Big)$$

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

در این فصل که شامل سه بخش می‌باشد به ذکر مقدمات و پیش‌نیازهای لازم در زمینه آنالیز تابعی، جبرهای باناخ و جبرهای یکنواخت می‌پردازیم.

۱.۱ مقدماتی از آنالیز تابعی

در این بخش تعاریف و قضایایی از آنالیز تابعی که در فصل‌های بعد مورد نیاز هستند، ارائه می‌شوند.

۱.۱.۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای نرمدار باشد، در این صورت X را یک فضای باناخ گوییم هرگاه X با متریک حاصل از نرمش کامل باشد. به عبارت دیگر، X فضای باناخ است هرگاه هر دنباله کشی در $(X, \|.\|)$ همگرا باشد.

۲.۱.۱ تعریف. فرض کنیم $T : X \to Y$ یک عملگر خطی بین دو فضای نرمدار X, Y باشد. نرم T با ضابطه زیر تعریف می شود:

$$\|T\| = sup\{\|Tx\| : \|x\| = ۱\}$$

اگر$\|T\|$ متناهی باشد T یک عملگر خطی کراندار نامیده می شود.

۳.۱.۱ تعریف. نگاشت T بین دو فضای نرم‌دار X و Y را باز گوییم هرگاه تصویر هر زیرمجموعهٔ باز X، مجموعه‌ای باز در Y باشد.

۴.۱.۱ قضیه(نگاشت باز)[۱۱.۲، ۱۹]. اگر X و Y دو فضای باناخ و $T : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت خطی، کراندار و پوشا باشد آنگاه T نگاشتی باز است.

۵.۱.۱ تعریف. اگر X و Y فضاهای برداری نرم‌داری باشند و $T : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت خطی باشد در این صورت نمودار T به صورت

$$G = \{(x, y) \in X \times Y : y = Tx\}$$

تعریف می‌شود. T را بسته می‌گوییم هرگاه $G(T)$ زیرفضای بسته‌ای از $X \times Y$ (همراه با نرم حاصلضربی) باشد.

۶.۱.۱ قضیه(نمودار بسته)[۱۵.۲، ۱۹]. اگر X و Y دو فضای باناخ و $T : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت خطی بسته باشد آنگاه T پیوسته است.

فرض کنید $B(X, Y)$ مجموعه‌ی همهٔ عملگرهای خطی و کراندار از X به Y باشد. می‌دانیم هرگاه Y یک فضای باناخ باشد، $B(X, Y)$ همراه با نرم تعریف شده در بالا، فضای باناخ است. بنابراین هر گاه $(X, \|.\|)$ یک فضای باناخ باشد $B(X) = B(X, X)$ یک فضای باناخ است.

۷.۱.۱ تعریف. برای فضای نرم‌دار X، فضای باناخ $B(X, \mathcal{C})$ را دوگان X نامیم و با X^* نشان

می‌دهیم.

۸.۱.۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای برداری نرمدار باشد. توپولوژی ضعیف تولید شده توسط X^* روی X، توپولوژی ضعیف روی X نامیده می‌شود.

در واقع اگر $\{x_\alpha\}$ یک تور در فضای نرم‌دار X باشد و $x \in X$ آنگاه $x_\alpha \to x$ به طور ضعیف، اگر و تنها اگر $f(x_\alpha) \to f(x)$ برای هر $f \in X^*$.

برای فضای نرم‌دار X و هر $x \in X$، $f \to f(x)$ یک تابعک خطی روی X^* است. بنابراین هر عضو $x \in X$ را می توان یک تابعک خطی روی X^* دانست.

۹.۱.۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای برداری نرم‌دار باشد. توپولوژی ضعیف تولید شده توسط X روی X^* را توپولوژی ضعیف ستاره X^* نامیم.

به سادگی دیده می‌شود هرگاه $\{f_\alpha\}$ یک تور در X^* باشد و $f \in X^*$ آنگاه $f_\alpha \to f$ در توپولوژی ضعیف ستاره، اگر و تنها اگر در هر نقطه $x \in X$، $f_\alpha(x) \to f(x)$.

۱۰.۱.۱ تعریف. فرض کنیم K زیر مجموعه‌ای از فضای برداری X باشد. زیر مجموعه S از K یک مجموعهٔ اکستریم K نامیده می‌شود اگر $x, y \in K$ و $۰ < t < ۱$ طوری باشند که

$$(۱ - t)x + ty \in S$$

آنگاه $x \in S$ و $y \in S$.

نقاط اکستریم K، مجموعه‌های اکستریم تک نقطه‌ای هستند. مجموعهٔ همهٔ نقاط اکستریم K را با $Ext(K)$ نشان می‌دهیم.

۱۱.۱.۱ قضیه(کرین-میلمن)[۱۹،۲۳.۳]. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد. اگر K یک زیرمجموعه محدب فشردهٔ ناتهی در X باشد آنگاه

$$K = \overline{Co}(Ext(K))$$

که در آن $Co(Ext(K))$ پوش محدب نقاط اکستریم K یعنی کوچکترین مجموعه محدب شامل $Ext(K)$ است.

۱۲.۱.۱ قضیه(باناخ-آلاغلو)[۱۹،۱۵.۳]. برای فضای نرمدار X، گوی یکهٔ بستهٔ X^*، ضعیف ستاره فشرده است.

۲.۱ مقدماتی از جبرهای باناخ

این بخش را به مطالبی از جبرهای باناخ که در فصول بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، اختصاص داده‌ایم. مرجع اصلی مورد استفاده در این بخش [۱۹] می‌باشد.

۱.۲.۱ تعریف. جبر مختلط A را یک جبر باناخ گوییم هرگاه A همراه با نرمی مانند $\|.\|$ یک فضای باناخ بوده و برای هر $x,y \in A$ نامساوی $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ برقرار باشد. اگر A شامل عضوی مانند e باشد به طوری که برای هر $x \in A$ $xe = ex = x$ در این صورت A را یک جبر یکدار می‌گوییم. در جبر باناخ A با یکه e می‌توان فرض کرد $\|e\| = ۱$. اگر برای هر x,y در جبر باناخ A، $xy = yx$ آنگاه A یک جبر باناخ تعویض پذیر نامیده می‌شود.

۲.۲.۱ مثال.

الف. فرض کنید $C(K)$ فضای باناخ همه توابع مختلط پیوسته روی فضای هاسدورف، فشرده و ناتهی K باشد. به راحتی دیده می‌شود که $C(K)$ به همراه ضرب نقطه‌ای توابع و نرم سوپریمم روی K یک جبر باناخ یکدار است که نگاشت ثابت ۱ یکه این جبر است.

ب. $B(X)$ فضای تمام عملگرهای خطی و کراندار روی فضای باناخ X به همراه نرم عملگری و عمل ترکیب توابع به عنوان ضرب یک جبر باناخ می‌باشد که نگاشت همانی I عضو

یکه آن است.

برای فضای متریک(X,d) فرض کنید $Lip(X)$ فضای تمام توابع مختلط کراندار بر X باشد که در شرط لیپشیتس زیر صدق می‌کنند

$$L(f)=\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}<\infty$$

در این صورت $Lip(X)$ همراه با نرم

$$||f||=max\Big(||f||_\infty,L(f)\Big)\qquad (f\in Lip(X))$$

که $||.||_\infty$ نشان دهنده سوپریمم نرم روی X است، یک فضای باناخ است.

۳.۲.۱ قضیه. فرض کنید X یک فضای متریک و فشرده، $f\in Lip(X)$ و برای هر $x\in X$ $f(x)\neq 0$ در این صورت $\frac{1}{f}\in Lip(X)$.

برهان. f یک تابع لیپشیتس است و f در هیچ نقطه‌ای از X صفر نمی شود بنابراین

$$\frac{|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(y)}|}{d(x,y)}=\frac{|\frac{f(y)-f(x)}{f(x)f(y)}|}{d(x,y)}$$
$$\frac{|f(y)-f(x)|}{f(x)f(y)d(x,y)}\leq L(f)\frac{1}{{m_1}^2}$$

که در آن $m_1=min\{|f(x)|:x\in X\}>0$ بنابراین $\frac{1}{f}\in Lip(X)$. $\square$

۴.۲.۱ قضیه[۲. ۱۹،۱۰]. فرض کنید A یک فضای باناخ و همچنین یک جبر مختلط باشد. اگر عمل ضرب A از راست و چپ پیوسته باشد آنگاه نرم هم‌ارزی روی A موجود است به طوری که A با این نرم یک جبر باناخ است.

۵.۲.۱ تعریف. فرض کنیم A یک جبر تعویض پذیر مختلط و φ یک تابعک خطی مخالف صفر روی A باشد طوری که برای هر $x,y\in A$ داشته باشیم

$$\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$$

در این صورت φ یک تابعک خطی ضربی (همریختی مختلط) روی A نامیده می‌شود.

به سادگی دیده می‌شود هر گاه جبر A تعویض پذیر و یکدار با یکهٔ e باشد و φ یک تابعک خطی ضربی روی A باشد، آنگاه $\varphi(e) = 1$ و برای هر عضو وارون‌پذیر $x \in A$، $\varphi(x) \neq 0$.

۶.۲.۱ تعریف. فرض کنیم A یک جبر باناخ یکدار باشد و $x \in A$. طیف $\sigma(x)$ از x عبارت است از مجموعهٔ همه اعداد مختلط λ بطوریکه $x - \lambda e$ در A وارون‌پذیر نباشد.

به عنوان مثال اگر X یک فضای هاسدورف فشرده باشد و $A = C(X)$ آنگاه برای هر $f \in C(X)$، $\sigma(f)$ همان برد f است.

۷.۲.۱ قضیه[۱۹،۱۳.۱۰]. اگر A یک جبر باناخ باشد و $x \in A$ آنگاه $\sigma(x)$ زیر مجموعهٔ ناتهی فشردهٔ صفحهٔ مختلط است.

۸.۲.۱ قضیه[۲۰]. اگر $x \in A$ و p یک چند جمله‌ای روی میدان اعداد مختلط باشد آنگاه برای هر $\lambda \in \sigma(x)$، $p(\lambda) \in \sigma(p(x))$.

۹.۲.۱ قضیه[۲۰]. فرض کنید A یک جبر باناخ یکدار و $x \in A$ وارون پذیر باشد. اگر $\lambda \neq 0$ در این صورت $\lambda \in \sigma(x)$ اگر و تنها اگر $\lambda^{-1} \in \sigma(x^{-1})$.

۱۰.۲.۱ تعریف. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و $x \in A$. شعاع طیفی x در A را که با $r(x)$ نمایش می‌دهیم عبارت است از

$$r(x) = sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$$

برای جبر باناخ A، مجموعهٔ همهٔ همریختی‌های مختلط ناصفر روی A را با M_A نمایش می‌دهیم.

۱۱.۲.۱ قضیه[۲۰]. اگر A یک جبر باناخ تعویض پذیر یکدار باشد آنگاه

(i) برای هر ایده‌آل ماکسیمال مانند M در A، عضوی مانند $\varphi \in M_A$ موجود است طوری

که

$$M = Ker\ \varphi = \{x \in A : \varphi(x) = \circ\}$$

(ii) اگر $\varphi \in M_A$، آنگاه هسته φ یک ایده‌آل ماکسیمال A است.

قضیهٔ قبل نشان میدهد یک تناظر یک به یک، بین ایده‌آلهای ماکسیمال جبر باناخ تعویض‌پذیر یکدار A و اعضای M_A موجود است.

۱۲.۲.۱ قضیه [قضیه ۵۸، ۲۰]. هر همریختی مختلط φ روی جبر باناخ A پیوسته است و در واقع $\|\varphi\| \leq ۱$. بعلاوه اگر A تعویض پذیر و یکدار باشد آنگاه $\|\varphi\| = ۱$.

بنابراین قضیه قبل نشان می دهد برای جبر باناخ A، M_A زیرمجموعه‌ی گوی واحد فضای دوگان A، یعنی A^* می‌باشد. لذا می‌توان به M_A توپولوژی ضعیف ستاره A^* را القا کرد.

۱۳.۲.۱ تعریف. فرض کنیم A یک جبر باناخ تعویض‌پذیر یکدار باشد. مقطع همهٔ ایده‌آلهای ماکسیمال A را رادیکال A می‌نامیم و با $rad\ A$ نشان می دهیم. هرگاه $rad\ A = \{\circ\}$ آنگاه A را نیم‌ساده گوییم.

۱۴.۲.۱ تعریف. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد که در آن $M_A \neq \emptyset$. برای هر $x \in A$ نگاشت $\hat{x} : M_A \to C$ را که با رابطه $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$ تعریف می‌شود تبدیل گلفاند x می‌نامیم و نگاشت $x \longmapsto \hat{x}$ روی A تبدیل گلفاند A نامیده می‌شود.

برای جبر باناخ A با $M_A \neq \emptyset$، توپولوژی گلفاند روی M_A ضعیفترین توپولوژی روی M_A است که تحت آن تمام $\hat{x}$ها، $x \in A$ پیوسته باشد.این توپولوژی در واقع همان توپولوژی ضعیف ستاره القایی از A^* به M_A است. برای هر $\varphi_\circ \in M_A$، پایه موضعی برای $\varphi_\circ$ در توپولوژی گلفاند توسط همسایگی‌های زیر تعریف می‌شود:

$$V(\varphi_\circ; x_۱, \ldots, x_n; \varepsilon) = \{\varphi \in M_A : |\hat{x}_i(\varphi) - \hat{x}_i(\varphi_\circ)| < \varepsilon \quad , \quad i = ۱, \ldots, n\}$$

که در آن $x_1, \dots, x_n \in A$ و $\varepsilon > 0$ دلخواه هستند. در حالتی که A تعویض پذیر یکدار باشد M_A را فضای ایده‌ال ماکسیمال A نامیم.

۱۵.۲.۱ قضیه[۲۰]. فرض کنیم M_A فضای ایده‌آل ماکسیمال جبر باناخ تعویض‌پذیر یکدار A و $C(M_A)$ جبر توابع مختلط پیوسته روی M_A باشد. آنگاه

(i) M_A یک فضای هاسدورف فشرده است.

(ii) تبدیل گلفاند یک همریختی از A بروی زیر جبر $\hat{A} = \{\hat{x} : x \in A\}$ از $C(M_A)$ است که هسته آن، $rad\ A$ می‌باشد. بنابراین تبدیل گلفاند یک به یک است اگر و تنها اگر A نیم‌ساده باشد.

(iii) برای هر $x \in A$ برد $\hat{x}$ طیف x می‌باشد. بعلاوه

$$\|\hat{x}\|_\infty = r(x) \leq \|x\|$$

که در آن $\|\hat{x}\|_\infty$ سوپریمم نرم $\hat{x}$ روی M_A می‌باشد و همچنین $x \in rad\ A$ اگر و تنها اگر $r(x) = 0$.

برای فضای هاسدورف فشرده X، فضای ایده‌ال ماکسیمال $C(X)$ همان X است به این معنی که هر همریختی مختلط ناصفر بر $C(X)$ به فرم δ_x، $x \in X$ است که در آن $\delta_x : A \longrightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه $\delta_x(f) = f(x)$، $f \in C(X)$، تعریف می‌شود. این تناظر بین X و $M_{C(X)}$ در واقع یک همسانریختی است. همین مطلب در مورد جبر باناخ $Lip(X)$ که در آن X یک فضای متریک فشرده است، صادق است. بعلاوه این دو جبر، جبرهای باناخ نیم ساده‌ای هستند زیرا رادیکال آنها زیر مجموعه $\cap\{Ker\delta_x : x \in X\}$ است.

۱۶.۲.۱ قضیه[۲۰]. فرض کنیم A یک جبر باناخ تعویض پذیر یکدار باشد. در این صورت عضو $x \in A$ وارون پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $\varphi \in M_A$، $\varphi(x) \neq 0$.

قضیه بالا نتیجه می دهد برای هر $x \in A$، $\sigma(x) = \{\varphi(x) : \varphi \in M_A\}$.