دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض گرایش جبر

عنوان

کوهمولوژی موضعی و ایده‌آل‌های اول هم‌وابسته

استاد راهنما

دکتر رضا نقی‌پور

استاد مشاور

دکتر پرویز سهندی

پژوهشگر

الهام محمدزاده

بهمن ۱۳۸۸

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ

نام خانوادگی دانشجو: محمدزاده   نام: الهام

عنوان: کوهمولوژی موضعی و ایده‌آل‌های اول هم‌وابسته

استاد راهنما : دکتر رضا نقی‌پور

استاد مشاور: دکتر پرویز سهندی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: ریاضی محض   گرایش: جبر   دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی   تاریخ فارغ‌التحصیلی: بهمن ۱۳۸۸   تعداد صفحه: ۹۲

کلید واژه‌ها: کوهمولوژی موضعی، کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته، ایده‌آل‌های اول چسبیده، ایده‌آل‌های اول وابسته، ایده‌آل‌های اول هم‌وابسته، همبافت کوزول.

چکیده

فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی (نوتری) و M یک R- مدول با تولیدمتناهی با بعد پروژکتیو متناهی n باشد. فرض کنیم N یک R- مدول دلخواه و $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل R باشد که با s عضو تولید می‌شود. ابتدا مفهوم ایده‌آل‌های اول هم‌وابسته را بعنوان دوگان ایده‌آل‌های اول وابسته معرفی و سپس یک R- همومورفیسم پوشا از مدول کوهمولوژی موضعی معمولی $H_{\mathfrak{a}}^{s}(Hom_R(P_{n,M}, N))$ به مدول کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته $H_{\mathfrak{a}}^{n+s}(M, N)$، که در آن $P_{n,M}$، n- امین سی زی جی تحلیل پروژکتیو M است، بیان می‌کنیم. با استفاده از این

اپی‌مورفیسم نتایجی در مورد ایده‌آل‌های اول چسبیده، ایده‌آل‌های اول هم‌وابسته، اعداد بتی و خواص آرتینی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته ثابت می‌کنیم.

فهرست مطالب

مقدمه

این پایان‌نامه بر اساس دو مقالهٔ زیر تنظیم شده است.

[1] K. Khashyarmanesh, F. Khosh-Ahang, *A surjective homomorphism from ordinary local cohomology modules to top generalized local cohomology modules,* Communications in Algebra, 35, 3835-3841, (2007).

[2] S. Yassemi, *Coassociated primes,* Comm. Algebra. 23(4), 1473-1498, (1995).

در مطالعهٔ مدول‌ها روی حلقهٔ جابجایی و نوتری R، ایده‌آل‌های اول وابسته ابزار مهمی هستند. در این پایان‌نامه با توسعه نظریهٔ ایده‌آل‌های اول وابسته به ایده‌آل‌های اول هم‌وابسته به معرفی مدول‌های هم‌دور پرداخته و نتایجی را روی ایده‌آل‌های اول هم‌وابسته اثبات می‌کنیم.

برای بیان دوگان ایده‌آل‌های اول وابسته سه نظریه وجود دارد. اولین نظریه توسط مک دونالد[1] و با معرفی ایده‌آل‌های اول چسبیده بیان گردید. بعداً چامبلز[2] مجموعهٔ ایده‌آل‌های اول هم‌وابسته را به این صورت معرفی کرد:

ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ را یک ایده‌آل اول هم‌وابستهٔ R- مدول M می‌نامیم، هرگاه یک تصویر هومومورفیک جمع− تحویل ناپذیر M مانند L موجود باشد، بطوریکه $\mathfrak{p} = \{a \in R; aL \neq L\}$.

سرانجام زوشینگر[3] ایده‌آل‌های اول هم‌وابسته را به این صورت تعریف کرد. ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ را ایده‌آل اول هم‌وابستهٔ M گویند، هرگاه یک تصویر هومومورفیک آرتینی M مانند L موجود باشد، بطوریکه $\mathfrak{p} = Ann(L)$.

---

[1] Macdonald

[2] Chambless

[3] Zoschinger

در فصل دوم این پایان‌نامه تعریف ایده‌آل‌های اول هم‌وابسته را که توسط یاسمی[4] معرفی شده‌اند را بیان کرده و نشان می‌دهیم که با تعریف ارائه شده توسط چامبلز و زوشینگر معادل می‌باشد. همچنین هم‌تکیه گاه، هم‌رادیکال پوچ یک مدول را معرفی کرده و روابطی را بین این‌ها بدست می آوریم.

فانکتور کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته توسط هرزوگ[5] در مرجع [۱۴] بیان شده است. در فصل سوم مدول کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته را تعریف کرده و فرض می‌کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقهٔ جابجایی، موضعی و نوتری باشد. فرض می‌کنیم $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ یک ایده‌آل R، M یک R- مدول با تولیدمتناهی با بعد پروژکتیو متناهی و N یک R- مدول دلخواه باشد. همچنین فرض می‌کنیم $P_{n,M}$، n- امین سی زی جی یک تحلیل پروژکتیو M مانند

$$P_\bullet : 0 \to P_{n,M} \to \cdots \to P_{1,M} \to P_{0,M} \to 0$$

باشد. در این پایان‌نامه، ثابت می‌کنیم به ازای هر R- مدول N، $H^{n+s}_{\mathfrak{a}}(M, N)$ تصویر هومورفیک کوهمولوژی موضعی معمولی $H^s_{\mathfrak{a}}(Hom_R(P_{n,M}, N))$ است. بعنوان یک نتیجه نشان می‌دهیم که $H^{n+s}_{\mathfrak{a}}(M, N)$ یک تصویر هومورفیک $\bigoplus_{i=1}^{t} H^s_a(N)$ است که در آن t رتبهٔ $P_{n,M}$ می‌باشد. همچنین نشان می‌دهیم که اگر N با تولید متناهی و $s \geq d = dimN$، آنگاه:

(i) $Coass_R(H^{n+s}_{\mathfrak{a}}(M, N)) \subseteq Coass_R(H^s_{\mathfrak{a}}(N))$.

(ii) $Att_R(H^{n+s}_{\mathfrak{a}}(M, N)) \subseteq Att_R(H^d_{\mathfrak{a}}(N))$.

(iii) $Coass_R(H^{n+s}_{\mathfrak{a}}(M, R)) \subseteq \{\mathfrak{p} \in SpecR \mid cd(\mathfrak{a}, R/\mathfrak{p}) = s\}$.

(iv) $Coass_R(H^{n+s}_{\mathfrak{a}}(M, N)) \subseteq Spec(R) - V(\mathfrak{a})$.

Yassemi[4]

Herzog[5]

فرض کنیم M یک R- مدول باشد. M هم‌متناهی نسبت به ایده‌آل $\mathfrak{a}$ نامیده می‌شود، هرگاه:

۱) $Supp_R(M) \subseteq V(\mathfrak{a})$.

۲) برای همهٔ مقادیر $i \geq 0$، $Ext^i_R(\frac{R}{\mathfrak{a}}, M)$ یک R- مدول با تولیدمتناهی باشد.

با تعریف مدول هم‌متناهی نسبت به یک ایده‌آل مانند $\mathfrak{a}$ به صورت بالا، که توسط هارتشورن[6] بیان شده است، نشان می‌دهیم که اگر N یک R- مدول با تولیدمتناهی و $H^i_{\mathfrak{a}}(N)$ به ازای $i < s$، $\mathfrak{a}$- هم‌متناهی باشد، در این صورت به ازای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$، صفر امین عدد بتی $H^{n+s}_{\mathfrak{a}}(M, N)$ یعنی $\beta_0(\mathfrak{p}, H^{n+s}_{\mathfrak{a}}(M, N))$ متناهی است.

Harthshorne[6]

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در سراسر این پایان‌نامه حلقهٔ مورد نظر جابجایی، نوتری و یکدار می‌باشد.

۱.۱ تکیه‌گاه یک مدول

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم M یک R- مدول باشد. تکیه‌گاه[1] M را با علامت $Supp_R(M)$ نشان داده و تعریف می‌کنیم:

$$Supp_R(M) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R); M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم I یک ایده‌آل R باشد. واریته I را با $V(I)$ نشان داده و تعریف می‌کنیم:

$$V(I) := \{\mathfrak{p} \in Spec(R); I \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

لم ۳.۱.۱ فرض کنیم M یک R- مدول با تولیدمتناهی باشد. در این صورت

$$Supp_R(M) = V(Ann_R(M)).$$

برهان. رجوع شود به صفحهٔ ۴۶ مرجع [۳]. □

Support[1]

تبصره ۴.۱.۱ فرض کنیم M یک R- مدول باشد. در این صورت

$$M \neq 0 \Longleftrightarrow Supp_R(M) \neq \varnothing.$$

قضیه ۵.۱.۱ فرض کنیم $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ یک رشتهٔ دقیق از R- مدول‌ها و R- هومومورفیسم‌ها باشد. در این صورت

$$Supp_R(M) = Supp_R(M') \cup Supp_R(M'').$$

برهان. رجوع شود به صفحهٔ ۴۶ مرجع [۳]. □

لم ۶.۱.۱ اگر M و N دو R- مدول با تولیدمتناهی باشند، آنگاه داریم:

$$Supp_R(M \otimes_R N) = Supp_R M \cap Supp_R N.$$

برهان. رجوع شود به صفحهٔ ۴۶ مرجع [۳]. □

۲.۱ ایده‌آل‌های اول وابسته

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم M یک R- مدول باشد. $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ را یک ایده‌آل اول وابسته[2] M گویند، هرگاه $m \in M$ وجود داشته باشد بطوریکه $Ann_R(m) = \mathfrak{p}$. مجموعهٔ تمام ایده‌آل‌های اول

[2] Associated prime

وابسته M با علامت $Ass_R(M)$ یا به اختصار با $Ass(M)$ نشان داده می‌شود.

تبصره ۲.۲.۱ فرض کنیم M یک R- مدول باشد. در این صورت داریم:

۱). $\mathfrak{p} \in Ass_R(M)$، اگر و فقط اگر M دارای یک زیرمدول (دوری) ایزومورف با $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ باشد.

۲). $Ass_R(M) \subseteq Supp_R(M)$.

برهان. رجوع شود به صفحهٔ ۳۹ مرجع [۲۱]. □

لم ۳.۲.۱ فرض کنیم M یک R- مدول باشد. در این صورت

$$M = 0 \Leftrightarrow Ass_R(M) = \varnothing.$$

برهان. رجوع شود به صفحهٔ ۳۸ مرجع [۲۱]. □

لم ۴.۲.۱ فرض کنیم M یک R- مدول با تولیدمتناهی باشد. در این صورت $Ass_R M$ متناهی است.

برهان. رجوع شود به صفحه ۵۳ مرجع [۱۰]. □

لم ۵.۲.۱ فرض کنیم M یک R- مدول مخالف صفر باشد. در این صورت هر عضو مینیمال $Supp_R(M)$ در $Ass_R(M)$ قرار دارد و اگر R نوتری و M با تولیدمتناهی باشد، آنگاه مینیمال‌های $Ass_R(M)$ و $Supp_R(M)$ یکسانند.

برهان. رجوع شود به صفحه ۵۳ مرجع [۱۰]. □

لم ۶.۲.۱ فرض کنیم M یک R- مدول با تولیدمتناهی باشد. در این صورت زنجیر

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M.$$

از زیرمدول‌های M و ایده‌آل‌های اول $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ در R موجودند بطوریکه

$$\frac{M_i}{M_{i+1}} \cong \frac{R}{\mathfrak{p}_i}.$$

برهان. رجوع شود به صفحهٔ ۳۹ مرجع [۲۱]. □

لم ۷.۲.۱ فرض کنیم $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ یک رشتهٔ دقیق از R- مدول‌ها و R- هومومورفیسم‌ها باشد. در این صورت

$$Ass_R(M') \subseteq Ass_R(M) \subset Ass_R(M') \cup Ass_R(M'').$$

برهان. رجوع شود به صفحه ۳۸ مرجع [۲۱]. □

تبصره ۸.۲.۱ فرض کنیم M یک R- مدول با طول متناهی باشد. در این صورت

$$Ass_R(M) = Supp_R(M) \subseteq Max(R).$$

برهان. رجوع شود به صفحهٔ ۲۷۴ مرجع [۵]. □

گزاره ۹.۲.۱ فرض کنیم M یک R- مدول و $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول از R باشد. در این صورت داریم:

(i) اگر $\mathfrak{p}$ شامل عضوی از $Ass(M)$ باشد، آنگاه $\mathfrak{p}$ متعلق به $Supp(M)$ می‌باشد.

(ii) اگر R نوتری و $\mathfrak{p} \in Supp(M)$، آنگاه $\mathfrak{p}$ شامل عضوی از $Ass(M)$ می‌باشد.

برهان. رجوع شود به صفحه ۲۶۵ مرجع [۵]. □

تعریف ۱۰.۲.۱ فرض کنیم M یک R- مدول باشد. M را مدول باوفا گوییم، هرگاه $Ann(M) = 0$.

۳.۱ پوشش انژکتیو

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنیم M یک R- مدول ناصفر و N یک زیر مدول ناصفر از M باشد. گوییم M یک توسیع اساسی [3] از N است، در صورتی که به ازای هر زیر مدول ناصفر M مانند L داشته باشیم $L \cap N \neq 0$. به عبارت معادل برای هر عضو ناصفر $b \in M$ یک $r \in R$ موجود باشد، به طوریکه $rb \in N$ و $rb \neq 0$. فرض کنیم M یک R- مدول انژکتیو و توسیع اساسی N باشد. در این صورت گوییم M یک پوشش انژکتیو[4] N است و با علامت $E(N)$ نشان می‌دهیم.

[3] Essential extention

[4] Injective hull

تعریف ۲.۳.۱ یک R- مدول M متناهیاً فرورفته[5] نامیده می‌شود، اگر تعداد متناهی R- مدول ساده $S_1, S_2, \dots, S_n$ وجود داشته باشند بطوریکه داشته باشیم:

$$E(M) \simeq E(S_1) \oplus \cdots \oplus E(S_n).$$

گزاره ۳.۳.۱ فرض کنیم M یک R- مدول باشد. در این صورت شرایط زیر هم ارزند:

i) M آرتینی است.

ii) هر مدول خارج قسمتی از M، متناهیاً فرورفته می‌باشد.

برهان. رجوع شود به صفحهٔ ۷۵ مرجع [۲۹]. $\square$

نتیجه ۴.۳.۱ هر مدول آرتینی متناهیاً فرورفته است.

لم ۵.۳.۱ i) اگر R حوزه صحیح و $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل واقعی از R باشد، آنگاه

$$Ann_R(E(\frac{R}{\mathfrak{p}})) = 0.$$

ii) اگر R موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ باشد، آنگاه

$$Ann_R(E(\frac{R}{\mathfrak{m}})) = 0.$$

---

[5] Finitely embedded

برهان. رجوع شود به صفحهٔ ۴۷ مرجع [۲۹]. □

لم ۶.۳.۱ فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقهٔ موضعی و $E = E(\frac{R}{\mathfrak{m}})$. در این صورت

$$\frac{R}{\mathfrak{m}} = (0 :_E \mathfrak{m}).$$

برهان. رجوع شود به صفحهٔ ۱۰۸ مرجع [۲۹]. □

لم ۷.۳.۱ فرض کنیم M یک R- مدول و $\mathfrak{b} = Ann_R(M)$. در این صورت داریم

$$(0 :_{E_R(M)} \mathfrak{b}) \cong E_{\frac{R}{\mathfrak{b}}}(M).$$

برهان. رجوع شود به صفحهٔ ۱۸۵ مرجع [۷]. □

تبصره ۸.۳.۱ فرض کنیم $\mathfrak{m}$ ایده‌آلی ماکسیمال از حلقه R باشد. در این صورت R- مدول انژکتیو $E(\frac{R}{\mathfrak{m}})$ آرتینی است.

برهان. رجوع شود به قضیهٔ ۱۰.۲.۵ مرجع [۷]. □

لم ۹.۳.۱ فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقهٔ آرتینی، موضعی، کامل و $E = E(\frac{R}{\mathfrak{m}})$. فرض کنیم L زیرمدول با وفا از E باشد. در این صورت $L = E$.

برهان. رجوع شود به صفحهٔ ۴۵۲ مرجع [۲۷]. □

۴.۱ ایده‌آل‌های اول چسبیده

تعریف ۱.۴.۱ فرض کنیم M یک R- مدول ناصفر باشد. M را مدول ثانویه[6] نامند، هرگاه به ازای هر $r \in R$ داشته باشیم $rM = M$ یا $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد، به طوریکه $r^nM = 0$. در این صورت $\mathfrak{p} = \sqrt{(0 :_R M)}$ ایده‌آل اول R می‌باشد و M را R- مدول $\mathfrak{p}$- ثانویه می‌نامند.

تعریف ۲.۴.۱ فرض کنیم M یک R- مدول باشد. اگر M به صورت یک مجموع متناهی از زیرمدول‌های ثانویه‌اش باشد، آن را یک نمایش ثانویهٔ برای M می‌نامیم. یک نمایش ثانویه M بصورت $M = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ که S_i ها همگی $\mathfrak{p}_i$- ثانویه‌اند، مینیمال نامیده می‌شود هرگاه :

i) $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ ایده‌آل‌های اول متمایز R باشند.

ii) برای هر $j = 1, \ldots, n$ ، $S_j \nsubseteq \sum_{i=1, i\neq j}^{n} S_i$.

M را یک R- مدول نمایش پذیر گوییم، هرگاه M یک نمایش ثانویه داشته باشد.

تعریف ۳.۴.۱ مجموعهٔ ایده‌آل‌های اول $\{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ تعریف شده در بالا را ایده‌آل‌های اول چسبیده[7] M نامیده و با علامت $Att_R(M)$ نمایش می‌دهیم.

---

[6] Secondary

[7] Attached prime ideals

لم ۴.۴.۱ فرض کنیم M یک R- مدول، $\mathfrak{p}$ یک ایده آل اول از R باشد. فرض کنیم $M_1, \dots, M_r$ زیرمدول‌های $\mathfrak{p}$- ثانویه از M باشند. در این صورت $P = M_1 + \cdots + M_r$ نیز $\mathfrak{p}$- ثانویه است.

برهان. رجوع شود به گزارهٔ ۲.۱ مرجع [۱۷]. □

لم ۵.۴.۱ فرض کنیم $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ یک رشتهٔ دقیق از R- مدول‌ها و R- هومومورفیسم‌ها باشد. در این صورت

$$Att_R(M'') \subset Att_R(M) \subset Att_R(M') \cup Att_R(M'').$$

برهان. رجوع شود به قضیهٔ ۴.۱ مرجع [۱۷]. □

لم ۶.۴.۱ فرض کنیم $M_1, \dots, M_r$، R- مدول‌های نمایش پذیر باشند. در این صورت $M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$ نیز نمایش پذیر است و داریم

$$Att_R(M_1 \oplus \cdots \oplus M_r) = \bigcup_{i=1}^{r} Att_R(M_i).$$

برهان. رجوع شود به قضیهٔ ۴.۲ مرجع [۱۷]. □

تعریف ۷.۴.۱ یک R- مدول M را جمع– تحویل ناپذیر[8] می‌نامیم، هرگاه $M \neq 0$ و نتوان به صورت جمع دو زیرمدول واقعی از M نوشت.

---

[8] Sum-irreducible

گزاره ۸.۴.۱ فرض کنیم M یک R- مدول آرتینی و جمع — تحویل ناپذیر باشد. در این صورت M ثانویه است.

برهان. رجوع شود به ۵.۱ مرجع [۱۷]. □

تبصره ۹.۴.۱ فرض کنیم M یک R- مدول نمایش پذیر و $\mathfrak{a} = Ann_R(M)$. در این صورت ایده‌آل $\mathfrak{a}$ تجزیه‌پذیر بوده و داریم $Ass(\frac{R}{\mathfrak{a}}) \subset Att_R(M)$.

برهان. رجوع شود به ۲.۳ مرجع [۱۷]. □

لم ۱۰.۴.۱ هر مدول آرتینی دارای نمایش ثانویه است.

برهان. رجوع شود به ۵.۲ مرجع [۱۷]. □

لم ۱۱.۴.۱ (اولین قضیهٔ یکتایی) فرض کنیم M یک R- مدول نمایش پذیر و $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول R باشد. مجموعهٔ ایده‌آل‌های اول $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ مستقل از نمایش ثانویه مینیمال می‌باشد و فقط به M بستگی دارد. به طور دقیق روابط زیر برای ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ هم ارزند:

۱) $\mathfrak{p}$ یکی از $\mathfrak{p}_i$ ها است.

۲) M دارای مدول خارج قسمتی $\mathfrak{p}$- ثانویه است.

۳) M دارای مدول خارج قسمت Q است، به طوریکه $\mathfrak{p} = \sqrt{Ann_R(Q)}$.

۴) M دارای مدول خارج قسمت Q است، به طوریکه $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول مینیمال $Ann_R(Q)$ می‌باشد.

برهان. رجوع شود به صفحهٔ ۲۷ مرجع [۱۷]. □