دانشگاه سیستان و بلوچستان
تحصیلات تکمیلی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

نامساوی‌های نرمی عملگری از نوع مینکوفسکی

استاد راهنما:
دکتر رحمت الله لشکری پور

تحقیق و نگارش:
ملیحه فرضی هارمی

بهمن ماه ۸۹

چکیده

در این پایان‌نامه، نامساوی‌های نرمی عملگری از نوع مینکوفسکی را بیان می‌کنیم. هدف ما ساختن نامساوی‌های نرمی عملگری جدید است، که نامساوی‌های نرمی از نوع مینکوفسکی را برای n–تایی از عملگرها تعمیم دهند. تجزیه و تحلیل ما براساس نتایج جدیدی از تحدب و تقعر توابع و هم‌چنین برخی از نامساوی‌های نرمی عملگری می‌باشد.

فهرست مندرجات

پیشگفتار

نامساوی‌ها مباحثی از آنالیز می‌باشند، که از دیرباز مورد توجه ریاضیدانان بوده است. در این میان نامساوی مینکوفسکی از توجه ویژه‌ای برخوردار است و در اثبات بسیاری از نامساوی‌های دیگر از آن استفاده می‌شود. این نامساوی برای اعداد حقیقی، نخستین بار توسط هرمان مینکوفسکی [۱] در سال ۱۸۸۵ کشف و به‌وسیله ماهلر [۲] توسیع داده شد. پس از آن توسط یانگ [۳]، زیگموند [۴] و بلمن [۵] در اثبات نامساوی‌های دیگر مورد استفاده قرار گرفت. این نامساوی به روش‌های گوناگون قابل توسیع می‌باشد و نامساوی‌های جدید تعمیم یافته نیز نامساوی مینکوفسکی نامیده می‌شوند. نامساوی‌های نرمی عملگری از نوع مینکوفسکی برای نرم‌های به‌طور یکانی پایا معرفی می‌شوند، که توسط هایی [۶] و ژان [۷] [۱۴] اثبات شده‌اند. در این پایان‌نامه این نامساوی‌ها و هم‌چنین توسیع نامساوی‌های نرمی عملگری از نوع مینکوفسکی برای n—تایی از عملگرها، که در کارهای شبراوی [۸] و البداوی [۹] آمده را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

ابتدا در فصل اول تعاریف و قضایای مورد نیاز را بیان می‌کنیم. سپس در فصل دوم به آشنایی بیشتر با نامساوی مینکوفسکی، و معرفی نگاشت‌های وابسته به آن می‌پردازیم. پس از آن در فصل سوم یک نمونه نامساوی مینکوفسکی برای شاتن p—نرم‌ها، از مرجع [۲۲] ارائه و آن را تعمیم داده‌ایم. در فصل چهارم پس از اثبات نامساوی‌های مهم مورد نیاز به بیان نامساوی‌های نرمی برای توابع یکنوا عملگری و کاربردهای آن‌ها می‌پردازیم و زمینه را برای بیان و اثبات نامساوی‌های نرمی از نوع مینکوفسکی آماده می‌کنیم. در نهایت، در فصل پنجم این نامساوی‌ها را به n—تایی از عملگرها تعمیم می‌دهیم.

---

[۱] Hermann Minkowski

[۲] Mahler

[۳] Young

[۴] Zygmund

[۵] Bellman

[۶] Hiai

[۷] Zhan

[۸] Shebrawi

[۹] Albadawi

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل تعاریف و قضایای اساسی جبرخطی و آنالیز را که مورد نیاز می‌باشند، بیان می‌نماییم. ابتدا در بخش اول عملگرهای خطی را تعریف می‌کنیم. سپس به بیان لم‌ها و قضایای مربوط به آن‌ها می‌پردازیم. هم‌چنین مقادیر ویژه و تکین یک عملگر را معرفی می‌نماییم. آن‌گاه در بخش دوم پس از تعریف نرم‌های به‌طور یکانی پایا، به معرفی انواع خاصی از این‌گونه نرم‌ها و خواص آن‌ها خواهیم پرداخت. سپس در بخش سوم توابع محدب، مقعر و یکنوا عملگری را تعریف و خواص آن‌ها را بیان می‌کنیم. در بخش چهارم پس از معرفی مقایسه‌پذیری و مقایسه‌پذیری ضعیف، رابطهٔ بین آن‌ها و نامساوی‌های نرمی از نوع به‌طور یکانی پایا را بیان خواهیم کرد. در نهایت در بخش پنجم نامساوی‌های معروف و قضایای مهم مورد نیاز را ارائه داده‌ایم.

۱−۱ فضاهای هیلبرت و عملگرها

تعریف ۱.۱.۱: فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان $\mathcal{F}$ اعداد حقیقی یا مختلط باشد. نگاشت

$$\langle .,. \rangle \ : \ X \times X \ \to \mathcal{F}$$

را ضرب داخلی گوییم، هرگاه

(۱) به ازای هر $x \in X$، $\langle x,x \rangle \geq 0$ و $\langle x,x \rangle = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

(۲) به ازای هر $x_1, x_2, y \in X$، $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$.

(۳) به ازای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathcal{F}$، $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.

(۴) به ازای هر $x, y \in X$، $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$ ($\overline{\langle x,y \rangle}$ مزدوج مختلط $\langle x,y \rangle$ است).

تعریف ۲.۱.۱: به هر فضای برداری دارای ضرب داخلی، فضای ضرب داخلی گویند.

تعریف ۳.۱.۱: فضای ضرب داخلی H را فضای هیلبرت گویند، هرگاه نسبت به نرم تعریف شده توسط ضرب داخلی، $||x|| = \langle x,x \rangle^{1/2}$، کامل باشد.

تعریف ۴.۱.۱: اگر H و K فضاهای برداری باشند، نگاشت $T : H \to K$ یک عملگر نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $h_۱, h_۲ \in H$ و $\lambda \in \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ میدان اسکالرهاست) داشته باشیم:

$$T(\lambda h_۱ + h_۲) = \lambda T(h_۱) + T(h_۲).$$

مجموعه تمام عملگرهای خطی و کراندار از فضای برداری H به فضای برداری K را با $B(H, K)$ نمایش می‌دهیم. اگر $H = K$، آن‌گاه $B(H, H)$ را با $B(H)$ نمایش می‌دهیم.

(۱) فضای K^n با ضرب داخلی $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{j=۱}^{n} x(j)\overline{y(j)}$ برای هر $x, y \in K^n$ یک فضای هیلبرت می‌باشد، که K میدان اعداد حقیقی یا مختلط می‌باشد.

(۲) فضای $l^۲$ با ضرب داخلی $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{j=۱}^{\infty} x(j)\overline{y(j)}$ برای هر $x, y \in l^۲$ یک فضای هیلبرت می‌باشد.

(۳) فضای $L^۲(T)$ با ضرب داخلی $\langle x, y\rangle = \int\limits_{T} x\,\overline{y}\,d\mu$، که T یک فضای اندازه با اندازه μ است، یک فضای هیلبرت می‌باشد.

تعریف ۵.۱.۱: نرم عملگر A، $||A||$، در فضای هیلبرت H به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$||A|| = \sup_{||x||=۱} ||Ax|| = \sup_{||x||=||y||=۱} |\langle y, Ax\rangle| \ .$$

تعریف ۶.۱.۱: نرم عملگر خطی T را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} ||T|| &= sup\ \{||Th|| : h \in H,\ \ ||h|| \leq ۱\} \\ &= sup\ \{||Th|| : ||h|| = ۱\} \\ &= sup\ \{\tfrac{||Th||}{||h||} : h \neq ۰\} \\ &= inf\ \{c > ۰ : ||Th|| \leq c||h||,\ \ h \in H\}. \end{aligned}$$

تعریف ۷.۱.۱: اگر $A \in B(H, K)$، آن‌گاه عملگر منحصربفرد $B \in B(K, H)$، که در تساوی $\langle Ah, k\rangle = \langle h, Bk\rangle$ صدق می‌کند، الحاق A نامیده می‌شود و به‌صورت $B = A^*$ نمایش می‌دهیم. در حقیقت برای هر $h \in H$ و $k \in K$ داریم

$$\langle Ah, k\rangle = \langle h, A^*k\rangle.$$

گزاره ۸.۱.۱: اگر H یک فضای هیلبرت و $T \in B(H)$ باشد، آن‌گاه

$$\|T\| = \|T^*\| = \|T^*T\|^{\frac{1}{2}}.$$

برهان: به [۱۲] مراجعه شود.

تعریف ۹.۱.۱: اگر $A = A^*$، عملگر $A \in B(H)$ را خود الحاق یا هرمیتی می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۱.۱: ماتریس $A \in M_n$ را هرمیتی گوییم، اگر با مزدوج ترانهاده خود برابر باشد، یعنی

$$A = \bar{A}^t.$$

به‌طور مثال ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

با مزدوج ترانهاده خود برابر است، بنابراین یک ماتریس هرمیتی می‌باشد.

مجموعه ماتریس‌های هرمیتی درM_n را با H_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۱.۱: اگر $A^*A = AA^*$، عملگر(ماتریس) A را نرمال می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۱.۱: اگر $A^*A = I = AA^*$، عملگر(ماتریس) A را یکانی می‌نامیم.

قضیه ۱۳.۱.۱: اگر $A \in B(H)$ یک عملگر هرمیتی باشد، آن‌گاه

$$||A|| = sup\ \{|\langle Ah, h\rangle| :\ h \in H,\ \ ||h|| = 1\}.$$

برهان: به [۱۲] مراجعه شود.

تعریف ۱۴.۱.۱: اگر $||A|| \leq 1$، عملگر(ماتریس) A را انقباض می‌نامیم.

تعریف ۱۵.۱.۱: عملگر هرمیتی A را نیمه معین مثبت گوییم، اگر برای هر $h \in H$، $\langle Ah, h\rangle \geq 0$ و با نماد $A \geq 0$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۶: ماتریس $A \in M_n$ را نیمه معین مثبت گوییم، هرگاه برای هر $x \in C^n$ داشته باشیم:

$$x^*Ax \geq 0.$$

این معادل است با

$$\langle Ax, x\rangle \geq 0.$$

برای هر $A \in M_n$ و $x, y \in C^n$، داریم

$$4\langle Ax\ ,\ y\rangle = \sum_{k=0}^{3} i^k \langle A(x+i^k y)\ ,\ x+i^k y\rangle, \tag{۱ − ۱}$$

$$4\langle x\ ,\ Ay\rangle = \sum_{k=0}^{3} i^k \langle x+i^k y\ ,\ A(x+i^k y)\rangle, \tag{۱ − ۲}$$

که $i = \sqrt{-1}$.

بنابراین برای هر ماتریس نیمه معین مثبت A داریم

$$\langle Ax\ ,\ x\rangle = \langle x\ ,\ Ax\rangle. \tag{۱ − ۳}$$

تساوی‌های (۱ − ۱)، (۱ − ۲) و (۱ − ۳) نتیجه می‌دهند، که هر ماتریس نیمه معین مثبت لزوماً هرمیتی است.

برای ماتریس‌های هرمیتی A و B می‌نویسیم $A \leq B$ یا $B \geq A$، به این مفهوم که $B - A$ نیمه معین مثبت است. به‌ویژه $A \geq 0$، یعنی A نیمه معین مثبت است. این مطلب را تحت عنوان ترتیب جزئی لونر[1] نیز می‌شناسیم.

تعریف ۱.۱.۱۷: اگر برای هر $0 \neq h \in H$، $\langle Ah, h\rangle > 0$، A معین مثبت یا مثبت سره نامیده می‌شود و به‌صورت $A > 0$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱۸: اگر $A \geq 0$، آن‌گاه $A^{\frac{1}{2}}$ ریشه دوم A را نشان می‌دهد، که نیمه معین مثبت و یکتا می‌باشد.

[1] Lowner

تعریف ۱۹.۱.۱: ماتریس $A \in M_n$ را معین مثبت گوییم، هرگاه برای هر $x \in C^n$ داشته باشیم:

$$x^* A x > 0.$$

مجموعهٔ تمام ماتریس‌های نیمه معین مثبت و مجموعه تمام ماتریس‌های معین مثبت در M_n را به ترتیب با S_n و P_n نشان می‌دهیم.

قضیه ۲۰.۱.۱: ماتریس معکوس‌پذیر $A \in M_n$ مثبت است اگرو تنها اگر A^{-1} مثبت باشد.

برهان: به [۱۲] مراجعه شود.

تعریف ۲۱.۱.۱: نرم طیفی A را با $\|A\|_\infty$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|A\|_\infty = Sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1, x \in C^n\}.$$

تعریف ۲۲.۱.۱: نرم طیفی خاصیت زیرضربی دارد، یعنی

$$\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty.$$

برهان: به [۱۲] مراجعه شود.

تعریف ۲۳.۱.۱: مجموع عناصر روی قطر یک ماتریس را اثر یک ماتریس گویند، یعنی

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

قضیه ۲۴.۱.۱: برای ماتریس $A \in M_n$ گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) A هرمیتی است.

(۲) برای هر $x \in C^n$، $x^* Ax \in R$.

(۳) $A^2 = A^* A$.

(۴) $tr\, A^2 = tr\,(A^* A)$.

برهان: به [۲۶] مراجعه شود.

تعریف ۲۵.۱.۱: عدد مختلط λ یک مقدار ویژه ماتریس مربعی A است، اگر یک بردار ناصفر u در C^n وجود داشته باشد، به‌طوری‌که

$$Au = \lambda u.$$

u را یک بردار ویژه متناظر با λ می‌نامیم. مجموعه مقادیر ویژه $A \in M_n$ را طیف A می‌نامیم و با $\sigma(A)$ نمایش می‌دهیم. یک مقدار ویژه A ریشه چند جمله‌ای مشخصه است. در حقیقت λ یک مقدار ویژه A است اگر و تنها اگر

$$det(A - \lambda I) \equiv P_A(\lambda) = 0,$$

که $P_A(\lambda)$ چند جمله‌ای مشخصه A می‌باشد.

ماکزیمم قدر مطلق همه مقادیر ویژه A شعاع طیفی A نامیده می‌شود و با $\rho(A)$ نمایش می‌دهیم:

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

مجموعه مقادیر ویژه λ_1،λ_2،...،λ_n از $A \in H_n$ را که به‌صورت نزولی مرتب شده‌اند، با $\lambda(A) = (\lambda_1(A), \lambda_2(A), ..., \lambda_n(A))$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۲۶.۱.۱: برای ماتریس‌های $A, B, C \in M_n$ گزاره‌های زیر برقرارند:

(۱) اثر ماتریس A برابر با مجموع مقادیر ویژه A می‌باشد.

(۲) اثر حاصل‌ضرب چند ماتریس دارای خاصیت دوری است، به این معنی که

$$tr(ABC) = tr(CAB) = tr(BCA).$$

رابطهٔ $\lambda(B) \leq \lambda(A)$ زمانی برقرار است که برای تمام $j = 1, 2, ..., n$ داشته باشیم $\lambda_j(B) \leq \lambda_j(A)$. عکس مطلب نیز برقرار است.

برهان: به [۲۶] مراجعه شود.

لم ۲۷.۱.۱(اصل یکنوایی ویل[۱]): فرض کنید $A, B \in H_n$. اگر $A \geq B$، آن‌گاه برای هر $j = ۱, ۲, ..., n$

$$\lambda_j(A) \geq \lambda_j(B).$$

برهان: به [۲۵] مراجعه شود.

قضیه ۲۸.۱.۱: فرض کنید f تابعی صعودی روی بازه I باشد و $A, B \in H_n(I)$، اگر $\lambda(B) \leq \lambda(A)$، آن‌گاه

$$\lambda(f(B)) \leq \lambda(f(A)).$$

برهان: به [٦] مراجعه شود.

لم ۲۹.۱.۱: اگر $A \in H_n$ باشد، آن‌گاه برای $۱ \leq k \leq n$ داریم

$$\sum_{j=۱}^{k} \lambda_j(A) = \max \sum_{j=۱}^{k} < Ax_j, x_j >,$$

که ماکزیمم روی kتائی‌های متعامد یکه $(x_۱, ..., x_n) \in C^n$ گرفته می‌شود.

برهان: به [۲۵] مراجعه شود.

قضیه ۳۰.۱.۱: فرض کنید H و K فضاهای برداری باشند و $T : H \to K$ یک عملگر خطی باشد. اگر $\overline{T(ballH)}$ یک زیر مجموعه فشرده از K باشد، که در آن $ballH = \{h \in H : ||h|| = ۱\}$، آن‌گاه A یک عملگر فشرده نامیده می‌شود.

تعریف ۳۱.۱.۱: اگر $T \in B(H)$، آن‌گاه طیف عملگر T مجموعهٔ همه λ هایی است که $T - \lambda I$ معکوس‌پذیر نباشد:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathcal{F} : \ T - \lambda I \quad \text{معکوس پذیر نباشد} \},$$

که $\mathcal{F}$ میدان اسکالر فضای H می‌باشد.

قضیه ۳۲.۱.۱: اگر $T \in B(H)$، آن‌گاه

$$\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} : \ \lambda \in \sigma(T)\}.$$

---

[۱] Wyle

برهان: T معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر T^* معکوس‌پذیر باشد و $T-\lambda$ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $(T-\lambda)^*$ معکوس‌پذیر باشد. لذا $T-\lambda$ معکوس‌ناپذیر است اگر و تنها اگر $T^*-\bar{\lambda}$ معکوس‌ناپذیر باشد. بنابراین

$$\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(T^*). \ \square$$

لذا با توجه به قضیه بالا قضیه زیر را داریم.

قضیه ۳۳.۱.۱: اگر T هرمیتی باشد، آن‌گاه $\sigma(T) \subseteq R$.

برهان: به [۱۲] مراجعه شود.

قضیه ۳۴.۱.۱: اگر $T \in B(H)$ هرمیتی باشد، آن‌گاه

$$\sigma(T) \subseteq [-||T||, ||T||].$$

برهان: به [۱۲] مراجعه شود.

با توجه به قضایای بالا واضح است که عملگرهای هرمیتی طیف خود را روی محور حقیقی اختیار می‌کنند.

لم ۳۵.۱.۱: مقادیر ویژه ماتریس A مثبت هستند اگر و فقط اگر A معین مثبت باشد. هم‌چنین مقادیر ویژه ماتریس A نامنفی هستند اگر و فقط اگر A نیمه معین مثبت باشد.

برهان: به [۱۲] مراجعه شود.

لم ۳۶.۱.۱: اگر $A \in M_n$ نیمه معین مثبت باشد، آن‌گاه برای $k = ۱, ۲, \ldots$، A^k نیمه معین مثبت است. هم‌چنین اگر $A \in M_n$ معین مثبت باشد، آن‌گاه A^k برای $k = ۱, ۲, \ldots$ معین مثبت است.

برهان: اگر λ مقدار ویژه A باشد، آن‌گاه λ^k مقدار ویژه A^k است. حال اگر A نیمه معین مثبت باشد، مقادیر ویژه آن، λها، نامنفی هستند. در نتیجه λ^k نامنفی است. لذا A^k نیمه معین مثبت است.

برای حالتی که A مثبت است برهان مشابه می‌باشد.$\square$

لم ۳۷.۱.۱: به ازای هر $A \in M_n$، داریم $A^*A \geq ۰$.

برهان: بنابه ۳۵.۱.۱، کافی است نشان دهید مقادیر ویژه A^*A برای هر A نامنفی است. فرض کنید A دلخواه و λ یک مقدار ویژه برای A و x بردار ویژه متناظر با λ باشد. در این صورت $\bar{\lambda}$ مقدار ویژه A^* است. داریم

$$A^*Ax = A^*\lambda x = \lambda A^*x = \lambda\bar{\lambda}x = |\lambda|^2 x.$$

بنابراین $|\lambda|^2$ مقدار ویژه A^*A است و چون $|\lambda|^2$ نامنفی است، لذا A^*A نیمه معین مثبت است. به همین روش می‌توان نشان داد AA^* نیمه معین مثبت است. $\square$

برای هر عملگر یا ماتریس A، A^*A همیشه نامنفی است و $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$. مقادیر تکین A همان مقادیر ویژه $|A|$ می‌باشند و برای $j = 1, 2, ..., n$ با $s_j(A)$ نشان می‌دهیم، که در یک ترتیب غیرصعودی به تعداد تکرارشان(لزوما متناهی) مرتب شده‌اند:

$$s_1(A) \geq s_2(A) \geq ... \geq s_n(A).$$

مجموعه مقادیر تکین A را با $s(A)$ نشان می‌دهند، به این معنی که

$$s(A) = (s_1(A), s_2(A), ..., s_n(A)).$$

در زیر برخی از خواص مقادیر تکین را از مرجع [٦] بیان می‌کنیم.

- برای ماتریس $A \in M_n$ و یکانی‌های $U, V \in M_n$ داریم

(۱) $s_j(UAV) = s_j(A)$؛

(۲) $s_j(A) = s_j(A^*)$؛

(۳) $s_j^2(A) = \lambda_j(A^*A)$.

- AB و BA مقادیر ویژه یکسانی دارند، اما می‌توانند مقادیر تکین یکسانی نداشته باشند، یعنی

$$\forall\, A, B \in M_n :\ \lambda_j(AB) = \lambda_j(BA), \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

- در حالت کلی مقادیر ویژه دارای خاصیت پایایی دوری می‌باشند، یعنی

$$\forall\, A, B, C \in M_n :\ \lambda(ABC) = \lambda(BCA) = \lambda(CAB).$$

• اگر A هرمیتی باشد، آن‌گاه $\lambda(A)$ حقیقی است و

$$s_j(A) = |\lambda_j(A)|, \qquad j = ۱, ۲, ..., n.$$

تعریف ۳۸.۱.۱(اصل مینیمم—ماکزیمم): فرض کنید $A \in B(H)$ فشرده و نامنفی و $\lambda_۱(A), ..., \lambda_n(A)$ مقادیر ویژه A باشند. آن‌گاه برای هر عدد صحیح مثبت n داریم

$$\lambda_n(A) = \min_{M} \left(\max_{||x||=۱} \langle Ax, x\rangle \right),$$

که M زیرفضایی از H با بعد $n-۱$ است و $x \perp M$.

تعریف ۳۹.۱.۱: عملگر $T \in B(H)$ را طول—پای جزئی گوییم، هر گاه $||Tx|| = ||x||$، برای هر $x \in (kerT)^{\perp}$.

تعریف ۴۰.۱.۱: هر عملگر $A \in B(H)$، یک تجزیه قطبی $A = UP$ دارد، که P عملگرمثبت $|A| = (A^*A)^{\frac{۱}{۲}}$ و U یک طول—پای جزئی است.

هرگاه فضای هیلبرت متناهی البعد باشد یا عملگر A نرمال باشد، U می‌تواند یکانی انتخاب شود.

تذکر ۴۱.۱.۱: فرض کنید $x, y \in R$. آن‌گاه $max\{x,y\}$ را با $x \vee y$ و $min\{x,y\}$ را با $x \wedge y$ نشان می‌دهیم.

اگر $x, y \in R^n$، آن‌گاه $x \vee y = (x_۱ \vee y_۱, ..., x_n \vee y_n)$ و $x \wedge y = (x_۱ \wedge y_۱, ..., x_n \wedge y_n)$.

تذکر ۴۲.۱.۱: سوپریمم ماتریس‌های نیمه معین مثبت A و B را با $A \vee B$ و اینفیمم آن‌ها را با $A \wedge B$ نشان می‌دهیم.

لم ۴۳.۱.۱: فرض کنید A و B ماتریس‌های مثبت معکوس‌پذیر باشند. آن‌گاه

$$A \wedge B = \lim_{k\to\infty} \left\{ \frac{A^{-k} + B^{-k}}{۲} \right\}^{\frac{-۱}{k}} \quad و \quad A \vee B = \lim_{k\to\infty} \left\{ \frac{A^{k} + B^{k}}{۲} \right\}^{\frac{۱}{k}}.$$

برهان: به [۳] مراجعه شود.

۱—۲ نرم‌های به‌طور یکانی پایا

تعریف ۱.۲.۱: مجموعه $N \subset R$ یک ایده‌ال جبری(دوطرفه) از حلقه R است، اگر خواص زیر را داشته باشد:

(۱) برای هر دو عملگر A و B از N داشته باشیم: $A^* + B \in N$.

(۲) برای هر دو عملگر A و B از N داشته باشیم: $AB, BA \in N$.

(۳) $N \neq 0$ و $N \neq R$.

اگر عملگر A متعلق به ایده‌ال دوطرفه N از حلقه R باشد، آن‌گاه عملگر A^* نیز متعلق به این ایده‌ال است. به عبارت دیگر، هر ایده‌ال دوطرفه خودالحاق می‌باشد.

تعریف ۲.۲.۱: تابعک $|.|_s$ تعریف شده روی یک ایده‌ال دوطرفه $\Im$ از حلقه R یک نرم متقارن است، اگر خواص نرم را داشته باشد:

(۱) $|A|_s > 0 \quad (A \in \Im\,,\ A \neq 0)$؛

(۲) $|\lambda A|_s = |\lambda|\ |A|_s \quad (A \in \Im\,,\ \lambda \in C)$؛

(۳) $|A+B|_s \leq |A|_s + |B|_s \quad (A, B \in \Im)$؛

و علاوه بر آن دارای خواص زیر نیز باشد:

(۴) $|PAQ|_s \leq ||P||\ |A|_s\, ||Q|| \quad (P, Q \in R\,,\ A \in \Im)$؛

(۵) برای هر عملگر یک بعدی A داشته باشیم: $|A|_s = ||A|| \equiv s_1(A)$.

تعریف ۳.۲.۱: نرم ν روی M_n متقارن گفته می‌شود، اگر برای هر $A, B, C \in M_n$ داشته باشیم

$$\nu(BAC) \leq ||B||\, \nu(A)\, ||C||.$$

تعریف ۴.۲.۱: نرم $|||.|||$ روی M_n به‌طور یکانی پایاست، هرگاه علاوه بر دارا بودن خواص نرم، برای هر عملگر A و هر دو عملگر یکانی U و V، در خاصیت $|||UAV||| = |||A|||$ صدق کند. اگر فضا نامتناهی‌البعد باشد، نرم‌های به‌طور یکانی پایا روی ایده‌ال نرمی متناظر با $|||.|||$(مشمول در ایده‌ال عملگرهای فشرده) و اگر

فضا با بعد متناهی باشد، روی تمام عملگرها تعریف می‌شود.

مثال ۱.۲.۵: فرض کنید $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$، که $\gamma_n \leq ... \leq \gamma_2 \leq \gamma_1$ و $0 < \gamma_1$. آن‌گاه $||A||_\gamma = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j s_j(A)$ یک نرم به‌طور یکانی پایاست.

تعریف ۱.۲.۶: یک نرم روی M_n نرمال شده گفته می‌شود، اگر $||diag(1, 0, 0, ..., 0)|| = 1$.

تعریف ۱.۲.۷: فرض کنید S_n فضای تمام n تایی‌ها از اعداد حقیقی به صورت $u = (u_1, ..., u_n)$ باشد. تابع حقیقی مقدار $\phi(u) = \phi(u_1, ..., u_n)$ روی S_n یک تابع مقیاس نامیده می‌شود، اگر شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) $\phi(u_1, ..., u_n) > 0$ (به‌جز $u_1 = ... = u_n = 0$)؛

(۲) برای هر $c \geq 0$، $\phi(cu_1, ..., cu_n) = c\,\phi(u_1, ..., u_n)$؛

(۳) $\phi(u_1 + v_1, ..., u_n + v_n) \leq \phi(u_1, ..., u_n) + \phi(v_1, ..., v_n)$.

ϕ تابع مقیاس متقارن است، اگر علاوه بر شرایط فوق شرط زیر نیز برقرار باشد:

(۴) $\phi(u_1, ..., u_n) = \phi(\varepsilon_1 u_{\rho(1)}, ..., \varepsilon_n u_{\rho(n)})$، که در آن $\varepsilon_i = \pm 1$ و $\rho(1), ..., \rho(n)$ جایگشت‌هایی روی اعداد $1, ..., n$ می‌باشند.

علاوه بر این ϕ را همیشه نرمال شده در نظر می‌گیریم. بنابراین $\phi(1, 0, ..., 0) = 1$.

مثال ۱.۲.۸: اگر $x = (x_1, ..., x_n)$، به‌طوری‌که $|x_1| \geq |x_2| \geq ... \geq |x_n|$، آن‌گاه برای هر $k = 1, 2, ..., n$ تابع $\phi_k(x) = \sum_{j=1}^{k} |x_j|$ یک تابع مقیاس متقارن است.

قضیه ۱.۲.۹ (نامساوی هولدر[1] برای توابع مقیاس متقارن): فرض کنید p و q اعداد حقیقی باشند، که $p > 1$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. اگر $x, y \in R^n$، برای هر تابع مقیاس متقارن ϕ داریم

$$\phi(|x.y|) \leq [\phi(|x|^p)]^{\frac{1}{p}} \ [\phi(|y|^q)]^{\frac{1}{q}}.$$

در حالت خاص اگر $p = 2$، آن‌گاه نامساوی کوشی شوارتز[2] برای توابع مقیاس متقارن به‌دست می‌آید.

---

[1] Holder

[2] Cauchy-Schwars

برهان: به [۲۵] مراجعه شود.

قضیه ۱.۲.۱۰: فرض کنید ϕ تابع مقیاس متقارن و $p > 1$، آن‌گاه برای هر $x, y \in R^n$ داریم

$$[\phi(|x+y|^p)]^{\frac{1}{p}} \leq [\phi(|x|^p)]^{\frac{1}{p}} + [\phi(|y|^p)]^{\frac{1}{p}}. \tag{۱ − ۴}$$

برهان: اگر $p = 1$، نامساوی (۱−۴) با استفاده از نامساوی مثلثی برای تابع قدر مطلق روی R^n و نرم ϕ نتیجه می‌شود.

فرض کنید $p > 1$. کافی است قضیه را برای حالت $x, y \geq 0$ اثبات کنید. بنویسید

$$(x+y)^p = x(x+y)^{p-1} + y(x+y)^{p-1}.$$

با استفاده از نامساوی مثلثی برای ϕ و قضیه ۱.۲.۹ داریم

$$\begin{aligned}
\phi((x+y)^p) &= \phi(x(x+y)^{p-1} + y(x+y)^{p-1}) \\
&\leq \phi(x(x+y)^{p-1}) + \phi(y(x+y)^{p-1}) \\
&\leq [\phi(x^p)]^{\frac{1}{p}}[\phi((x+y)^{q(p-1)})]^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + [\phi(y^p)]^{\frac{1}{p}}[\phi((x+y)^{q(p-1)})]^{\frac{1}{q}} \\
&= \{[\phi(x^p)]^{\frac{1}{p}} + [\phi(y^p)]^{\frac{1}{p}}\}[\phi((x+y)^p)]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

از آن‌جا که $q(p-1) = p$، با تقسیم طرفین نامساوی فوق بر $[\phi((x+y)^p)]^{\frac{1}{q}}$ به نتیجه مطلوب می‌رسیم.□

قضیه ۱.۲.۱۱: برای هر تابع مقیاس متقارن ϕ و $0 < p < 1$ داریم

$$[\phi(|x+y|^p)]^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}-1}\, [\phi(|x|^p)]^{\frac{1}{p}} + [\phi(|y|^p)]^{\frac{1}{p}}. \tag{۱ − ۵}$$

برهان: به [۶] مراجعه شود.

لم ۱.۲.۱۲: فرض کنید $A, B \in B(H)$ دو عملگر باشند. آن‌گاه برای $j = 1, ..., n$ داریم

$$s_j(AB) \leq ||B||s_j(A),$$

$$s_j(AB) \leq ||A||s_j(B).$$