بسم الله الرحمن الرحيم

١٤١٤

دانشگاه مازندران

«دانشکده علوم پایه»

موضوع :

ابر فضاهای برداری فازی

« جهت اخذ کارشناسی ارشد »

رشته ریاضی محض

استاد راهنما :

دکتر رضا عامری

استاد مشاور :

دکتر قاسم علیزاده افروزی

تحقیق و تدوین :

مازیار سالاریان

بهار ۱۳۸۱

«باسمه تعالی»

دانشگاه مازندران
معاونت آموزشی
تحصیلات تکمیلی

«ارزشیابی پایان‌نامه در جلسه دفاعیه»

دانشکده علوم پایه

نام و نام‌خانوادگی : مازیار سالاریان شمارهٔ دانشجوئی : ۷۸۵۲۴۷۸۰۹

رشته تحصیلی : ریاضی محض مقطع : کارشناسی‌ارشد سال تحصیلی : ۸۱-۸۰

عنوان پایان‌نامه : ابر فضاهای برداری فازی

تاریخ دفاع : یکشنبه ۸۱/۴/۹

نمره پایان‌نامه (به عدد) : ۱۸/۷

نمره پایان‌نامه (به حروف) : هیجده و هفت دهم

هیأت داوران

استاد راهنما : دکتر رضا عامری امضاء

استاد مشاور : دکتر قاسم علیزاده‌افروزی امضاء

استاد مدعو : دکتر دوستعلی مژده امضاء

استاد مدعو : دکتر علی ایرانمنش امضاء

نماینده کمیته تحصیلات تکمیلی : آقای دکتر حسن حسین‌زاده امضاء

تقدیر و تشکر

اول دفتر به نام ایزد دانا

حال که در سایه االطاف بیکران ایــزدی ، بـا حمـایت و پشـتگرمی خـانواده عزیـزم و بـا زحمـات و راهنمائیهای اساتید محترم گروه ریاضی ، **جناب آقای دکتر رضا عامری** بعنــوان اسـتاد راهنمـا و **جناب آقای دکتر قاسم علیزاده افروزی** بعنوان استاد مشاور ، توانسته ام این دوره را با موفقیـت به اتمام برسانم ، خود را ملزم به تشکر و سپاســگزاری از ایـن عزیـزان نمـوده و آرزوی کامیابیـهای بیشتر را در تمام مراحل زندگی ، برایشان دارم .

در پایان از خانم سالاریان و خانم تقوی که اینجانب را در تدوین و تایپ پایان نامه یاری رسانده انـد تقدیر و تشکر می نمایم .

مازیار سالاریان

بهار ۱۳۸۱

All People Are Great

Some people are born great ;

Some achieve greatness ;

Some have greatness trusted upon them .

W. Shakespeare

تقدیم به :

روح پدر بزرگوار ،

مادر مهربان ،

همسر فداکار ،

فرزند دلبندم رضا ،

و استاد گرامی ام جناب آقای دکتر رضا عامری

چکیده :

این رساله در سه فصل تنظیم گردیده است .در ***فصل اول*** برخی تعاریف و قضایای مفدماتی مربوط به فضاهای برداری و نظریه مجموعه های فازی را به اختصار ارائه می کنیم .

در ***فصل دوم*** فضاهای برداری فازی مورد بحث قرار می گیرد . در این فصل ابتدا مفهوم فضای برداری فازی را تعریف کرده و سپس با توجه به این مفهوم ، مفاهیمی چون استقلال خطی فازی ، پایه ی فازی ، بعد یک فضای برداری فازی را معرفی می کنیم به ویژه نشان می دهیم تحت چه شرایطی یک فضای برداری فازی دارای یک پایه فازی است سرانجام فضاهای خارج قسمتی فازی را مورد بررسی قرار می دهیم .

در ***فصل سوم*** به معرفی و بررسی خواص اساسی یک ابرفضای برداری از دیدگاه تالینی می پردازیم برای این منظور ابتدا تعریف یک ابر فضای برداری را ارائه می کنیم و به بررسی رابطه بین ابرفضاهای توزیع پذیر چپ یا راست (قوی)می پردازیم . به خصوص نشان می دهیم هر ابرفضای برداری که توزیع پذیر راست قوی باشد ، توزیع پذیر چپ قوی نیز خواهد بود . در ادامه با ذکر چند مثال ضمن تشریح مطالب این فصل نشان می دهیم که یک ابرفضای برداری می تواند چپ قوی باشد ولی راست قوی نباشد . در خاتمه مفهوم یک ابرفضای برداری فازی را ارائه کرده و برخی خواص اساسی آن را بدست می آوریم .

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فصل اول : پیشنیازها ۱

۱-۱-مقدمه ۱

۱-۲-تعاریف و قضایای مقدماتی ۱

۱-۳-برخی تعاریف و قضایای مربوط به نظریه زیر مجموعه های فازی ۳

۱-٤-ابر ساختارها ٦

فصل دوم : فضاهای برداری فازی ۹

۲-۱- مقدمه ۹

۲-۲- فضای برداری فازی ۱۰

۲-۳- استقلال خطی فازی ۱۳

۲-٤-پایه های فازی ۱۸

۲-٥-بعد فضای برداری فازی ۳۰

۲-٦-یکریختی و بعد فضای خارج قسمتی فازی ٥۱

۲-۷-یکریختی و زیر فضاهای فازی ٥٤

۲-۸-بعد فضاهای خارج قسمتی فازی ٥۹

فصل سوم : ابر فضاهای برداری و برداری فازی ٦٥

۳-۱-مقدمه ٦٥

۳-۲ ابر فضاهای برداری ٦٥

۳-۳ ابر فضاهای برداری فازی ۸۲

فهرست منابع ۸۹

واژه نامه ۹۱

فصل اول

پیشنیازها

۱– ۱ مقدمه

در این فصل بعضی از تعاریف و قضایایی که در فصلهای آینده مورد نیاز است را می آوریم . مطالب این فصل در هر کتاب مقدماتی جبر مجرد و هر کتاب مقدماتی در نظریه مجموعه های فازی موجود است .

۱-۲- تعاریف و قضایای مقدماتی

۱-۲-۱ **تعریف** : فرض کنید H یک مجموعه ناتهی باشد ، مجموعه تمام زیر مجموعه های H را با P(H) نمایش می دهیم . همچنین $P^*(H) = P(H) \setminus \{\phi\}$.

۱-۲-۲ **تعریف** : مجموعه ی ناتهی V را یک فضای برداری روی هیأت F خوانیم اگر V تحت عملی (که با + نشان می دهیم) گروهی آبلی باشد ، و بازای هر $\alpha \in F$ و هر $v \in V$ عنصری (که به صورت αv نوشته می شود) در V وجود داشته باشد به طوری که بازای هر $\alpha, \beta \in F$ و هر $v, w \in V$ داشته باشیم :

$$\alpha(v+w)=\alpha v+\alpha w \qquad \text{(i)}$$

$$(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta w \qquad \text{(ii)}$$

$$\alpha(\beta v)=(\alpha\beta)v \qquad \text{(iii)}$$

(iv) $1v=v$ (که در آن ۱ نمایشگر عنصر یکه ی F تحت عمل ضرب است) .

۱-۲-۳ تعریف : هر گاه V یک فضای برداری روی هیأت F باشد ، و $W\subseteq V$ ، آنگاه W یک زیر فضای V است چنانچه W تحت اعمال V خود فضایی برداری روی F باشد . به عبارت دیگر ، W در صورتی یک زیر فضای V است که $w_1,w_2\in W$ و $\alpha,\beta\in F$ ایجاب کنند که $\alpha w_1+\beta w_2\in W$.

۱-۲-٤ تعریف : یک پایه برای فضای برداری V روی هیأت F ، مجموعه مستقل خطی مانند B است به طوری که فضای V را نیز تولید می کند ، یعنی هر بردار دلخواه از فضای V را می توانیم به صورت ترکیب خطی یکتایی از اعضای B بنویسیم .

تذکر : در جبر خطی مقدماتی نشان داده می شود که هر فضای برداری دارای یک پایه است و عدد اصلی هر دو پایه یکسان هستند . به عدد اصلی هر پایه دلخواه از V ، بعد آن فضای برداری گویند و آن را با نماد $\dim V$ نشان می دهند .

۱-۲-٥ لم : هر گاه V فضایی برداری با بعد متناهی باشد ، و W زیر فضایی از آن فرض شود ، آنگاه W با بعد متناهی است ، $\dim W \le \dim V$ و $\dim V/W = \dim V - \dim W$

۱-۲-٦ نتیجه : هر گاه A و B زیر فضاهایی از فضای برداری V و با بعد متناهی باشند ، آنگاه $A+B$ با بعد متناهی است ، و $\dim(A+B)=\dim(A)+\dim(B)-\dim(A\cap B)$

۱-۲-۷ **لم** : فرض کنید V و W فضاهایی برداری بر هیأت F باشند به طوری که $\dim V < \infty$

در این صورت اگر $T: V \to W$ یک تبدیل خطی باشد ، آنگاه :

$$\dim(V) = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T)$$

۱-۳- برخی تعاریف و قضایای مربوط به نظریه زیر مجموعه های فازی

۱-۳-۱ **تعریف** : فرض کنید A یک مجموعه ناتهی باشد . یک زیر مجموعه فازی از A ، یک تابع $\mu : A \to [o,1]$ است که به هر عنصر A ، یک عدد در بازه $[o,1]$ متناظر می کند .

در این صورت μ را یک زیر مجموعه فازی از A می نامیم مجموعه شامل تمام زیر مجموعه های فازی از A را با نماد $FS(A)$ نشان می دهیم .

۱-۳-۲ **تعریف** : فرض کنید که A یک مجموعه ناتهی و μ یک زیر مجموعه فازی از A باشد .

یک زیر مجموعه تراز μ به صورت $\mu_t = \{ x \in A \mid \mu(x) \geq t \}$ تعریف می شود که در آن $t \in \operatorname{Im}(\mu)$ می باشد و $\operatorname{Im}(\mu) = \{\mu(x) | x \in A\}$.

۱-۳-۳ **تعریف** : فرض کنید μ_1 و μ_2 دو زیر مجموعه فازی روی X باشند ، آنگاه تعاریف زیر را داریم

(i)اجتماع دو زیر مجموعه فازی به صورت زیر تعریف می شود

$$(\mu_1 \cup \mu_2)(x) = \max(\mu_1(x), \mu_2(x))$$

(ii) اشتراک دو زیر مجموعه فازی به صورت زیر تعریف می شود

$$(\mu_1 \cap \mu_2)(x) = \min(\mu_1(x), \mu_2(x))$$

۱-۳-٤ **تعریف**: فرض کنید که μ_1 یک زیر مجموعه فازی روی A_1 و μ_2 یک زیر مجموعه فازی روی A_2 باشد . حال مجموعه فازی $\mu_1 \times \mu_2$ را روی $A_1 \times A_2$ به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$(\mu_1 \times \mu_2)(x_1, x_2) = \min(\mu_1(x_1), \mu_2(x_2))$$

۱-۳-۵ **تعریف** : فرض کنیم که A یک زیر مجموعه ناتهی باشد ، تابع مشخصه A به صورت زیر تعریف می شود :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ o & x \notin A \end{cases}$$

واضح است که χ_A یک زیر مجموعه فازی از A است و $Im(\chi_A) = \{o,1\}$.

۱-۳-۶ **تعریف (اصل گسترش)** : اگر μ یک زیر مجموعه فازی روی A باشد و $f : A \to B$ یک تابع باشد ، آنگاه گسترش μ به B را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$f(\mu)(y) = \begin{cases} \sup\{\mu(x) | x \in f^{-1}(y)\} & f^{-1}(y) \neq \phi \\ o & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

۱-۳-۷ **تعریف** : فرض کنیم که θ یک زیر مجموعه فازی روی B باشد و $f : A \to B$ یک تابع باشد ، آنگاه $f^{-1}(\theta)$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$f^{-1}(\theta)(x) = \theta(f(x)) \qquad \forall x \in A$$

توجه شود که $f^{-1}(\theta) : A \to [o,1]$ می باشد یعنی اینکه $f^{-1}(\theta)$ یک زیر مجموعه فازی روی A است.

۱-۳-۸ **تعریف** : یک مجموعه ی جزئا" مرتب ، مجموعه ای غیر تهی چون L همراه با یک رابطه ی $\leq$ روی $L \times L$ است که رابطه $\leq$ دارای خواص انعکاسی ، تعدی و پاد تقارنی باشد .

۱-۳-۹ **تعریف** : مجموعه ی جزءا" مرتب L را به همراه اعمال دوتایی $\vee$ و $\wedge$ که در آن بازای هر $a, b \in L$ ،

$$a \vee b = \sup\{a, b\}$$

$$a \wedge b = \inf\{a, b\}$$

یک مشبکه گویند . و آن را با نماد $(L,\leq,\vee,\wedge)$ یا به اختصار با نماد L نشان می دهیم .

۱-۳-۱۰ تعریف : یک مشبکه L را ، کامل گویند ، هرگاه بزرگترین کران پائین هر زیر مجموعه ناتهی X از L موجود باشد .

۱-۳-۱۱ مثال : الف – بازه ی $[o,1]$ یک مشبکه کامل است که آن را با $([o,1],\leq,\vee,\wedge)$ نمایش می دهیم که در آن $\leq$ ترتیب معمولی روی اعداد حقیقی است و $a\vee b=\max\{a,b\}$ و $a\wedge b=\min\{a,b\}$.

ب – $(\mathrm{P}(\mathrm{X}),\subseteq,\cup,\cap)$ یک مشبکه کامل است .

ج : $(FS(X),\leq,\cup,\cap)$ یک مشبکه کامل است که به آن مشبکه زیر مجموعه های فازی X گفته می شود.

۱-۳-۱۲ تعریف : فرض کنید X یک مجموعه ی متناهی و $\widetilde{\mathrm{A}}$ زیر مجموعه ی فازی از X باشد.

در این صورت عدد اصلی $\widetilde{\mathrm{A}}$ را که با نماد $\left|\widetilde{\mathrm{A}}\right|$ نشان داده می شود به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\left|\widetilde{\mathrm{A}}\right|=\sum_{x\in \mathrm{X}}\mu_{\widetilde{\mathrm{A}}}(x).$$

همچنین عدد اصلی نسبی $\widetilde{\mathrm{A}}$ را که با نماد $\left\|\widetilde{\mathrm{A}}\right\|$ نشان داده می شود بصورت زیر تعریف می گردد :

$$\left\|\widetilde{\mathrm{A}}\right\|=\frac{\left|\widetilde{\mathrm{A}}\right|}{|X|}$$

۱-۳-۱۳مثال : مجموعه فازی اعداد نزدیک به ۲۵ که به صورت زیر بیان شده را در نظر بگیرید .

$$\widetilde{\mathrm{A}}=\{(23,0.8),(24,0.9),(25,1),(26,0.9),(27,0.8)\}$$

در اینصورت داریم :

$$\left|\widetilde{\mathrm{A}}\right|=0.8+0.9+1+0.8+0.9=4.4$$

حال اگر مجموعه مرجع بصورت $X = \{20,21,\ldots,29\}$ باشد آنگاه :

$$\|\tilde{A}\| = \frac{|\tilde{A}|}{|X|} = \frac{4.4}{10} = 0.44\ .$$

تذکر : در مجموعه های فازی ای که دارای مجموعه مرجع پیوسته باشند عدد اصلی بـه صـورت زیر تعریف می گردد :

$$|\tilde{A}| = \int_X \mu_{\tilde{A}}(x)dx\ .$$

۱-۳-۱۴ **تعریف** : فرض کنید G یک گروه و μ یک زیر مجموعه فازی از آن باشد . در ایـن صورت μ را یک زیر گروه فازی از G می نامیم ، هرگاه ،

الف) برای هر $x, y \in G$, $\min\{\mu(x), \mu(y)\} \le \mu(xy)$;

ب) برای هر $x \in G$, $\mu(x) \le \mu(x^{-1})$.

با دقت نمودن به تعریف ۱-۳-۱۴ ، در می یابیم که زیر گروه فازی ، در واقع تعمیمی از مفهوم زیر گروه معمولی است ، زیرا شرط الف تعمیم مفهوم بسته بودن عمل در زیر گـروه بـوده و شـرط ب تعمیم وجود عنصر وارون در زیر گروه است .

۱-۳-۱۵ **نتیجه** : فرض کنید G یک گروه و μ یک زیر مجموعه فازی آن است ، آنگـاه μ یـک زیر گروه فازی G است اگر و فقط اگر برای هر $x, y \in G$ ،

$$\min\{\mu(x), \mu(y)\} \le \mu(xy^{-1})\ .$$

۱-۴- ابر ساختارها

۱-۴-۱ **تعریف** : فرض کنید H یک مجموعه ناتهی و $P^*(H)$ خانواده تمام زیـر مجموعـه هـای ناتهی H باشد ، هر تابع $\circ : H \times H \to P^*(H)$ را یک ابر عمل روی H می نامیم . اگـر . یـک ابـر