بسم الله الرحمن الرحيم

١١٥٤٨٨

دانشکده علوم

پایان‌نامه کارشناسی ارشد در رشته‌ی ریاضی (آنالیز)

نیم گروه‌های معکوس و *C-جبرهای ترکیبی

توسط:

سجاد رنجبر

استاد راهنما:

دکتر بهمن طباطبایی

اسفندماه ۱۳۸۷

به نام خدا

اظهارنامه

اینجانب سجاد رنجبر (۸۵۰۴۱۲) دانشجوی رشته‌ی ریاضی گرایش آنالیز دانشکده‌ی علوم اظهار می‌کنم که این پایان نامه حاصل پژوهش خودم بوده و در جاهایی که از منابع دیگران استفاده کرده ام، نشانی دقیق و مشخصات کامل آن را نوشته‌ام. همچنین اظهار می کنم که تحقیق و موضوع پایان نام هام تکراری نیست و تعهد می نمایم که بدون مجوز دانشگاه دستاوردهای آن را منتشر ننموده و یا در اختیار غیر قرار ندهم. کلیه حقوق این اثر مطابق با آیین نامه مالکیت فکری و معنوی متعلق به دانشگاه شیراز است.

نام ونام خانوادگی: سجاد رنجبر

تاریخ و امضا: ۸۸/۳/۱۰

به نام خدا

نیم‌گروه‌های معکوس و C^*-جبرهای ترکیبی

توسط:

سجاد رنجبر

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی
از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته:

ریاضی-آنالیز

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان نامه با درجه: عالی

دکتر بهمن طباطبایی، دانشیار بخس ریاضی (رئیس کمیته) ....

دکتر غلامحسین اسلام‌زاده، دانشیار بخش ریاضی ....

دکتر عبدالکریم هدایتیان، دانشیار بخش ریاضی ....

اسفندماه ۱۳۸۷

تقدیم به مهربانترین و دلسوزترین همراهان زندگیم

پدر و مادرم

سپاسگزاری

سپاس خداوند منان را که به بنده توفیق فرمود، تا بتوانم در این درگاه گام بردارم واین تحقیق را برای پایان نامه دوره کارشناسی ارشد به پایان برسانم. در آغاز لازم میدانم از آقای دکتر بهمن طباطبایی که همانند چراغی هدایتگر بنده بودند تا با راهنماییها و ارشادات ایشان بتوانم مشکلات خود را برطرف کرده و موفق به تکمیل این پایان نامه شوم، نهایت قدردانی وتشکر به عمل آید. همچنین از آقای دکتر اسلام زاده و آقای دکتر هدایتیان که اساتید مشاور بنده بودند، کمال تشکر رادارم

سجاد رنجبر ۱۳۸۷

چکیده

نیم‌گروه‌های معکوس و C^* – جبرهای ترکیبی

توسط:

سجاد رنجبر

ما کلاس خاصی از نمایشهایی از یک نیم‌گروه معکوس روی فضای هیلبرت که به این نمایش‌های سفت ($Tight$) گفته می‌شود را شرح می‌دهیم این نمایشها روی یک زیرمجموعه از طیف یک نیم‌شبکه از خودتوانهای S حمایت می‌شوند که به این زیرمجموعه طیف سفت گفته می‌شود که به طور دقیق نشان داده می‌شود که زمانی که فیلترها با نیم‌مشخصه‌ها ($Semicharacter$) بطور طبیعی یکی گرفته می‌شوند این طیف بستاری از فضای ابرفیلترها است.بعلاوه نشان داده می‌شود که این نمایشها با نمایشهایی از C^* – جبر گروه‌واری از جرمها برای کنشی از S روی طیف سفت متناظر هستند. ما موردی از نیم‌گروه‌های معکوس ویژه‌ای که از نیم‌گروه وارها ساخته می‌شوند را بحث می‌کنیم که این بحث کلی‌سازی توسط نیم‌گروه‌های معکوسی که از گرافهای مرتبه بالاتر ساخته می‌شود، می‌باشد. نمایشهای سفت از این نیم‌گروه‌های معکوس در تناظری یک‌به‌یک با نمایشهایی از نیم‌گروه‌وارها قرار دارند و جبر نیم‌گروه‌وار به صورت مدل گروه‌وار در نظر گرفته می‌شود.نشان داده می‌شود گروه‌واری که از این ساختار بدست می‌آید همان گروه‌وار مسیر مرزی است که توسط فرتینگ (Farthing)، مولی (Muhly)، ویند (yeend) ارائه شده است.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل ۱- مقدمه

فصل ۱- مقدمه

بطور نادقیق منظور از یک C^*- جبر ترکیباتی، C^*- جبری است که بوسیله‌ی یک شیء ترکیباتی ساخته می‌شود که جبرهای Cuntz-Krieger ساخته شده از ماتریسهای ۰ و ۱ نیز از آن جمله‌اند.

اما در ابتدا این سری از جبرها در [۶] توسط کانتز (J. Cuntz) و کرایگر (W. Krieger) در سال ۱۹۸۰ در موردهای متناهی تعریف شد و بعد بطور خیلی سریع این جبرها توسط انوموتو (M.Enomoto) و واتاتنی (Y. Watatani) در [۷] شناخته شد. سپس جبرهای کانتز- کرایگر (Cuntz-Krieger) برای ماتریسهای سطر متناهی در [۱۹] و همچنین برای ماتریسهای نامتناهی در [۱۲] تعمیم داده شد.

کلاس مهم دیگری از C^*- جبرهای ترکیبی، که ارتباط خیلی نزدیکی با کار اخیر کانتز و کرایگر دارد، بوسیله گراف C^*- جبر تشکیل می‌شود که [۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۸، ۲۵، ۲۹، ۳۰] مراجع مناسبی برای این کلاس از C^*- جبر ترکیبی هستند

همچنین گرافهای مرتبه بالاتر به وسیله کامجاین (A. Kumjian) و پاسک (D. Pask) در [۱۶] معرفی شد و شکل نهائی از این کلاس از C^* – جبر ترکیبی بوسیله فرتینگ(C. Farthing)، مولی (P. Muhly) و یند (T. Yeend) در [۱۳] تشکیل داده شد.

کسانی که علاقمند به مطالعه این نوع گراف‌ها هستند همچنین می‌توانند به [۱۷، ۲۲، ۲۳، ۲۸] مراجعه کنند و همچنین یک مرجع کامل از گراف‌های جبری بوسیله رایبرن (I. Raeburn) در [۲۷] در سال ۲۰۰۵ منتشر شده است.

تلاش برای فهمیدن تمام این جبرها تنها از یک منظره بود که اِکسل (R.Exel) را علاقمند به نظریه C^* – جبر نیم‌گروه‌وارها در [۱۰] کرد که شامل جبرهای Cuntz-Krieger و گراف مرتبه بالاتر C^* – جبرها در موارد متناهی است. توجه کنید که بعضی از تکنیک‌های پیچیده در این مرجع ارائه نشده است اما این تکنیک‌ها را می‌توان در مراجع دیگر یافت.

بیشترین استراتژی مؤثر برای مطالعه C^* – جبرها روی سیستمهای دینامیکی‌ای است که تلفیقی از جبر و ترکیبیات می‌باشد.

در [۱۲] سیستم دینامیکی را می‌بینیم که از کنشهای جزئی از یک گروه آزاد روی یک فضای توپولوژیکی تشکیل شده است که اغلب این سیستم در قالب اتل گروه‌وار (etal groupoid) یا گروه‌وار r – مجزا ارائه می‌شود. در حقیقت حتی در مواردی از [۱۲] کنشهای جزئی را می‌توان بوسیله گروه‌وارها کدگذاری کرد که این در [۱] و [۳۱] نشان داده شده است.

بنابراین طبیعی به نظر می‌رسد که C^* –جبر نیم‌گروه‌وارها همچنین مدل گروه‌وار بخود بگیرد اما متأسفانه شباهت بین جملات نیم‌گروه‌وارها و گروه‌وارها کار را قدری مشکل ساخته است.

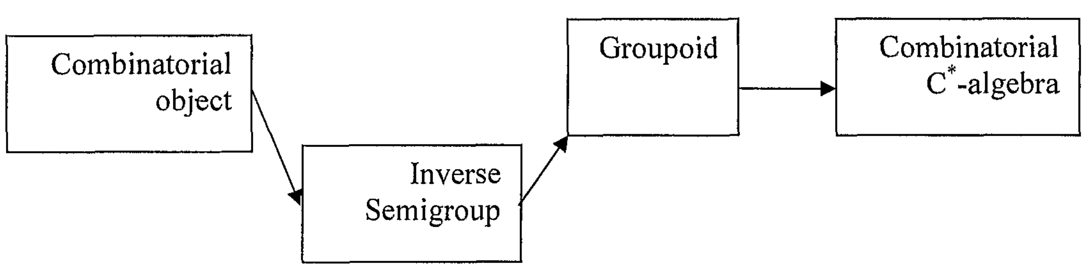
اکثریت C^* – جبرهای ترکیبی بدین صورت تعریف می‌شوند که شیء ترکیبی انتخاب شده را برای ارائه لیستی از رابطه‌ها، که به زبان C^* – جبر نوشته شده‌اند، استفاده کنند و سپس خاصیت

جهانی C^*- جبرهای تولید شده بوسیله طولپاهای جزئی که در چنین روابطی صدق می‌کنند، را بررسی می‌نمایند.

طولپاهای جزئی می‌توانند از نقطه نظر جبری خیلی بدرفتار کنند و مخصوصاً ضرب دو نوع از چنین عناصری نیازی ندارد که طولپای جزئی باشد. احتمالاً مطالعه اینکه جبرهای ترکیبی شامل طولپاهای جزئی است، غیرممکن باشد.

اما خوشبختانه طولپاهای جزئی که ما با آنها روبروی می‌شویم دارای یک خاصیتند که آنها همیشه یک *- نیم‌گروه تولید می‌کند که بطور منحصربه فردی شامل طولپاهای جزئی یا (بطور هم‌ارز) شامل یک نیم‌گروه معکوس است.

در کارهای اخیر نظیر [۱۳] و [۲۵] این نیم‌گروه معکوس در یک راه اساسی استفاده می‌شود در واقع پلی بین شیء ترکیبی و گروه‌وار است بدین صورت:



در هر دو [۱۳] و [۲۵] نیم‌گروه معکوس مربوط ساخته می‌شود تا روی یک فضای توپولوژیکی بوسیله همسان‌ریختی‌های جزئی عمل کند و گروه‌وار مناسب برای این بخش از کار گروه‌وار از جرمها است هرچند که دیاگرام بالا این استراتژی را بطور کامل درست توصیف نمی‌کند. زیرا در

جائی که فضای توپولوژی گروه‌وار وارد عمل می‌شود فضای توپولوژی یک فضایی از مسیرها که توصیفش به یک نگاه به عقب یعنی شیءهای ترکیبی احتیاج دارد.

پذیرفتن این استراتژی قدری مشکل است زیرا حدس زدن یک فضای مسیر مناسب در مواردی از نیم‌گروه‌وارها کار مشکلی است بعلاوه تجربه اخیر اِکسل با کنشهای جزئی از گروه‌وار ثابت کرده که فضای مسیر باید در نیم‌گروه‌وار معکوس بطور ذاتی موجود باشد.

با جستجو در نوشتجات سیستم‌های دینامیکی درمی‌یابیم که بطور ذاتی سیستم‌های دینامیکی مرتبط با نیم‌گروه معکوس داده شده S هستند برای مثال در [۲۴: گزاره ۴. ۳. ۲] به یک کنش طبیعی از S روی فضای نیم‌مشخصه از نیم‌شبکه خودتوانهای S برمی‌خوریم.

اما متأسفانه گروه‌وار از جرمها برای این کنش بدرستی قابل درک نیست. برای مثال، اگر با اساسی‌ترین جبر ترکیبیاتی برای نمونه جبر کانتز O_n، شروع کنیم شیء ترکیبی مناسب یک ماتریس $n\times n$ از صفر و یک است که در این مورد تنها شامل یک می‌باشد. و نیم‌گروه معکوس را نیم‌گروه معکوس کانتز در نظر می‌گیریم که در [۳۱: III. ۲. ۲] بوسیله رینالت (J. Renault) معرفی شده است.

اما گروه‌وار از جرمهای ساختاربندی شده از کنش ذاتی بالا، گروه‌وار کانتز نیست زیرا C^*- جبرش توسیع تیوپلیتز (Toeplitz) از O_n که در [۵: گزاره ۳. ۱] آمده است، می‌باشد نه O_n کانتز. می‌توانید برای مشاهده جزئیات [۳۱: III. ۲. ۸. i] را ببینید.

اگر $E=E(S)$ نیم‌شبکه خودتوانهای نیم‌گروه معکوس S باشد در این صورت نگاشت ناصفر $\phi:E\to\{0,1\}$را یک نیم‌مشخصه گوئیم اگر به ازای هر y,x در E داشته باشیم $\phi(xy)=\phi(x)\phi(y)$.

مجموعه تمام نیم‌مشخصه‌ها را با $\hat{E}$ نشان می‌دهیم و فضای $\hat{E}$ را فضای نیم‌مشخصه‌ی E می‌نامیم و این فضا تحت توپولوژی همگرائی نقطه‌به‌نقطه یک فضای توپولوژیکی موضعاً فشرده است.

کنش ذاتی بالا یک کنش کاملاً طبیعی از S روی $\hat{E}$ می‌باشد. اگر S شامل عنصر صفر باشد آنگاه E نیز شامل صفر است اما تعریف بالا از نیم‌شبکه‌ها احتیاجی به $\phi(0)=0$ ندارد.

در حقیقت فضای تمام نیم‌مشخصه‌ها خیلی بزرگ است و این می‌تواند تا حدی دلیل این باشد که چرا $\hat{E}$ در بیشتر موارد گروه‌وار بدست نمی‌دهد و این همچنین در [۲۵] بوسیله نیاز به کاستن خاصیت جهانی گروه‌وار نشان داده شده است.

یکی از نقاط اصلی از این کار این است که این کاستن در یک راهی که ذاتاً مربوط به S باشد بتواند قابل اجرا باشد و احتیاجی به اطلاعات بیشتر در مورد شیءهای ترکیبی که از S رشد می‌کند، را نداشته باشیم به عبارتی دیگر دیاگرام بالا ساخته شده است تا همانطور که نشان دادیم بطور دقیق کار کنیم.

اگر ϕ یک نیم‌مشخصه از یک نیم‌شبکه باشد آنگاه مجموعه

$$\xi = \xi_{\phi} = \{e \in E : \phi(e) = 1\}$$

که ضمناً ϕ را مشخص می‌کند، یک فیلتر است که شامل ef می‌باشد جائی‌که e و f در E هستند و بعلاوه $f \geq e \in \xi$ نتیجه می‌دهد که $f \in \xi$.

در مواردی که S شامل صفر است چیزی که احتیاج داریم به تعریف نیم‌مشخصه بیفزائیم این است که $\phi(0)$ برابر با صفر باشد در این صورت اگر به شرایط بالا این را اضافه کنیم که $0 \notin \xi$ این شرایط ساده را بعنوان تعریف فیلتر در نظر می‌گیریم.

به استثنای گروهوار توپولوژیکی کلن‌دونک (Kellendonk) که در [۲۰: ۹. ۲] ارائه شده است توجه زیادی به این حقیقت نداشته‌اند که ابرفیلترها یک کلاس مهمی از فیلترها را تشکیل می‌دهند. برای این منظور باید از لم زرن (Zorn) متشکر باشیم.

هرچند که رفتار کلن‌دونک بخاطر اتکا به دنباله‌های با جملات شمارشپذیر بطور دقیق آن چیزی نیست که ما به آن نیاز داریم. و این باعث شد تا توجه کنیم به مجموعه $\hat{E}_\infty$ تشکیل شده بوسیله تمام نیم‌مشخصه‌های ϕ طوریکه ξ_ϕ یک ابرفیلتر است.

$\hat{E}_\infty$ همیشه به دلخواه ما رفتار نمی‌کند زیرا بسته بودن در $\hat{E}$ را رد می‌کند اما چیزی که ما بدنبال آن هستیم این است که تلاش می‌کنیم که خواننده را با بستاری از $\hat{E}_\infty$ درون $\hat{E}$ که با $\hat{E}_{tight}$ نمایش داده می‌شود، متقاعد سازیم.

این چندین مثال در نوشتجات جائی‌که مسیرهای متناهی در مراحلی با مسیرهای نامتناهی سهیم می‌شوند را توضیح می‌دهد. چندین مثال را به ترتیب وقوع زمانی در زیر ذکر می‌کنیم اما این مثال‌ها یک لیست کامل نیستند.

×توصیف طیف از رابطه‌های Cuntz-Krieger برای ماتریسهای دلخواه 0 و 1 که در انتهای [۱۲:بخش۵] و همچنین در [۱۲: ۷. ۳] قابل مشاهده است.

×توصیف پترسن (A. L. Paterson) از فضای یکه از گروهوار مسیر از یک گراف که در [۲۵:گزاره۳] و همچنین [۲۵: گزاره ۴] قابل مشاهده می‌باشد.

×فضای پایای بسته $\partial\Lambda$ درون فضای تمام مسیرهای متناهی و نامتناهی در یک گراف مرتبه بالاتر Λ که در [۱۳: تعریف ۵. ۱۰] و همچنین [۱۳: قضیه ۶. ۳] قابل رؤیت می‌باشد.

توضیح کامل اتصال بین گروه‌وار از جرمها برای کنش طبیعی از S روی $\hat{E}_{tight}$ و کارهای بالا باعث می‌شود که این مقاله طولانی‌تر از اینکه هست، باشد. بنابراین ما توجه خود را به C^*- جبرهای نیم‌گروه‌وار معطوف کرده‌ایم.

از طرف دیگر جبرهای ترکیبیاتی که تا به حال ذکر شده را نیز در بردارد اما از طرف دیگر بخاطر دفع کردن تکنیکهای پیچیده محدودیتهای مهمی را در نظر گرفته‌ایم.

در حالی که ما توافقی روی نامتناهی نداریم ما فرض می‌کنیم که گروه‌وارمان هیچ حالت ارتجاعی ندارد و حداقل ضرب عمومی را می‌پذیرد. این فرضیات در مواردی از گرافهای مرتبه بالاتر متناظر با فقدان منابع می‌باشد. و این حقیقت است که Λ را بطور جدا جدا هم‌تراز می‌کند.

در کنار اجازه دادن برای ساده‌سازی تکنیکی وجود حداقل ضرب عمومی اتصالات مهمی را برای حسابدانان مشخص می‌کند و همچنین یک تفسیر هندسی مهم در گرافهای مرتبه بالاتر دارد.

زمانی که Λ یک نیم‌گروه باشد که در تمام فرضیات مورد علاقه بالا صدق کند ما نیم‌گروه معکوس $S(\Lambda)$ را ساختاربندی می‌کنیم و آنگاه در قضیه (۱۷. ۴) اثبات می‌کنیم که C^*- جبر نیم‌گروه‌وار با گروه‌وار از جرمها برای کنش طبیعی از $S(\Lambda)$ روی $\hat{E}_{tight}$ یکریخت است.

هرچند که ما انرژی لازم را برای نیم‌گروه معکوس ساختاربندی شده از یک گراف مرتبه بالاتر کلی که در [۱۳] بیان شده، مصرف نکردیم اما حدس می‌زنیم که گروه‌واری که در [۱۳] به صورت $G_\Lambda|_{\partial\Lambda}$ نشان داده شده شبیه به گروه‌وار G_{tight} از قضیه (۱۲. ۳) است یا یافته ما بنظر می‌رسد که اشاره قویی به این دارد که $G_\Lambda|_{\partial\Lambda}$ نیز در (۱۲. ۳) صدق می‌کند.

آیا این تأیید می‌شود؟ اثبات این در مقدمه [۱۳] ذکر شده که البته نیاز به کمی اصلاح‌سازی دارد.

مبنای ما در قسمت اول این کار (که بخش ۲-۹ را نیز در بردارد) روی رساله‌ی رینالت (J.Renalt) [۳۱] و کتاب پترسن [۲۴] است.

مطالعه خلاصه‌ای از روشهای تکنیکی که در چندین بخش استفاده می‌کنیم را مورد بررسی قرار می‌دهیم و در ابتدا مطالعه دقیقی را روی آتل گروه‌وارهای (etale groupoid) که هاسدورف نیستند و C^*- جبرهای منسوب به آنها انجام می‌دهیم ما همچنین کنشهایی از نیم‌گروه معکوس را روی فضای توپولوژیکی بحث می‌کنیم.

همچنین گروه‌واری از جرمها مرتبط با این کنشها را در جزئیات شرح می‌دهیم که همچنین نظریه سایبن (N. Sieben) از ضربهای مستقیم توسط نیم‌گروه‌های معکوس که در [۳۳] بیان شده را شامل می‌شود.

ما تا حد امکان تلاش می‌کنیم که فرضیات را کاهش دهیم. البته این توسط توجه ما روی اتل گروه‌وار آسان شده است.

ما امیدواریم که این کار بتواند به عنوان یک راهنمائی برای تازه‌کارانی که بطور اولیه به مورد اتل علاقه‌مند هستند. مورد استفاده قرار گیرد در نتیجه نیازی به صرف انرژی روی سیستم هار ندارند.

بعنوان نتیجه‌ای از صرفه‌جوئی ما از فرضیات، کلی‌سازی از برخی از نتایج شناخته شده را پیدا می‌کنیم و به عنوان مثال در گزاره (۸-۹) نشان می‌دهیم که C^*- جبر از یک اتل گروه‌وار یک ضرب مستقیم در مفهوم سایبن (حتی در موارد غیرهاسدورف) با فرضیاتی دقیق اما کمتر از فرضیات جمع شده در [۲۴: قضیه ۳. ۳. ۱] یا شرایط پری (Fullness) از [۲۶: ۸. ۱] می‌باشد. ما همچنین یک بهسازی کوچکی را روی [۲۴: گزاره ۳. ۳. ۳] با برداشتن نیازی برای شرط (ii) از [۲۴: تعریف ۳. ۳. ۱] معرفی می‌کنیم. که این در گزاره (۷-۸) مطرح شده است، با وجود اینکه بیشتر کار ما روی گروه‌وارهایی که هاسدورف نیستند پایه‌گذاری شده است. ما شرایط جالبی را

برای گروه‌واری از جرمها که هاسدورفند را پیدا می‌کنیم که با ساختار ترتیبی از نیم‌گروه‌های معکوس رابطه دارد.

ما در قضیه (۵. ۲) نشان می‌دهیم که اگر نیم‌گروه S یک نیم‌شبکه نسبت به ترتیب طبیعی $s \leq t \Leftrightarrow s = ts^*s$ باشد، آنگاه هر کنشی از S روی یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده، که دامنه کنش‌هایمان متناظر با همسان ریختی‌های جزئی هم باز و هم بسته هستند، با گروه‌واری از جرمها که هاسدورفند، مرتبط می‌شود.

یک کلاس خاصی از نیم‌گروهها که شرایط اشاره شده در بالا را داراست و در (۵. ۴) نیز ذکر شده است بوسیله نیم‌گروه‌های معکوس E^*- یکانی (که در بعضی مواقع $0-E$-یکانی نیز نامیده می‌شود) تشکیل شده است نیم‌گروه‌های معکوس E^*-یکانی توسط سزندری (M. B. Szendrei) در [۳۴] تعریف شده است. که در بعضی از نوشتجات به آن پرداخته شده است.

برای مثال [۲۰: بخش ۹] را ببینید در [۲۰: ۹. ۲. ۶] مشاهده می‌کنیم که گروه‌وار توپولوژی کلن دونک (Kellendonk) هاسدورف است اگر S یک نیم‌گروه معکوس E^*- یکانی باشد. و همچنین در [۲۴. نتیجه ۴. ۲. ۳] کلاس مرتبط با نیم‌گروه‌های معکوس E- یکانی نشان داده شده، گروه‌وارهای هاسدورف را فراهم می‌کند.

فصل ۲- اَتل گروه‌وارها

فصل ۲- آتل گروه‌وارها

در این بخش ما حقایق اساسی در مورد اتل گروه‌وارها، که در بخشهای دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند را مرور می‌کنیم. دو مرجع مناسب برای این موضوع [۲۴] و [۳۱] می‌باشند.

در این مقاله فرض شده است که خواننده با مفهوم اولیه گروه‌وار آشنایی کامل دارد. یک تعریف از گروه‌وار بدین صورت می‌باشد:

یک گروه‌وار یک مجموعه G است که دارای یک نگاشت ضرب از G^2 بتوی G که هر (x,y) را به xy می‌نگارد جایی‌که G^2 یک زیرمجموعه از $G\times G$ است که جفتهای ترکیب‌پذیر نامیده می‌شود و دارای نگاشت معکوس از G به G که هر x را به x^{-1} می‌نگارد طوریکه رابطه‌های زیر برقرار باشند.

i) $(x^{-1})^{-1}=x$

ii) اگر $(x,y),(y,z)\in G^2$ آنگاه $(xy,z),(x,yz)\in G^2$ و $(xy)z=x(yz)$

iii) $(x^{-1},x)\in G^2$ و اگر $(x,y)\in G^2$ آنگاه $x^{-1}(xy)=y$

iv) $(x,x^{-1})\in G^2$ و اگر $(z,x)\in G^2$ آنگاه $(zx)x^{-1}=z$

اگر $x\in G$ نگاشت $d(x)=x^{-1}x$ نگاشت منبع (دامنه) نامیده می‌شود و نگاشت $r(x)=xx^{-1}$ نگاشت برد نامیده می‌شود. $r(x),d(x)$ را به ترتیب دامنه از x و برد از x می‌گوئیم. جفت (x,y)