



دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده‌ی علوم ریاضی

رساله‌ی دکتری ریاضی کاربردی، گرایش کدگذاری، آقای محمد غلامی
تحت عنوان

کدهای خلوت خوش ساختار با کمر بالا

در تاریخ ۲۹ آبان ماه ۸۷ توسط کمیته‌ی تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

- | | |
|--|--------------------------------|
| دکتر مرتضی اسماعیلی | — استاد راهنمای رساله |
| دکتر محمد علی خسروی فرد | — استاد مشاور رساله |
| دکتر فرشاد لاهوتی (دانشگاه تهران) | — استادان داور خارج از دانشکده |
| دکتر معصومه نصیری (دانشگاه صنعتی شریف) | |
| دکتر غلامرضا امیدی | — استادان داور داخل دانشکده |
| دکتر بهناز عمومی | |

دکتر رسول نصر اصفهانی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده

فهرست مطالب

۲	فصل اول مقدمه
۶	۱-۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی
۶	۱-۱-۱ برخی مفاهیم مربوط به نظریه گراف
۷	۲-۱-۱ برخی مفاهیم مربوط به نظریه کدگذاری
۱۳	۳-۱-۱ برخی مفاهیم ترکیبیاتی
۱۵	۲-۱ نمودار کارآیی کد بر حسب نسبت خطای بی‌تی
۱۷	فصل دوم کدهای نوع اول و دوم
۱۸	۱-۲ کدهای نوع اول و دوم
۲۰	۲-۲ نمایش ماتریسی کدهای نوع اول و دوم
۲۵	۳-۲ کران بالا روی کمر کدهای نوع اول و دوم
۴۰	۴-۲ رسیدن به یک رابطه ریاضی جالب
۴۱	۵-۲ الگوریتم تولید کدهای نوع اول با کمر ماکزیمم
۵۵	۶-۲ الگوریتم تولید کدهای نوع دوم با کمر ماکزیمم
۵۸	۷-۲ تعیین قلمرو حداقل برای ضرایب و نحوه عملکرد برنامه
۶۶	فصل سوم کدهای نوع سوم
۶۷	۱-۳ نمایش ماتریسی کدهای نوع سوم
۶۸	۲-۳ کران بالا روی کمر کدهای نوع سوم
۶۹	۳-۳ دوره‌های با طول کمتر از ۶ در یک گراف استوانه‌ای
۷۴	۴-۳ الگوریتم تولید کدهای نوع سوم با کمر ماکزیمم
۷۹	۵-۳ پیچیدگی محاسباتی الگوریتم

۸۴	فصل چهارم	کدگذاری کدهای نوع اول، دوم و سوم با استفاده از کدگشایی پاک کننده
۸۷	۱-۴	کدگذاری کدهای نوع اول و دوم
۸۹	۲-۴	کدگذاری کدهای نوع سوم
۹۲	فصل پنجم	فرم کانولوشن کدهای نوع اول، دوم و سوم
۹۴	۱-۵	کدهای خلوت کانولوشن نوع اول و دوم
۱۰۴	۲-۵	فرم کانولوشن متناظر با کدهای نوع سوم
۱۱۴	۳-۵	الگوریتم دستیابی به کران پایین گالاگر
۱۱۶	فصل ششم	کدهای با گراف ساختاری کامل
۱۱۸	۱-۶	کد کامل نوع اول با کمر حداکثر ۲۰ و نرخ دلخواه
۱۲۰	۲-۶	یک الگوریتم قطعی برای ساخت کدهای کامل نوع اول
۱۲۲	۳-۶	کدهای کامل نوع دوم با کمر حداکثر ۱۶ و نرخ دلخواه
۱۲۴	۴-۶	یک الگوریتم قطعی برای ساخت کدهای کامل نوع ۲
۱۲۷	فصل هفتم	کدهای خلوت با وزن ستونی و نرخ دلخواه و کمر حداکثر ۱۸
۱۲۸	۱-۷	گراف ساختاری یک کد با وزن ستونی دلخواه
۱۲۹	۲-۷	ارتباط بین گراف ساختاری و گراف تتر
۱۳۰	۳-۷	گراف ساختاری بلوکی
۱۳۵	۴-۷	طراحی و ساخت کد شیب بر پایه ماتریس شیب
۱۳۶	۵-۷	گراف ساختاری بلوکی یک کد شیب
۱۳۸	۱-۵-۷	طبقه‌بندی گشت‌های بسته موجود در گراف ساختاری بلوکی یک کد شیب
۱۴۵	۶-۷	تشریح یک الگوریتم قطعی در یافتن کدهای شیب با کمر حداکثر ۱۸
۱۵۳		جداول
۱۶۶		واژه‌نامه
۱۷۰		مراجع

فصل ۱

مقدمه

شانون^۱ [۴۸] پایه‌گذار نظریه کدگذاری^۲ در نظریه اطلاعات است که ثابت می‌کند می‌توان اطلاعات را با نرخ به دلخواه نزدیک به ظرفیت^۳ کانال و با احتمال خطای کدگشایی^۴ نزدیک به صفر ارسال^۵ نمود. اگرچه شانون این مطلب را به صورت قضیه‌ای اثبات نمود ولی روند اثبات قضیه بر پایه نظریه احتمال بوده و روش خاصی جهت معرفی کد مطلوب مشخص نمی‌کند. پس از آن بود که تلاش‌های زیادی برای رسیدن به کدهای مطلوب آغاز گردید و کدهای معروفی نظیر کدهای همینگ^۶ [۱۶]، [۱۷]، گلی^۷ و رید-مولر^۸ [۱۳]، [۴۴]، کانولوشن^۹ [۸]، BCH و رید-سولومن^{۱۰} [۴۱]، [۴۳] و توربو کدها^{۱۱} [۳] مطرح شدند.

ولی مک‌کی و نیل^{۱۲} [۳۲]–[۳۴] در سال ۱۹۹۵ کدهای جدیدی به نام کدهای خلوت یا LDPC^{۱۳} را مورد توجه قرار دادند که علی‌رغم داشتن یک ساختار ساده می‌توانند در یک رقابت جدی با کدهای توربو در میل به حد شانون شرکت نمایند.

در حقیقت کدهای خلوت اولین بار توسط گالاگر^{۱۴} [۱۲] در سال ۱۹۶۲ مطرح شد، ولی به زودی توسط مجامع علمی به فراموشی سپرده شد. در واقع پیچیدگی کاربری این کدها در آن زمان، آنها را از توانایی رقابت با سایر کدها بازداشته بود و باعث شده بود که این دسته از کدها در کاربردهای عملی مورد توجه قرار نگیرند، ولی نیاز اخیر سیستم‌های مخابراتی پیشرفته به نزدیک شدن به حد شانون باعث تجدید-

^۱ Shannon ^۲ coding ^۳ capacity ^۴ decoding ^۵ transmission ^۶ Hamming
^۷ Golay ^۸ Reed – Muller ^۹ convolution ^{۱۰} Reed – Solomon ^{۱۱} Turbo ^{۱۲} Mackay, Neal
^{۱۳} low – density parity – check code ^{۱۴} Gallager

نظر و ایجاد علاقه نسبت به این کدها گردید. در واقع این کدها دارای ماتریس بررسی توازن خلوت می‌باشند و الگوریتم کدگشایی آنها نظیر الگوریتم مجموع- حاصلضرب^۱ [۲۵] از یک روش تکراری^۲ روی داده‌های نرم^۳ بهره می‌گیرد که در آن پیچیدگی محاسباتی^۴ به‌طور خطی با طول کد افزایش می‌یابد. تر^۷ [۵۶] در سال ۱۹۸۱ با گسترش این کدها و معرفی آنها با یک نمایش گرافی به نام گراف تر عملاً به روشی موثر در کاربردهای عملی به منظور کدگذاری و کدگشایی این کدها دست یافت. وجود دوره‌های با طول کم در این نمایش گرافی در الگوریتم کدگشایی مطلوب نبوده و پیچیدگی محاسباتی را افزایش می‌دهد.

بنابراین در کدهای خلوت، داشتن کمر بالا در گراف تر کد - به جهت به‌کارگیری تعداد تکرارهای کمتر در الگوریتم کدگشایی برای رسیدن به جواب - یکی از پارامترهای مهم طراحی این کدها است. از دیگر موارد مهم در طراحی کدهای خلوت داشتن می‌نیم فاصله و نرخ بالا است، زیرا این دو پارامتر به ترتیب باعث تصحیح خطای بیشتر و تعداد بیت کمتر برای انتقال اطلاعات می‌شوند.

ساخت کدهای خلوت به دو روش تصادفی [۳۲]-[۶۷] و ساختاری [۵۹]-[۵] صورت می‌گیرد. روش ساختاری برای تضمین عدم وجود دوره‌های با طول کم در گراف تر کد است و کدهای ساختاری نسبت به کدهای تصادفی ساخته شده توسط مک‌کی از پیچیدگی ذخیره‌سازی، کدگذاری و کدگشایی کمتری برخوردار هستند. می‌نیم فاصله کد وابستگی زیادی با طول کوتاهترین دور در گراف تر آن دارد که به اختصار کمر^۸ کد نامیده می‌شود. با افزایش کمر کد می‌توان به می‌نیم فاصله بالاتر و در نتیجه به قدرت تصحیح و تشخیص بالاتر خطا در الگوریتم کدگشایی دست یافت و به کارآیی^۹ بهتری می‌توان امیدوار شد.

در سال‌های اخیر تلاش‌هایی برای ساخت کدهای خلوت خوش ساختار^{۱۰} با نرخ^{۱۱} متغیر و کمر بالا و وزن سطری و ستونی دلخواه و قابل انعطاف صورت گرفته است. به عنوان نمونه پس از مطرح شدن کدهای آرایه‌ای^{۱۲} [۹] یا به‌طور هم ارز کدهای شبکه‌ای^{۱۳} [۶۳] - به عنوان دسته‌ای از کدهای شبه دوری که ماتریس بررسی توازن آنها متشکل از بلوک‌های ماتریس‌های جا بگشتی دوری است - فسریر^{۱۴} [۱۰] دسته‌ای از این کدها را به روش یک جستجوی گسترده کامپیوتری معرفی نمود که دارای کمر ۸، ۱۰ و ۱۲ هستند. همچنین برای نخستین بار وسیچ^{۱۵} [۶۲]، [۶۳] حالت خاصی از کدهای آرایه‌ای با وزن ستونی ۳ و کمر ۸ را با توجه به دیدگاه‌های هندسی و ترکیباتی مطرح نمود. ولی میلنکوویچ [۳۵] با گسترش روش‌های یاد شده و بهره‌گیری از کوتاه نمودن کدهای آرایه‌ای و از طریق حذف روابط هم‌نهشتی خطی

^۱ sum - product ^۲ iterative ^۳ soft ^۴ codewords ^۵ nullspace ^۶ Tanner
^۷ complexity ^۸ girth ^۹ performance ^{۱۰} well structured ^{۱۱} rate ^{۱۲} array code
^{۱۳} lattice code ^{۱۴} Fossorier ^{۱۵} Vasic

متناظر با دورهای با طول کوتاه به ساخت و طراحی کدهای با کمر حداکثر ۱۲ پرداخت. در اینجا منظور از یک کد منظم، یک کد خطی با ماتریس بررسی توازن H است که در آن وزن سطری و ستونی ماتریس H برابر با مقادیر ثابتی باشد. گالاگر نشان داد که می‌نیمم فاصله یک کد منظم با وزن ستونی ۲، به طور لگاریتمی با طول کد زیاد می‌شود که این نسبت به حالت وزن ستونی بیشتر از ۲ که در آن می‌نیمم فاصله به صورت خطی با طول کد افزایش می‌یابد، یک ضعف محسوب می‌شود. با این حال کدهای خلوت با وزن ستونی ۲، دارای نقاط قوتی [۵۰]–[۵۲] می‌باشند. از جمله این که کدگذاری و کدگشایی آنها از پیچیدگی کمتری برخوردار بوده و در ذخیره‌سازی^۱ کاربرد بیشتری دارند. همچنین تاثیر کمر بالا روی کارایی کد در این کدها بهتر به نظر می‌رسد و نیز در حالت بلوکی از احتمال خطای کمتری برخوردار بوده و قابلیت به کارگیری در کانال‌های واکنش جزئی^۲ را دارا می‌باشند. کدهای خلوت با وزن ستونی ۲ را کدهای خلوت ماورایی^۳ یا کدهای دور^۴ [۲۳] می‌نامند و در مرجع [۲۰] نشان داده شده است که کدهای دور روی میدان \mathbb{F}_q زمانی که q بزرگ می‌شود می‌توانند یک کارایی نزدیک به حد شانون دسترسی داشته باشند.

مورا^۵ [۶۸] در مورد کدهای دور مفهوم گرافی جدیدی مبتنی بر ماتریس بررسی توازن کد به نام گراف ساختاری^۶ را مطرح می‌نماید که هر دور موجود در آن معادل یک دور در گراف ترنر کد با طول دو برابر است. او با استفاده از این تعریف و بررسی دسته‌ای از این کدهای با گراف ساختاری استوانه‌ای شکل مبتنی بر تعریف واژه شیب^۷، به کدهای با کمر ۱۲، ۱۶ و ۲۰ دست یافت که تعداد بخش‌ها در آنها به ترتیب برابر ۲، ۸ و ۱۰ است.

این رساله بر پایه گسترش این مفهوم تدوین شده است. ساختار رساله به شرح زیر می‌باشد. در فصل اول برخی تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز ارایه می‌شوند. با تعمیم ساختار معرفی شده توسط مورا برای تعداد بخش‌های دلخواه، در فصل‌های ۲ و ۳، نمایش صریحی برای ماتریس بررسی توازن این کدها یافته و ثابت می‌کنیم که بدون کاستن از کلیت می‌توان یکی از زوج شیب‌های موجود در هر بخش را (بجز بخش آخر) برابر صفر در نظر گرفت. پس از آن با تفکیک این کدها به نوع اول، دوم و سوم بر پایه تعداد زوج شیب‌های موجود در بخش‌های گراف، کران‌های بالایی را بر روی کمر این دسته از گراف‌ها می‌یابیم. سپس با متناظر نمودن یک سری روابط هم‌نهشتی به دورهای موجود در گراف ساختاری کد و

^۱ storage

^۲ partial response channels

^۳ ultra-sparse

^۴ cycle codes

^۵ Moura

^۶ structure graph

^۷ slope

طی یک الگوریتم قطعی^۸ از دوره‌های با طول کم اجتناب نموده و به ساخت گسترده کدهای با کمر بالا و طول و عرض دلخواه خواهیم پرداخت. ثابت خواهیم نمود که الگوریتم‌های یادشده دارای پیچیدگی محاسباتی خطی هستند.

در فصل ۴ روش کدگذاری با استفاده از کدگشایی پاک‌کننده برای کدهای ساخته‌شده معرفی می‌شود که برپایه مجموعه‌های متوقف‌کننده^۹ است. در اینجا ثابت می‌شود که الگوریتم کدگذاری و کدگشایی این کدها دارای پیچیدگی خطی نسبت به طول کد است.

در فصل ۵ نمایش کانولوشن این کدها را مورد بررسی قرار داده و نشان می‌دهیم که می‌نیمم فاصله این کدها با کمر ماکزیمم در حالت شبه‌دوری با می‌نیمم فاصله آزاد کد کانولوشن متناظر با آن‌ها برابر است. در انتها، کارایی این کدها را با کدهای تصادفی مقایسه کرده و نشان می‌دهیم که این کدها از کارایی بهتری نسبت به کدهای تصادفی و کدهای دور-ساخته‌شده در سال‌های اخیر- برخوردار هستند. با وجود داشتن کارایی مناسب، به سبب داشتن کمر بالا، کدهای نوع اول و دوم از نرخ خیلی خوبی برخوردار نیستند. اگر چه این محدودیت در مورد نرخ کدهای نوع سوم وجود ندارد، ولی کمر این کدها حداکثر برابر ۱۲ بوده و در بهترین حالت دارای کارایی مشابه با کدهای جبری ساخته‌شده در سال‌های اخیر هستند. از این رو، در فصل ۶ کدهای کامل نوع اول و دوم با کمر حداکثر ۱۶ و ۲۰ را مطرح می‌کنیم که دارای نرخ دلخواه بوده و از کارایی بهتری نسبت به کدهای تصادفی و جبری برخوردارند.

در فصل ۷، مفهوم گراف ساختاری برای کدهای با وزن ستونی بیشتر از ۲ ارایه می‌شود. در این حالت نیز همان ارتباط بین دوره‌های گراف ساختاری با دوره‌های موجود در گراف تندر قرار است. ولی تشخیص دوره‌ها در گراف ساختاری در این مرحله از پیچیدگی خاصی برخوردار است. بنابراین در این مورد مفهوم گراف ساختاری بلوکی را برای برخی کدهای مدور^{۱۰} ترکیبیاتی تعریف نموده و هم‌ارز بودن دوره‌های موجود در گراف ساختاری با برخی از گشت‌های بسته در این نمایش گرافی را اثبات می‌نماییم. سرانجام با دسته‌بندی این گشت‌ها و اجتناب از آنها در گراف ساختاری بلوکی به یک الگوریتم قطعی برای تولید انبوه کدهای خلوت با نرخ و وزن ستونی دلخواه و کمر حداکثر ۱۸ که دارای کارایی بهتری نسبت به کدهای ساخته‌شده توسط دیگران در سال‌های اخیر بوده، دست می‌یابیم.

^۸ deterministic algorithm

^۹ stopping set

^{۱۰} circulants

۱-۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این بخش برخی مفاهیم مربوط به نظریه گراف، کدگذاری و ترکیبیات^{۱۱} که در بخش‌های بعد مورد نیاز هستند ارایه می‌شود.

۱-۱-۱ برخی مفاهیم مربوط به نظریه گراف

در ارایه مفاهیم گرافی ارایه شده از مرجع [۶۶] استفاده شده است.

یک گراف G به صورت یک سه‌تایی شامل $V(G)$ ، مجموعه راس‌ها^{۱۲} یا نقاط، $E(G)$ مجموعه یال‌ها^{۱۳}، یک رابطه تعریف می‌شود که به هر یال دو راس نه لزوماً متمایز نسبت می‌دهد که نقاط انتهایی یال مورد نظر نامیده می‌شوند.

در یک گراف منظور از یک طوقه^{۱۴} یالی است که دارای نقاط انتهایی یکسان باشد. همچنین دو یال را موازی گویند اگر نقاط انتهایی یکسانی داشته باشند و گرافی که شامل یال موازی و طوقه نباشد گراف ساده نامیده می‌شود. در یک گراف دو راس با یکدیگر مجاورند اگر نقاط انتهایی حداقل یک یال در آن گراف باشند.

برای $v \in V(G)$ و زیرمجموعه $V_1 \subseteq V(G)$ منظور از درجه راس v در V_1 یا $deg_{V_1}(v)$ ، تعداد راس‌های موجود در V_1 است که با راس v مجاورند. در این حالت اگر $V_1 = V(G)$ به جای $deg_{V_1}(v)$ از نماد $deg(v)$ ، درجه راس v ، استفاده می‌شود.

گراف H زیرگراف G است اگر $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ و تخصیص نقاط انتهایی به یال‌ها در H همانند با گراف G باشد. بنابراین با حذف برخی یال‌ها از گراف G مانند $G - \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ می‌توان به یک زیرگراف از G دست یافت که با نماد $G - \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ نمایش داده می‌شود. اگر $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V(G)$ مجموعه‌ای از راس‌های گراف G باشد آنگاه منظور از گراف $G - \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ زیرگرافی از G است که علاوه بر راس‌های مورد نظر تمامی یال‌هایی که دست‌کم یکی از نقاط انتهایی آنها متعلق به این مجموعه باشند نیز از گراف G حذف شوند. همچنین در حالت $n = 1$ از نمادهای $G - v_1$ و $G - e_1$ استفاده می‌شود.

منظور از یک گشت^{۱۵} در گراف G یک دنباله از راس‌ها و یال‌ها مانند $v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k$ است به طوری که یال e_i ، $1 \leq i \leq k$ ، دارای انتهای v_{i-1} و v_i باشد. در این حالت v_0 و v_k نقاط انتهایی و سایر

^{۱۱}combinatoric

^{۱۲}vertices

^{۱۳}edges

^{۱۴}loop

^{۱۵}walk

نقاط، نقاط درونی گشت مورد نظر نامیده می‌شوند و گشتی که دارای نقاط انتهایی یکسان باشد یک گشت بسته است. گشتی که شامل راس‌های متمایز باشد یک مسیر نامیده شده و به مسیر بسته، یک دور گفته می‌شود. طول یک گشت (یا مسیر) نیز تعداد یال‌های موجود در آن گشت (یا مسیر) است.

در حقیقت هر یال مانند یک پاره‌خط است که می‌تواند جهت‌دار نیز باشد. در اینجا منظور از یک جهت روی یک گشت (یا مسیر و دور) یک جهت‌گذاری روی یال‌های آن است به طوری که جهت هر یک از یال‌ها با جهت حرکت روی گشت از ابتدا تا انتها سازگار باشد. در یک گراف G ، مجموعه $A \subseteq V(G)$ یک مجموعه مستقل مجزا نامیده می‌شود اگر هیچ یالی بین عناصر آن وجود نداشته باشد. حال اگر $V(G)$ را بتوان به صورت اجتماع دو مجموعه مستقل نوشت آنگاه گراف مورد نظر یک گراف دوبخشی خواهد بود و به آسانی ثابت می‌شود که طول هر دور در گراف دوبخشی عددی زوج است.

۱-۱-۲ برخی مفاهیم مربوط به نظریه کدگذاری

فرض کنید $q \in \mathbb{N}$ توانی از یک عدد اول باشد. در این صورت یک میدان متناهی \mathbb{F}_q با q عنصر وجود دارد. منظور از یک کد خطی q تایی C با طول n و رتبه k یک زیرفضای خطی با بعد k از فضای برداری \mathbb{F}_q^n است و هر یک از عناصر آن یک کدکلمه نامیده می‌شود.

منظور از یک ماتریس مولد برای کد C ، ماتریسی است که سطرهاى آن تشکیل یک پایه برای فضای مورد نظر می‌دهند. در این حالت اگر C^\perp فضای عمود بر کد C باشد آنگاه منظور از یک ماتریس بررسی توازن برای کد C یک ماتریس مولد برای کد C^\perp است. در حالت $q = 2$ کد C یک کد دودویی^{۱۶} نامیده می‌شود که مبنای عملکرد ما در این رساله است.

منظور از وزن یک کدکلمه تعداد درایه‌های ناصفر موجود در آن است. همچنین به کمترین وزن در میان کدکلمه‌های ناصفر یک کد خطی، فاصله می‌نیمم کد گفته می‌شود.

توجه داشته باشید که بسته به انتخاب عناصر پایه، ماتریس بررسی توازن (یا مولد) متعددی را می‌توان برای کد C پیشنهاد داد، ولی با اعمال سطری مقدماتی می‌توان از یک ماتریس به ماتریس دیگر رسید. بنابراین می‌توان چنین حکم نمود که ماتریس بررسی توازن (یا مولد) یک کد صرف‌نظر از اعمال سطری مقدماتی منحصر به فرد است. در اینجا کدی که دارای فرمی از ماتریس بررسی توازن با وزن سطری و ستونی یکنواخت باشد یک کد منظم نامیده می‌شود. همچنین در فرم استاندارد می‌توان ماتریس مولد را به صورت $G = (I^k | A)$ در نظر گرفت که در این حالت به آسانی ثابت می‌شود $H = (-A^t | I^{n-k})$ یک ماتریس بررسی توازن برای کد است.

^{۱۶}binary

در حالت دودویی، دو کد را معادل گوئیم اگر با اعمال سطری مقدماتی و جابه‌جایی ستون‌ها بتوان از ماتریس بررسی توازن (یا مولد) یکی به ماتریس بررسی توازن (یا مولد) دیگری رسید.

یک کد را کد با ماتریس بررسی توازن خلوت^{۱۷} یا به اختصار کد خلوت می‌نامند اگر تعداد درایه‌های ناصفر در ماتریس بررسی توازن آن کم باشد. همچنین منظور از یک کد $LDPC(n, j, k)$ ، یک کد خلوت منظم با طول n و ماتریس بررسی توازن با وزن سطری و ستونی یکنواخت به ترتیب برابر k و j است. آنچه ما در ابتدا بحث خواهیم نمود حالت $j = 2$ است و پس از آن به ساخت کدهای مورد نظر در حالت $j > 2$ می‌پردازیم.

در مرجع [۵۶] به هر کد خطی یک گراف دوبخشی به نام گراف ترنسیت داده شده است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۱ فرض کنید $H = (h_{i,j})_{h \times n}$ یک ماتریس بررسی توازن برای یک کد مفروض C باشد. حال فرض کنید $V = V_1 \cup V_2$ مجموعه راس‌های گراف مورد نظر است که در آن $V_1 = \{c_1, c_2, \dots, c_h\}$ یا مجموعه راس‌های توازن^{۱۸} متناظر با سطرها و $V_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ مجموعه راس‌های بیت^{۱۹} یا راس‌های متغیر^{۲۰} متناظر با ستون‌های H می‌باشد به طوری که c_i و b_j نمایش به ترتیب سطر i ام و ستون j ام از ماتریس H است. در این حالت c_i به b_j توسط یک یال متصل می‌گردد اگر و تنها اگر $h_{i,j} = 1$. به گراف دوبخشی یادشده گراف ترنسیت متناظر با ماتریس H گفته می‌شود. در اینجا منظور از کمر کد، کمر گراف ترنسیت متناظر با آن است.

گراف ساختاری کدهای با وزن ستونی ۲

در مرجع [۶۸] برای طراحی کدهای $LDPC(n, 2, k)$ ساختار گرافی جدیدی معرفی شده است که گراف ساختاری نام دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۲ فرض کنید $H = (h_{i,j})_{h \times n}$ یک ماتریس بررسی توازن برای یک کد $LDPC(n, 2, k)$ با وزن سطری و ستونی یکنواخت به ترتیب برابر با k و 2 باشد. گراف G متناظر با ماتریس H به شرح زیر ساخته می‌شود:

فرض کنید $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_h\}$ مجموعه راس‌های G باشد به طوری که راس v_i متناظر با سطر i ام ماتریس H است. در این صورت متناظر با هر یک از ستون‌های H مانند ستون j ام، دو راس v_{i_1} و v_{i_2} را با یک یال به یکدیگر وصل می‌کنیم اگر و تنها اگر $h_{i_1,j} = h_{i_2,j} = 1$. گراف حاصل گراف ساختاری متناظر با ماتریس H نامیده می‌شود.

^{۱۷}low-density parity-check code

^{۱۸}check node

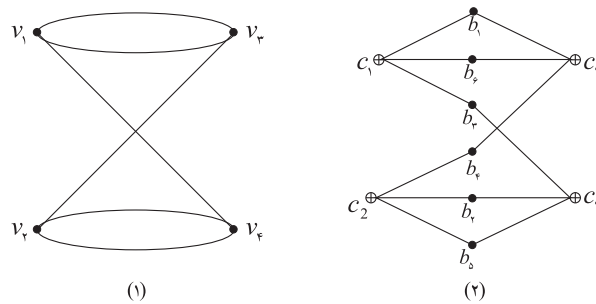
^{۱۹}bit node

^{۲۰}variable node

مثال ۱ فرض کنید ماتریس H داده شده با رابطه (۱)، ماتریس بررسی توازن یک کد $LDPC(6, 2, 3)$ باشد.

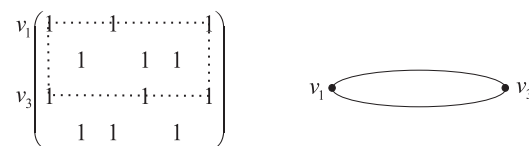
$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

گراف‌های (۱) و (۲) در شکل ۱-۱ به ترتیب گراف ساختاری و تتر متناظر با ماتریس H را نشان می‌دهد.

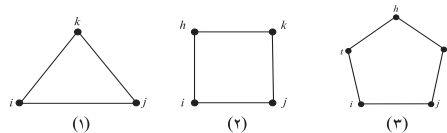


شکل ۱-۱: (۱). گراف ساختاری ماتریس رابطه (۱)، (۲). گراف تتر متناظر با ماتریس H رابطه (۱).

ملاحظه می‌شود که اگرچه گراف تتر یک کد ساده است، ولی گراف ساختاری آن می‌تواند یک گراف غیرساده با یال‌های موازی باشد. به طور نمونه، یک دور به طول ۲ موجود در گراف ساختاری و ماتریس بررسی توازن H را می‌توان در شکل ۱-۲ مشاهده نمود. در شکل ۱-۳، دورهای به طول ۳، ۴ و ۵ موجود در گراف ساختاری یک کد نمایش داده شده‌اند.



شکل ۱-۲: یک دور به طول ۲ موجود در گراف ساختاری.



شکل ۱-۳: دورهای به طول ۳، ۴ و ۵ موجود در یک گراف ساختاری.

طول کوتاهترین دور در گراف ساختاری یک کد $LDPC(n, 2, k)$ کم‌ساختاری آن کد نامیده می‌شود.

در مورد کدهای با وزن ستونی ۲ ارتباط میان کم‌ساختاری و می‌نیم فاصله کد به شرح زیر است.

گزاره ۱ می‌نیمم فاصله یک کد با وزن ستونی ۲ با کمر ساختاری آن برابر است.

اثبات می‌دانیم که می‌نیمم فاصله یک کد دودویی با کمترین تعداد از ستون‌های ماتریس بررسی توازن که جمع برداری آنها روی میدان \mathbb{F}_2 برابر صفر باشد برابر است. به آسانی دیده می‌شود این ستون‌ها تشکیل یک دور در گراف ساختاری کد را می‌دهند که طول آن می‌نیمم است. □

همچنین ارتباط میان کمر و کمر ساختاری یک کد با وزن ستونی ۲ را مطابق لم زیر می‌توان مشاهده نمود.

گزاره ۲ کمر یک کد با وزن ستونی ۲ دو برابر کمر ساختاری آن است.

اثبات فرض کنید C یک کد $LDPC(n, 2, k)$ باشد. با توجه به ساختار گراف‌های متناظر، دیده می‌شود که هر یال در گراف ساختاری متناظر با یک مسیر به طول ۲ در گراف تنر آن است، زیرا هر یال در گراف ساختاری کد C معادل با دو درایه ناصفر موجود در یک ستون از ماتریس بررسی توازن مانند $h_{i_1, j}$ و $h_{i_2, j}$ است (یعنی $h_{i_1, j} = h_{i_2, j} = 1$) که در نتیجه مسیر متناظر با آن در گراف تنر کد مسیری است که راس توازن متناظر با سطر i_1 را به راس بیتهی موجود در ستون j وصل می‌کند و از آنجا به راس توازن متناظر با سطر i_2 می‌رود. بنابراین در حالت کلی هر دور با l یال در گراف ساختاری متناظر با یک دور با $2l$ یال در گراف تنر کد است. به عکس، از هر دور در گراف تنر دوری با طول نصف در گراف ساختاری متناظر کد به دست می‌آید. بنابراین کمر ساختاری کد C نصف کمر گراف تنر متناظر با آن است. □

با توجه به ارتباط کمر و کمر ساختاری، به جهت سادگی در بیان، از این پس قرارداد زیر را لحاظ می‌نماییم.

قرارداد ۱ با توجه به گزاره ۲، از این پس می‌پذیریم که کمر در یک گراف ساختاری (یا یک زیرگراف از آن) دو برابر طول کوتاهترین دور موجود در آن (یا زیرگراف مربوطه) بوده و بنابراین بدون کاستن از کلیت مفهوم کمر را می‌آوریم که همان کمر گراف تنر یا گراف ساختاری متناظر با آن کد است.

در مرجع [۶۸] سه کد $LDPC(n, 2, k)$ برای $k = 3, 4, 5$ با کمرهای به ترتیب $12, 16, 20$ ساخته شده‌اند. گراف ساختاری این کدها مبتنی بر تعریف واژه جدیدی به نام شیب است که از آن برای ساخت گراف‌هایی با ساختار استوانه‌ای با طول و عرض معین بهره گرفته شده و به صورت زیر تعریف می‌شود.

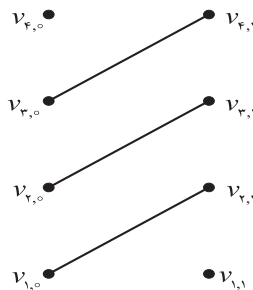
فرض کنید برای اعداد صحیح مثبت m و l ، مجموعه‌های مجزای مرتب از راس‌های یک گراف ساختاری به صورت $V_0 = \{v_{1,0}, v_{2,0}, \dots, v_{m,0}\}$ و $V_1 = \{v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{m,1}\}$ داده شده‌اند. حال اگر این دو مجموعه را به ترتیب از پایین به بالا و از چپ به راست روبه‌روی یکدیگر قرار دهیم در این صورت شیب یال موجود از راس $v_{i_0,0}$ به $v_{i_1,1}$ برابر $s = i_1 - i_0$ تعریف می‌شود. همچنین در این حالت زوج شیب (s_1, s_2) را قابل قبول^{۲۱} گویند هرگاه $s_1 \geq 0$ و $s_2 = s_1 - m$ و بنابراین $s_2 \leq 0$.

^{۲۱}admissible slop

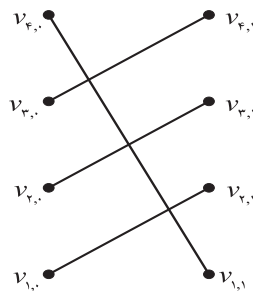
مثال ۲ در حالت $m = 4$ ، شکل ۱-۴ معرف یال‌های با شیب یک است. واضح است که در این حالت اگر s مقدار شیب یال موجود با دو راس متعلق به مجموعه‌های V_0 و V_1 باشد آنگاه داریم:

$$-(m-1) \leq s \leq m-1.$$

همچنین تعداد یال‌هایی موازی با شیب معین s برابر $|s| - m$ است. شکل ۱-۵ معرف یال‌های با زوج شیب قابل قبول $(1, -3)$ برای $m = 4$ است.



شکل ۱-۴: نمایشی از یال‌های با شیب ۱.



شکل ۱-۵: یک مجموعه از یال‌های با زوج شیب قابل قبول $(1, -3)$.

به همین ترتیب یک مجموعه از شیب‌ها را یک مجموعه از شیب‌های قابل قبول^{۲۲} گویند هرگاه عناصر آن مجموعه را بتوان به زوج شیب‌های قابل قبول افراز کرد. به طور مثال در حالت $m = 5$ ، مجموعه $A = \{(4, -1), (0, 0), (2, -3)\}$ یک مجموعه از شیب‌های قابل قبول است، ولی با اضافه نمودن زوج $(2, -2)$ به مجموعه A ، دیگر A یک مجموعه از شیب‌های قابل قبول نخواهد بود، زیرا زوج $(2, -2)$ قابل قبول نیست.

توجه کنید که در حالت $|V_0| = |V_1| = m$ ، تعداد زوج شیب‌های قابل قبول متمایز در A حداکثر

^{۲۲}admissible slops

می‌تواند برابر m باشد. برای این منظور نیز کافی است مجموعه زوج شیب‌های قابل قبول را به صورت $A = \{(0, 0), (1, 1 - m), (2, 2 - m), \dots, (m - 1, -1)\}$ در نظر بگیریم که در این حالت گراف ساختاری کد با گراف دوبخشی کامل $K_{m,m}$ یکرخت خواهد بود.

با تعمیم حالت قبل، فرض کنید اعداد صحیح مثبت m و l داده شده‌اند و به ازای j ، $0 \leq j \leq l - 1$ ، داریم $V_j = \{v_{1,j}, v_{2,j}, \dots, v_{m,j}\}$. حال V_j ها را به طور قائم و به ترتیب از پایین به بالا و از چپ به راست در کنار یکدیگر قرار داده و در آخر نیز یک کپی از مجموعه V_0 را قرار می‌دهیم. فرض کنید A_0 تا A_{l-1} مجموعه‌هایی از شیب‌های قابل قبول به عرض m باشند. در این حالت به ازای هر i ، $0 \leq i \leq l - 1$ ، و هر زوج شیب دلخواه از مجموعه A_j مانند (s, s') ، تمامی یال‌های با شیب s (یا s') را از V_j به V_{j+1} رسم می‌کنیم که در آن اندیس $j + 1$ در پیمانه l حساب شده است. در این صورت گراف حاصل را یک گراف استوانه‌ای با طول l و عرض m نامیده و یک کد با گراف ساختاری استوانه‌ای را نیز یک کد استوانه‌ای می‌نامیم.

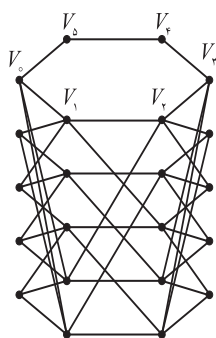
در اینجا زیرگراف دوبخشی القا شده از V_j به V_{j+1} را بخش j ام نامیده و با $S_j = \langle V_j, V_{j+1} \rangle$ نمایش می‌دهیم که در آن اندیس j در V_j یا S_j در پیمانه طول استوانه (مقدار l) محاسبه شده و مبنای قرارداد ما در ادامه مطالب خواهد بود.

مثال ۳ شکل ۱-۷ نمایش یک گراف استوانه‌ای با طول ۶ و عرض ۵ متناظر با یک کد استوانه‌ای $LDPC(30, 2, 5)$ است. در این شکل مجموعه زوج شیب‌های قابل قبول موجود در بخش‌های گراف به ترتیب به صورت مجموعه‌های A_0 تا A_5 است:

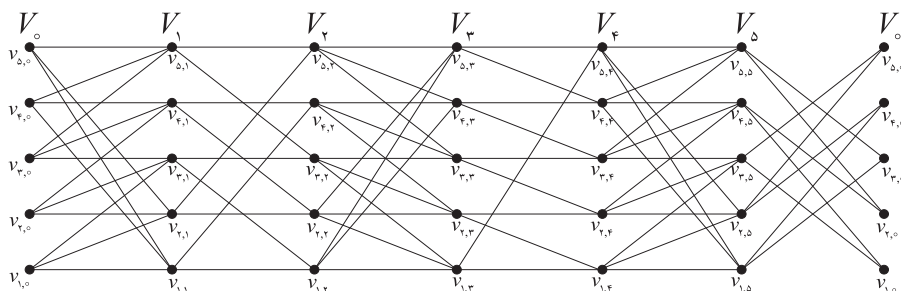
$$\begin{aligned} A_0 &= \{(0, 0), (1, -4), (2, -3)\}, & A_1 &= \{(0, 0), (3, -2)\}, \\ A_2 &= \{(0, 0), (3, -2), (4, -1)\}, & A_3 &= \{(0, 0), (4, -1)\}, \\ A_4 &= \{(0, 0), (1, -4), (2, -3)\}, & A_5 &= \{(2, -3), (3, -2)\}. \end{aligned}$$

توجه به این نکته ضروری است که شیب یال‌ها در بخش S_j با توجه به مجموعه مبدا یا V_j و مجموعه مقصد یا V_{j+1} به دست آمده است و بنابراین متناظر با هر زوج شیب قابل قبول در بخش $S_j = \langle V_j, V_{j+1} \rangle$ مانند (s, s') ، زوج شیب قابل قبول $(-s', -s)$ را در بخش وارون S_j یعنی $S'_j := \langle V_{j+1}, V_j \rangle$ خواهیم داشت. البته نمایش مورد نظر یک نمایش گسترده یا مسطح است که با استفاده از یک دیدگاه توپولوژیکی و یکی نمودن نقاط انتهایی (مجموعه V_0)، می‌توان به یک نمایش استوانه‌ای از آن مانند شکل ۱-۶ دست یافت.

در گراف استوانه‌ای بالا مجموعه نقاطی که دارای عرض یکسان هستند، نقاط هم‌سطح نامیده می‌شوند. به عبارت دیگر تمامی نقاط $v_{i,0}, v_{i,1}, \dots, v_{i,l-1}$ برای یک i ، $1 \leq i \leq m$ ، تشکیل سطح i ام از گراف مورد نظر را می‌دهند.



شکل ۱-۶: یک گراف استوانه‌ای با طول ۶ و عرض ۵.



شکل ۱-۷: نمایش گسترده یک گراف استوانه‌ای با طول ۶ و عرض ۵.

۳-۱-۱ برخی مفاهیم ترکیبیاتی

در این قسمت برخی مفاهیم ترکیبیاتی مورد نیاز را از مرجع [۱۵] آورده‌ایم. فرض کنید λ ، v و k اعداد صحیح و مثبتی باشند به طوری که $v > k \geq 2$. همچنین فرض کنید X_v یک مجموعه با v عنصر است که به عناصر آن مجموعه نقاط می‌گویند. در اینجا فرض می‌کنیم $X_v = \{1, 2, \dots, v\}$. در این صورت خانواده \mathcal{A} را یک λ -ساختار 23 از مرتبه k روی X_v (یا به اختصار $C_{v,k,\lambda}$) گوئیم هرگاه واجد خواص زیر باشد:

۱. \mathcal{A} یک خانواده از زیرمجموعه‌های X_v است که به هر یک از آنها یک بلوک می‌گویند.

۲. هر بلوک شامل دقیقاً k نقطه است.

۳. هر جفت از نقاط متمایز X_v حداکثر در λ بلوک واقع است.

ملاحظه می‌شود که اگر $\lambda > 1$ آنگاه $C_{v,k,\lambda}$ ممکن است شامل بلوک‌های تکراری باشد؛ از این رو دربند ۱ از کلمه "خانواده" به جای "مجموعه" استفاده شده است. همچنین در حالت $\lambda = 1$ ، یک $C_{v,k,\lambda}$ را به اختصار با $C_{v,k}$ نمایش می‌دهیم.

²³ λ -configuration

در یک $C_{v,k}$ مجموعه $\{i_1, i_2, \dots, i_u\}$ از عناصر X_v ، هم‌بلوک ^{24}CB یا CB گفته می‌شود هرگاه بلوکی از $C_{v,k}$ مانند B وجود داشته باشد به طوری که $\{i_1, i_2, \dots, i_u\} \subseteq B$.

طبق قضایایی ثابت می‌شود که اگر r_x تعداد حضور نقطه $x \in X_v$ در بلوک‌های یک $C_{v,k,\lambda}$ باشد آنگاه $r_x \leq \frac{\lambda(v-1)}{k-1}$. در تعریف بالا اگر در بند ۳ به جای کلمه حداکثر از کلمه دقیقاً استفاده گردد آنگاه (X_v, \mathcal{A}) یک $^{25}BIBD(v, k, \lambda)$ است. از تعریف واضح است که هر $BIBD(v, k, \lambda)$ یک $C_{v,k,\lambda}$ است. همچنین در حالت $k = 3$ و $\lambda = 1$ یک $BIBD(v, k, \lambda)$ را یک سیستم سه‌تایی اشتاینر یا $^{26}STS(v)$ می‌گویند. ثابت می‌شود که برای یک $v \in \mathbb{N}$ ، شرط لازم و کافی برای وجود $STS(v)$ آن است که $v \equiv 3 \pmod{6}$ یا $v \equiv 1 \pmod{6}$.

مثال ۴ اگر

$$\mathcal{A} = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 6, 7\}, \{1, 3, 7\}\}$$

آنگاه \mathcal{A} یک $STS(7)$ است.

در جدول پیوست شماره ۷-۸ مثال‌هایی از $STS(9)$ ، $STS(13)$ ، $C_{15,3}$ و $C_{19,5}$ آرایه شده است که در این رساله از آن‌ها استفاده شده است.

ماتریس همانی شیفت‌یافته

با شیفت ستون‌های ماتریس همانی \mathcal{I}_m به اندازه شیب s به سمت پایین، شیفت‌یافته ماتریس همانی از مرتبه m به اندازه s را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{I}_m^s = \begin{pmatrix} \circ & \mathcal{I}_s \\ \mathcal{I}_{m-s} & \circ \end{pmatrix}$$

در حالتی که m معین باشد، به منظور سادگی به جای \mathcal{I}_m^s از نماد \mathcal{I}^s استفاده می‌شود.

مثال ۵ شیفت‌یافته ماتریس همانی از مرتبه ۴، به اندازه ۱ به صورت زیر است.

$$\mathcal{I}^1 = \mathcal{I}_4^1 = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & 1 \\ 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 1 & \circ \end{pmatrix}$$

²⁴co-block

²⁵balance incomplete block design

²⁶steiner triple system

تعریف ۳ منظور از نمایش ساده ماتریس H روی میدان دودویی $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ نمایشی است که در آن عناصر H به صورت صفر و یک آمده است، در حالی که در نمایش بلوکی، هر یک از عناصر H خود یک ماتریس است که در اصطلاح آن را یک بلوک نامیده و یک سطر (یا ستون) ماتریس H در این حالت سطر (یا ستون) بلوکی نامیده می شود. در نمایش بلوکی ماتریس H اگر برای یک m ثابت، هر یک از بلوک ها ماتریس های مربعی از مرتبه m باشند آنگاه منظور از عرض H همان مقدار m است.

همچنین ماتریسی که متشکل از بلوک های ماتریس همانی شیفته یافته و بلوک های صفر از مرتبه معین m باشد را ماتریس مدور از مرتبه m نامیده و منظور از یک کد مدور از مرتبه m ، یک کد با ماتریس بررسی توازن مدور از مرتبه m است.

مثال ۶ اگر $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ، $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

آنگاه $H = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ نمایش بلوکی ماتریس H با دو سطر و دو ستون بلوکی است. نمایش ساده H به صورت زیر است.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

۱-۲ نمودار کارآیی کد بر حسب نسبت خطای بی‌تی

در این رساله، کدهای ساخته شده در هر فصل را با کدهای تصادفی [۷۰] و برخی کدهای جبری ساخته شده در سال های اخیر مقایسه نموده و میزان خطای کدگشایی بر حسب نسبت خطای بی تی BER ^{۲۷} محاسبه شده است. در اینجا برنامه شبیه سازی تحت زبان C در فضای لینوکس صورت پذیرفته و پس از آن با انتقال نتایج به نرم افزار مطلب در ویندوز، نمودارهای کارآیی مربوطه ترسیم شده است. الگوریتم کدگشایی کدهای خلوت مطرح شده در این رساله الگوریتم مجموع- حاصلضرب^{۲۸} است. تعداد بلوک های ورودی را ۵۰۰ و تعداد تکرارها برابر ۲۰ در نظر گرفته شده اند.

در نمودارهای ارایه شده منظور از $T^3(m, l, k; n, r)$ یک کد نوع سوم با عرض m ، طول l و درجه k است که دارای کمر ماکزیمم می باشد. در این حالت $n = mlk/2$ و $r \simeq 1 - 2/k$ به ترتیب طول و نرخ کد

^{۲۷}bit error rate

^{۲۸}sum-product

مورد نظر می‌باشند. همچنین منظور از $R(r, n)$ یا $R(h, n; r)$ کد تصادفی مک‌کی (با گرث حداقل ۶) با ماتریس بررسی توازن دودویی $H = (h_{i,j})_{h \times n}$ و نرخ تقریبی $r \simeq 1 - h/n$ است. در ضمن رسیدن به جواب در مورد برخی از الگوریتم‌های تولید کد با کمر بالا از پیچیدگی خاصی برخوردار بوده است که با اعمال برخی محدودیت‌ها روی برنامه و استفاده از برخی نرم افزارهای دیگر مانند Maple و C# به جواب رسیده‌ایم.

فصل ۲

کدهای نوع اول و دوم

هدف ما در این فصل ساخت کدهای $LDPC(n, 2, k)$ منظم با کمر بالا برای $k = 3, 4$ مبتنی بر ساخت گراف ساختاری آنها است. علت این انتخاب در این است که الگوریتم‌های کدگشایی نظیر الگوریتم مجموع-حاصلضرب [۲۵] برای کدهای با کمر بالا (طی یک فرایند بازگشتی) زودتر به جواب رسیده و از پیچیدگی محاسباتی کمتری برخوردار است. در نگاه اول به نظر می‌رسد که با گسترش طول و عرض در ساختار استوانه‌ای مورد نظر و یافتن مجموعه شیب‌های مطلوب در هر بخش به کدهای با گراف ساختاری با کمر بالاتر می‌توان دست یافت، ولی ثابت می‌کنیم که حداکثر این کمر برای کدهای استوانه‌ای مورد نظر برای $k = 3$ برابر ۲۴ و برای $k = 4$ برابر ۱۶ است. پس از آن توسط چند قضیه اساسی به یافتن روش‌هایی مبتنی بر معادلات خطی هم‌نهشتی برای یافتن زوج شیب‌های مطلوب در هر بخش که ما را به این کران‌های بالا می‌رسانند، می‌پردازیم. سرانجام با ارایه یک الگوریتم قطعی و تعیین حدود ضرایب برای کاهش پیچیدگی الگوریتم، یک جدول از کدهای نوع اول و دوم با گراف با طول حداکثر ۱۰ و عرض می‌نیم که دارای کمر ماکزیمم هستند را معرفی می‌نماییم.

فرض کنید $S_j = \langle V_j, V_{j+1} \rangle$ بخش j ام از گراف ساختاری یک کد استوانه‌ای $LDPC(n, 2, k)$ با عرض m باشد. در این حالت می‌توان مطابق لم زیر نشان داد که وجود یک زوج شیب قابل قبول در بخش S_j متناظر با یک زیرماتریس مدور از مرتبه m در ماتریس بررسی توازن کد است.

لم ۱. وجود یک زوج شیب قابل قبول (s, s') از V_j به V_{j+1} در گراف ساختاری یک کد معادل وجود

زیرماتریس $\begin{pmatrix} I \\ I^s \end{pmatrix}$ در ماتریس بررسی توازن متناظر با آن گراف است.

اثبات فرض کنید $V_j = \{v_{1,j}, v_{2,j}, \dots, v_{m,j}\}$ و $V_{j+1} = \{v_{1,j+1}, v_{2,j+1}, \dots, v_{m,j+1}\}$ که در آن راس $v_{i,j}$ نمایش $i + j$ امین سطر از ماتریس بررسی توازن کد است. می توان به آسانی مشاهده نمود که وجود زوج شیب قابل قبول (s, s') در بخش S_j معادل با یک تناظر یک به یک میان دو مجموعه V_j و V_{j+1} است که راس $v_{i,j}$ را برای $1 \leq i \leq m - s$ ، توسط یک یال با شیب s به راس $v_{i+s,j+1}$ و برای $m - s + 1 \leq i \leq m$ توسط یک یال با شیب s' به راس $v_{i+s',j+1}$ متصل می سازد و این نیز در ماتریس بررسی توازن کد معادل با زیرماتریس $\begin{pmatrix} I \\ I^s \end{pmatrix}$ است. \square

مثال ۷ زوج شیب قابل قبول $(1, -3)$ در بخش S_0 گراف ساختاری شکل ۱-۵ معادل زیرماتریس زیر از ماتریس بررسی توازن کد متناظر با آن است که در آن رتبه هر یک از ماتریس های صفر یا همانی شیفیت یافته از مرتبه ۴ است.

$$\begin{matrix} v_{1,0} \\ v_{2,0} \\ v_{3,0} \\ v_{4,0} \\ v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ v_{3,1} \\ v_{4,1} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ \hline & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ I^1 \end{pmatrix}$$

۱-۲ کدهای نوع اول و دوم

یک کد نوع اول به صورت زیر تعریف می شود.

تعریف ۴ یک گراف نوع اول گرافی استوانه ای است که هر بخش آن دارای دو زوج شیب قابل قبول بوده و کد استوانه ای متناظر با آن یک کد نوع اول نامیده می شود که یک کد $LDPC(n, 2, 4)$ است.

مثال ۸ شکل ۱-۲ گراف ساختاری یک کد $LDPC(48, 2, 4)$ نوع اول به طول ۸ و عرض ۶ است. در مرجع [68] یک کد نوع اول به طول ۸، عرض ۲۳ و کمر ۱۶ آورده شده است که در آن اگر A_i نمایش