بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه قم

دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض

عنوان:
بررسی (α, β)- متریک ها با انحنای بروالد ضعیف

استاد راهنما:

دکتر اکبر طیبی

نگارنده:

سمیه سهرابی نیا

آذر ۱۳۹۳

تاییدیه هیات داوران

ماحصل آموخته هایم را تقدیم می کنم به ساحت قدسی پرده نشین عصر انتظار، حضرت صاحب الامر (عج) و جد بزرگوارشان حضرت محمد (ص). و به آنان که مهر آسمانی شان آرام بخش آلام زمینی ام است به استوارترین تکیه گاهم، دستان پرمهر پدرم به سبزترین نگاه زندگیم، چشمان سبز مادرم که هرچه آموختم در مکتب عشق شما آموختم و هرچه بکوشم قطره ای از دریای بی کران مهربانیتان را سپاس نتوانم بگویم. امروز هستی ام به امید شماست و فردا کلید باغ بهشتم رضای شما را آوردی گران سنگ تر از این ارزان نداشتم تا به خاک پایتان نثار کنم، باشد که حاصل تلاشم نسیم گونه غبار خستگیتان را بزداید. و به همسفران مهربان زندگیم، خواهران و برادرانم که با هم آغاز کردیم، در کنار هم آموختیم و به امید هم به آینده چشم می دوزیم. قلبم لبریز از عشق به شماست و خوشبختی تان منتهای آرزویم.

بوسه بر دستان پرمهرتان

تقدیر و تشکر

نخستین سپاس و ستایش از آن خداوندی است که بنده کوچکش را در دریای بیکران اندیشه، قطره ای ساخت تا وسعت آن را از دریچه اندیشه های ناب آموزگارانی بزرگ به تماشا نشیند. لذا اکنون که در سایه سار بنده نوازی هایش پایان نامه حاضر به انجام رسیده است، بر خود لازم می دانم تا مراتب سپاس را از استاد راهنمای عالی قدر خود، جناب آقای دکتر طیبی به جا آورم که اگر دست یاریگرشان نبود، هرگز این پایان نامه به انجام نمی رسید. و سپاس از مهربانترین همراهان زندگیم، خانواده عزیزم که حضورشان در فضای زندگیم مصداق بی ریای سخاوت بوده است.

چکیده فارسی

در این پایان نامه ما دو مفهوم فضاهای داگلاس و فضاهای لندزبرگ که حالت کلی از فضاهای بروالد است، را مورد مطالعه قرار می دهیم. باکچو تعریفی از فضای بروالد ضعیف ارائه می دهد که حالت کلی از فضای بروالد است. در این پایان نامه، شرایطی را که فضای فینسلر مسلح به یک و یا چند (α, β)- متریک باشند، را با داشتن انحنای بروالد ضعیف مورد بررسی قرار می دهیم. سپس (α, β)- مترهای خاص مانند متر سری نا متناهی ومتر مکعبی با انحنای بروالد ضعیف را دسته بندی می نماییم.

در حقیقت هدف از این پایان نامه، بررسی مقاله زیر می باشد.

Il-Yong Lee and Myung-Han Lee, On Weakly-Berwald spaces of special (α, β)-metrics, Bull. Korean Math. Soc. 43 (2006), No. 2, pp. 425–441.

کلمات کلیدی: فضای بروالد، فضای متریک مکعبی، فضای داگلاس، سری های نامتناهی (α, β)- متریک

فهرست مطالب

لیست نمادها

مجموعه اعداد حقیقی	R
مجموعه میدانهای برداری روی M	$\chi(M)$
مجموعه میدان های ۱- فرمی روی M	$\Omega(M)$
اسپری	G
ضرایب اسپری	G^i
ضرایب الصاق خطی	${\Gamma^i}_{jk}$
متر زاویه‌ای	h_{ij}
تانسور کارتان	C
ضرایب الصاق غیر خطی	N^i_j
تانسور میانگین کارتان	I
تانسور لندزبرگ	L
تانسور بروالد	B
تانسور میانگین بروالد	E
تانسور داگلاس	D

فصل ۱

پیش نیاز ها

۱.۱ تانسورها

بسیاری از تکنیک های هندسه به وسیله تانسور بیان می شوند تا جایی که مثلا متر ریمانی خودش یک تانسور است و البته تانسورها سراسر هندسه فینسلری را نیز پر کرده اند. به همین دلیل در اینجا قسمتی را به آنها اختصاص داده ایم.

۱.۱.۱ تانسورها روی یک فضای برداری

فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی با بعد متناهی باشد. دقت کنید که در سراسر این پایان نامه همه ی فضاهای برداری با بعد متناهی هستند مگر اینکه خلافش صریحا ذکر شود و البته همه فضاهای برداری بدون استثناء روی میدان اعداد حقیقی در نظر گرفته می شوند. می دانیم که V^* - دوگان فضای V - مجموعه همه یک فرمی ها ویا همان تابعک های خطی روی V می باشد. نگاشت طبیعی $V^* \times V \longrightarrow R$ را اینگونه نمایش می دهیم

$$\begin{cases} V^* \times V \longrightarrow R \\ (\omega, X) \longrightarrow \langle \omega, X \rangle = \omega(X), \qquad \omega \in V^*, X \in V \end{cases}$$

یک تانسور l-هموردا روی V نگاشت چند خطی

$$F : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{l \text{ بار}} \longrightarrow R$$

می باشد. به طور مشابه یک تانسور k-پادوردا یک نگاشت چند خطی

$$F : \overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{\text{بار } k} \longrightarrow R$$

می باشد. اغلب اوقات ما تانسورهایی داریم که ترکیبی از این دو حالت فوق اند. یک تانسور $\binom{k}{l}$ که به آن l-هموردا و k-پادوردا می گوییم یک نگاشت چند خطی به فرم

$$F : \overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{\text{بار } k} \underbrace{\times V \times \cdots \times V}_{\text{بار } l} \longrightarrow R$$

می باشد. در واقع در بسیاری از حالات با نگاشت هایی چند خطی سروکار داریم که l تا پارامتر ۱-فرمی و k پارامتر برداری دارند ولی ترتیب پارامترهایشان لزوما مثل فوق نیست با این حال به آنها نیز تانسور نوع $\binom{k}{l}$ می گوییم.

مجموعه همه تانسورهای k-پادوردا را با $T^k(V)$ نشان می دهیم و فضای همه تانسورهای l-هموردا را با $T_l(V)$ نمایش می دهیم. به همین صورت مجموعه ی همه تانسورهای $\binom{k}{l}$ را با $T_l^k(V)$ نمایش می دهیم. تساوی های $T_\circ^k(V) = T^k(V)$، $T_l^\circ(V) = T_l(V)$، $T^۱(V) = V^{**}$ و $T_۱(V) = V^*$ بدیهی هستند. همین طور قرارداد می کنیم که $T^\circ(V) = R$.

۲.۱.۱ p-فرمی ها

یک p-فرمی یک تانسور p-هموردا متناوب است. بدین معنا که ω را یک p-فرمی روی فضای برداری V گوییم هرگاه

$$\omega : V \times \cdots \times V \longrightarrow R$$

تابعی p-خطی بوده و متناوب باشد، یعنی برای هر $۱ \leq i, j \leq p$ داشته باشیم

$$\omega(X_۱, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_p) = -\omega(X_۱, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots, X_p)$$

یا به عبارتی هرگاه جای دو متغیر در آن عوض شود، علامتش تغییر کند. با استفاده از خواص جایگشتها از رابطه ی فوق برای هر جایگشت $\delta = (\delta_۱, \ldots, \delta_p)$ در $\{۱, \ldots, p\}$ تساوی زیر به

دست می آید:

$$\omega(X_۱, \dots, X_p) = sgn(\delta)\omega(X_۱, \dots, X_p)$$

در اینجا $sgn(\delta)$ علامت جایگشت δ می باشد. اگر δ زوج باشد، $sgn(\delta) = ۱$ و اگر فرد باشد، $sgn(\delta) = -۱$.

از تعریف فوق نتیجه می شود که اگر دو عضو از $X_۱, \dots, X_p$ با هم برابر باشند، آنگاه :

$$\omega(X_۱, \dots, X_p) = ۰$$

۳.۱.۱ ضرب تانسورها

ضرب روی تانسورها به روش بسیار طبیعی تعریف می شود. اگر F یک تانسور $\binom{k}{l}$ و G یک تانسور $\binom{p}{q}$ باشد آنگاه $F \otimes G$ به روش زیر تعریف می شود

$$F \otimes G(\omega^۱, \cdots, \omega^{l+q}, X_۱, \cdots, X_{k+p}) =$$
$$F(\omega^۱, \cdots, \omega^l, X_۱, \cdots, X_k)G(\omega^۱, \cdots, \omega^q, X_۱, \cdots, X_p)$$

و روشن است که تانسوری $\binom{q+l}{p+k}$ خواهد بود.

۴.۱.۱ مولفه های تانسور و قاعده جمع بندی انیشتین

فرض کنیم $(E_۱, \cdots, E_n)$ پایه ای برای V باشد. در این صورت می توان فرض کرد که $(\varphi^۱, \cdots, \varphi^n)$ پایه ی دوگان متناظر آن برای V^* باشد یعنی $\varphi^i(E_j) = \delta^i_j$. در این صورت براحتی می توان دید که

$$\left\{ E_{j_۱} \otimes \cdots \otimes E_{j_l} \otimes \varphi^{i_۱} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_k} \middle| ۱ \leq j_۱, \cdots, j_l \leq l \quad ۱ \leq i_۱, \cdots, i_k \leq k \right\}$$

یک پایه برای $T^k_l(V)$ است. دقت کنید که E_iها بعنوان اعضای $V = V^{**}$ به حساب می آیند و ضرب تانسوری برای آنها معنا دار است. این نشان می دهد که بعد $T^k_l(V)$ برابر با $(dimV)^{k+l}$ است. حال اگر F عضوی از $T^k_l(V)$ باشد می توان نوشت

$$F = F^{j_۱\cdots j_l}_{i_۱\cdots i_k} E_{j_۱} \otimes \cdots \otimes E_{j_l} \otimes \varphi^{i_۱} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_k} \quad (۱.۱)$$

دقت کنید که در بالا از قاعده موسوم به قاعده جمع بندی انیشتین استفاده کرده ایم. این قاعده بدین صورت است که در هر عبارتی که اندیس یکسانی دوبار، یکبار در پایین و بار دیگر در بالا ظاهر شده باشد چنین فرض می شود که آن عبارت جمع همه ی مقادیر ممکن برای اندیس مذکور می باشد. برای مثال $\omega_i X^i$ یعنی $\Sigma_{i=۱}^{n}\omega_i X^i$.

فصل ۲

هندسه ریمانی

۱.۲ متر ریمان

یک متریک ریمانی روی منیفلد M، یک میدان تانسوری $\binom{\circ}{۲}$ مثل g است که متقارن بوده، یعنی $g(X,Y)=g(Y,X)$ و مثبت معین است یعنی $X \neq \circ \Rightarrow g(X,X) > \circ$. لذا می توان گفت که متریک ریمانی روی هر T_pM یک ضرب داخلی تعریف می کند که آن را با $< X_p, Y_p >= g(X_p, Y_p)$ نمایش می دهیم که X_p و Y_p اعضایی از T_pM هستند. می دانیم که همواره می توان روی هر منیفلد یک متریک ریمانی قرار داد. به یک منیفلد همراه متریک ریمانی داده شده اش منیفلد ریمانی می گوییم.

فرض کنیم p عضوی از منیفلد M باشد. مثل حالت هندسه اقلیدسی طول بردار X_p از T_pM را به صورت $|X_p| =< X_p, X_p >^{\frac{۱}{۲}}$ تعریف می کنیم. همین طور زاویه بین دو بردار X_p و Y_p از T_pM را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\cos\theta = \frac{< X_p, Y_p >}{|X_p| \times |Y_p|}$$

که در آن $\theta \in (\circ, \pi)$.

می گوییم X_p و Y_p بر هم عمودند هرگاه $\theta = \frac{\pi}{۲}$ یا به طور معادل $< X_p, Y_p >= \circ$. لذا به مجموعه بردارهای $\{X_۱, \cdots, X_p\}$ در T_pM متعامد یکه گوییم اگر

$$< X_i, X_j >= \delta_{ij}$$

۱.۱.۲ مثالهایی از مترهای ریمانی

اغلب سایر مثال های متریک ریمانی به طور طبیعی در زیر منیفلدها، منیفلدهای حاصل ضربی و منیفلدهای خارج قسمتی ظاهر می شوند. بعنوان مثال های مهم، متریک القایی و متریک حاصل ضربی را شرح می دهیم.

۲.۱.۲ متریک القایی

فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی و $i : M \longrightarrow \widetilde{M}$ یک نشاننده باشد. در این صورت M یک زیرمنیفلد ایمرشن $\widetilde{M}$ خواهد بود. متریک القایی از $\widetilde{M}$ به M عبارت است از تانسور g با تعریف $g = i^*\widetilde{g}$. با توجه به خواص ایمرشن می توان گفت که g تحدید $\widetilde{g}$ به TM بوده و چون تحدید هر ضرب داخلی به یک زیرفضا، باز یک ضرب داخلی می شود پس به وضوح شرایط متر ریمانی برای g برقرار است.

۳.۱.۲ متریک حاصلضربی

فرض کنیم $(M_۱, g_۱)$ و $(M_۲, g_۲)$ منیفلدهایی ریمانی باشند. می دانیم که منیفلد حاصل ضربی $M = M_۱ \times M_۲$ دارای فضای مماسی در نقطه ی $p = (p_۱, p_۲)$ با خاصیت

$$T_{(p_۱,p_۲)}M = T_{p_۱}M \oplus T_{p_۲}M$$

می باشد.

حال متریک حاصل ضربی روی M را به صورت

$$g(X_۱ + X_۲, Y_۱ + Y_۲) = g_۱(X_۱, Y_۱) + g_۲(X_۲, Y_۲)$$

تعریف می کنیم، که از نقطه نظر ماتریسی می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} (g_۱)_{ij} & ۰ \\ ۰ & (g_۲)_{ij} \end{bmatrix}$$

۴.۱.۲ الصاق

برای تعمیم یک تعریف از فضای R^n به روی منیفلدها باید به این نکته توجه داشته باشیم که این تعریف به دستگاه مختصات موضعی یعنی کارت ها بستگی نداشته باشد. حال برای آنکه بتوانیم مفهوم شتاب یک منحنی روی یک منیفلد را تعریف کنیم لازم است راهی پیدا کنیم که بتوان بدون توجه به مختصات از بردارها (یا میدان های برداری) در طول یک منحنی مشتق گیری نماییم.به این معنا که دو فضای برداری مجاور را توسط یک مشتق گیری به یکدیگر "الصاق" نمود.

فرض می کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر و $\chi(M)$ مجموعه میدان های برداری دیفرانسیل پذیر روی آن باشد.

تعریف ۱.۱.۲ (الصاق)**.** نگاشت

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

را با شرایط زیر، یک الصاق روی منیفلد M می نامیم:

۱. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

۲. $\nabla_Y fX = f\nabla_Y X + (Y \cdot f)X$

که در آن $\forall X, Y, Z \in \chi(M), f, g \in C^\infty(M)$

در واقع ∇ روی توابع، همانند مشتق سویی عمل می کند. الصاق حالت کلی تری از مشتق سویی بوده و میزان تغییرات فرم ها را نیز می توان با استفاده از آن به دست آورد. ∇ را الصاق و ∇_X را مشتق کواریان نسبت به X می نامیم.

تعریف ۲.۱.۲ (مختصات موضعی $\nabla_X Y$)**.** فرض کنیم (x, U) یک کارت مختصات روی منیفلد M همراه با الصاق خطی ∇ باشد. در این صورت $\nabla_X Y$ را در این مختصات می توان به صورت زیر نوشت:

$$\nabla_X Y = (X \cdot Y^i + \Gamma^i_{jk} X^j Y^k) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

که در آن $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i} := \Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k}$ را ضرایب کریستوفل می نامند که توابعی حقیقی روی M می باشند.

تعریف ۳.۱.۲. اگر یک الصاق خطی ∇ روی منیفلد ریمانی (M,g) در شرایط زیر صدق کند، آن را الصاق ریمانی می نامند.

۱- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$

۲- $X < Y, Z >=< \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_X Z >$

که در آن $X, Y \in \chi(M)$

تعریف ۴.۱.۲. فرض کنیم M یک منیفلد و ∇ مشتق کواریان روی M باشد. آنگاه:

$$T : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

را تاب الصاق می نامیم و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\forall X, Y \in \chi(M), \quad T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

الصاق ∇ روی M را تاب$-$آزاد می نامیم هرگاه تاب آن برابر صفر باشد.

تعریف ۵.۱.۲. الصاق ∇ را سازگار با متریک می نامیم هرگاه:

$$X < Y, Z >=< \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_X Z >, \quad X, Y \in \chi(M)$$

تعریف ۶.۱.۲ (قضیه اساسی هندسه ریمانی)**.** روی هر منیفلد ریمانی (M,g) فقط یک الصاق ریمانی موجود است.

۲.۲ ژئودزی

با تسامح می توان گفت که کوتاهترین مسیر بین دو نقطه در فضای M (در همسایگی نرمال) را ژئودزی بین آن دو نقطه می نامیم. در فضای حقیقی R ژئودزی ها همان خطوط راست می باشند که