بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض - گرایش جبر

عنوان

گراف خط وابسته به گراف‌های مقسوم علیه صفر

استاد راهنما

دکتر کاظم خشیارمنش

استاد مشاور

دکتر مژگان افخمی گلی

نگارنده

رؤیا خدابنده بایگی

زمستان ۱۳۹۲

بسمه تعالی

مشخصات پایان‌نامه تحصیلی دانشجویان

دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان: گراف خط وابسته به گراف‌های مقسوم علیه صفر

نام نویسنده: رؤیا خدابنده بایگی

استاد راهنما: دکتر کاظم خشیارمنش

استاد مشاور: دکتر مژگان افخمی گلی

دانشکده: علوم ریاضی	گروه: ریاضی محض	رشته تحصیلی: ریاضی محض - گرایش جبر
تاریخ تصویب: ۱۳۹۲/۲/۲۹		تاریخ دفاع: ۱۳۹۲/۱۱/۹
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد		تعداد صفحات: ۹۹

چکیده پایان‌نامه : یکی از شاخه‌های جدید جبر، جبر ترکیبیاتی است که به ارتباط میان جبر و گراف پرداخته و خواص میان آن‌ها را بررسی می‌کند. به مجموعه عناصر مقسوم علیه صفر حلقه گرافی را می‌توان متناظر کرد که به آن گراف مقسوم علیه صفر می‌گوییم. در این پایان نامه، به مطالعه‌ی گراف خط وابسته به گراف مقسوم علیه صفر حلقه‌های $\mathbb{Z}_n$ و $\mathbb{Z}_n[i]$ می‌پردازیم و خواص آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژگان کلیدی: گراف مقسوم علیه صفر، گراف خط، عدد رنگی، گراف مسطح، گراف اویلری

امضای استاد راهنما: تاریخ:

اظهارنامه

عنوان پایان‌نامه : گراف خط وابسته به گراف‌های مقسوم علیه صفر

اینجانب رؤیا خدابنده بایگی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد نویسنده پایان‌نامه تحت راهنمایی دکتر کاظم خشیارمنش متعهد می‌شوم:

آ. تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.

ب. در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

ج. مطالب مندرج در این پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی به جایی ارائه نشده است.

د. کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد است و مقالات مستخرج با نام "دانشگاه فردوسی مشهد " و یا "Ferdowsi University of Mashhad" به چاپ خواهد رسید.

ه. حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از آن رعایت شده است.

و. درکلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده(یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

ز. درکلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

تقدیم به

روح پاک پدرم که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه ی زندگی ایستادگی کنم

مادر مهربانم به دستان پر مهر و بخشایش بی انتهایش

برادر و خواهرانم به پاس همه ی محبت ها و همراهی هایشان

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر کاظم خشیارمنش صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که از راهنمایی‌های ارزنده ایشان در راستای پیشبرد پژوهش حاصل فراوان بردم و همواره شاگرد مکتب علم و انسانیت و منش والای ایشان هستم.

از استاد گرامی سرکار خانم دکتر مژگان افخمی گلی که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان‌نامه به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

همچنین لازم می‌دانم از اساتید فرهیخته جناب آقای دکتر عباس جعفرزاده و جناب آقای دکتر عرفانیان که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند با تمام وجود تشکر و قدردانی نمایم.

در آخر صمیمانه ترین سپاس خود را تقدیم می‌کنم به مادر، برادر و خواهرانم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

رویا خدابنده بایگی
زمستان ۱۳۹۲

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

در این پایان نامه که بر پایه‌ی مقاله‌های [۱]، [۹]، [۱۰] و [۲۶] است، به ارتباط میان مقسوم علیه‌های صفر یک حلقه‌ی جابه‌جایی و گراف متناظر با آن پرداخته‌ایم. این تحقیقات اولین بار توسط بک [۱] در سال ۱۹۸۸ پایه گذاری شد و سپس توسط اندرسون [۲]، نصیر [۳] و لیوینگستون [۴] ادامه یافت. برای این منظور نیاز به مقدماتی از جبر جابه‌جایی و گراف می‌باشد که در فصل اول به مقدمات و پیش نیازهای جبر جابه‌جایی که از [۱۲] و [۳۰] جمع آوری شده است، می‌پردازیم. همچنین در این فصل، پیش نیازها و مفاهیم اولیه در نظریه گراف را از مرجع [۱۶] مطرح می‌نماییم.

در فصل دوم به معرفی گراف مقسوم علیه صفر می‌پردازیم. در این فصل مثال‌هایی از چند حلقه و گراف مقسوم علیه صفر آن آورده شده است که نشان می‌دهد دو حلقه‌ی غیر یکریخت، ممکن است گراف مقسوم علیه صفر یکریخت داشته باشند. همچنین خواص گراف مقسوم علیه صفر بررسی شده است.

در فصل سوم به مطالعه‌ی گراف خط وابسته به گراف مقسوم علیه صفر حلقه‌ی $\mathbb{Z}_n$ می‌پردازیم. برخی خواص این گراف نظیر کمر، مسطح بودن و عدد رنگی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل چهارم گراف مقسوم علیه صفر حلقه‌ی $\mathbb{Z}_n[i]$ را مطالعه می‌کنیم. برای هر عدد صحیح و مثبت n، تعداد رئوس، قطر و کمر این گراف را مشخص می‌کنیم. همچنین تعیین می‌کنیم برای چه مقادیری از n، این گراف کامل، دو بخشی کامل، مسطح، منظم یا اویلری است.

در فصل پنجم برخی خواص گراف خط وابسته به گراف مقسوم علیه صفر حلقه‌ی $\mathbb{Z}_n[i]$ را بررسی می‌کنیم، از جمله تعیین می‌کنیم چه زمانی این گراف اویلری، همیلتونی یا مسطح است. کمر، قطر و شعاع این گراف را نیز مشخص

[۱] Beck

[۲] Anderson

[۳] Naseer

[۴] Livingston

می‌نماییم.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مباحثی در نظریه‌ی حلقه

در سرتاسر این پایان نامه فرض بر این است که حلقه‌ها جابه‌جایی، یکدار و ناصفر هستند. در این بخش به ارائه مطالبی از جبر جابه‌جایی که در فصل‌های بعد مورد نیاز است پرداخته و از این رو از بیان برهان آن‌ها اجتناب می‌کنیم. خوانندگان می‌توانند به [۱۲] و [۳۰] مراجعه کنند.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار باشد. عنصر $x \in R$ را مقسوم علیه صفر گوییم هرگاه عضو ناصفر $y \in R$ موجود باشد به طوری که $xy = 0$. مجموعه‌ی تمام مقسوم علیه‌های صفر R را با $Z(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. حلقه‌ی R را دامنه صحیح گوییم هرگاه شامل مقسوم علیه صفر غیر بدیهی نباشد. به عبارت دیگر اگر $xy = 0$، آن‌گاه $x = 0$ یا $y = 0$.

گزاره ۳.۱.۱. هر دامنه صحیح متناهی میدان است.

برهان. به گزاره‌ی ۲۷.۱ از [۳۰] مراجعه کنید.

□

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار باشد. ایده‌آل سره $\mathfrak{p}$ از R را اول گوییم هرگاه به ازای هر x و y در R که $xy \in \mathfrak{p}$ نتیجه دهد $x \in \mathfrak{p}$ یا $y \in \mathfrak{p}$.

مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول R را با $Spec(R)$ نمایش می‌دهیم و به آن طیف R می‌گوییم.

لم ۵.۱.۱. ایده‌آل $\mathfrak{p}$ از R اول است اگر و تنها اگر $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ دامنه صحیح باشد.

برهان. به لم ۲۳.۳ از [۳۰] مراجعه کنید.

□

تعریف ۶.۱.۱. ایده‌آل سره $\mathfrak{m}$ از R را بیشین(ماکسیمال) گوییم در صورتی‌که اگر ایده‌آل I از R موجود باشد به طوری‌که $R \subseteq I \subsetneqq \mathfrak{m}$، آن‌گاه $I = R$.

مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های بیشین حلقه‌ی R را با $Max(R)$ نمایش می‌دهیم. بنا به قضیه‌ی ۹.۳ از [۳۰]، در هر حلقه‌ی جابه‌جایی، ایده‌آل بیشین موجود است.

تعریف ۷.۱.۱. اشتراک تمام ایده‌آل‌های بیشین R را رادیکال جیکوبسن[۱] R می‌گوییم و با $J(R)$ نشان می‌دهیم.

لم ۸.۱.۱. $\mathfrak{m}$ ایده‌آل بیشین حلقه‌ی R است اگر و تنها اگر $\frac{R}{\mathfrak{m}}$ میدان باشد.

برهان. به لم ۳.۳ از [۳۰] رجوع کنید.

□

از آن‌جایی که هر میدان دامنه صحیح است، از لم‌های ۵.۱.۱ و ۸.۱.۱ نتیجه می‌شود که هر ایده‌آل بیشین، اول است. اما عکس مطلب در حالت کلی برقرار نمی‌باشد.

گزاره ۹.۱.۱. فرض کنید I و J ایده‌آل‌هایی ازحلقه‌ی جابه‌جایی R باشند که $I \subseteq J$. در این صورت J ایده‌آل بیشین R است اگر و تنها اگر $\frac{J}{I}$ ایده‌آل بیشین $\frac{R}{I}$ باشد.

برهان. به گزاره‌ی ۴.۳ از [۳۰] رجوع کنید. □

[۱] Jacobson radical

تعریف ۱۰.۱.۱. حلقه‌ی R را موضعی[۱] گوییم هرگاه شامل تنها یک ایده‌آل بیشین $\mathfrak{m}$ باشد و آن را با $(R,\mathfrak{m})$ نشان می‌دهیم. در این صورت بنا به گزاره‌ی بالا، $K=\dfrac{R}{\mathfrak{m}}$ میدان است که به آن میدان مانده‌ها می‌گوییم. حلقه‌ی موضعی R را با $(R,\mathfrak{m},K)$ نیز نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و $x\in R$. در این صورت پوچساز[۲] x را با $Ann(x)$ یا $x \ :_R \ ۰$ نمایش می‌دهیم و عبارتست از

$$Ann(x)=\{r\in R \mid rx=۰\}.$$

به وضوح $Ann(x)$ ایده‌آلی از R است که به آن ایده‌آل پوچساز x می‌گوییم.
اکنون فرض کنید M یک R–مدول باشد. در این صورت قرار می‌دهیم

$$Ann(M)=\{r\in R \mid rM=۰\}=\{r\in R \mid rm=۰ \quad \forall m\in M\}.$$

تعریف ۱۲.۱.۱. عنصر x از R را پوچتوان[۳] گوییم هرگاه عدد طبیعی n موجود باشد به طوری که $x^n=۰$. همچنین $y\in R$ را خودتوان[۴] گوییم هرگاه $y^۲=y$.

تعریف ۱۳.۱.۱. حلقه‌ی R را کاهش یافته[۵] گوییم هرگاه شامل عنصر پوچتوان غیر بدیهی نباشد.

تعریف ۱۴.۱.۱. ایده‌آل $\mathfrak{a}$ از R را ایده‌آل پوچ گوییم هرگاه عدد طبیعی n موجود باشد به طوری که $\mathfrak{a}^n=۰$. در این صورت به وضوح به ازای هر $x\in\mathfrak{a}$، $x^n=۰$. لذا عناصر ایده‌آل پوچ، پوچتوان می‌باشند.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از R باشد. در این صورت مجموعه

$$\{r\in R \mid \exists \quad n\in\mathbb{N} \quad ; \quad r^n\in\mathfrak{a}\}$$

[۱] local
[۲] annihilator
[۳] nilpotent
[۴] idempotent
[۵] reduced

ایده‌آلی از R است که آن را رادیکال $\mathfrak{a}$ نامیده و با $\sqrt{\mathfrak{a}}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۶. فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت واریته[۱] $\mathfrak{a}$ را با نماد $V(\mathfrak{a})$ نشان می‌دهیم و عبارتست از

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}.$$

همچنین مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های اول کمین شامل $\mathfrak{a}$ را با $Min(\mathfrak{a})$ نشان می‌دهیم.

لم ۱.۱.۱۷. فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت $\sqrt{\mathfrak{a}} = \cap_{\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})}\mathfrak{p}$. در نتیجه، $\sqrt{0}$ که به آن رادیکال پوچ[۲] حلقه‌ی R گوییم برابر است با $\cap_{\mathfrak{p}\in Spec(R)}\mathfrak{p}$ که با $Nil(R)$ نیز نمایش می‌دهیم.

برهان. به لم ۳.۴۸ از [۳۰] مراجعه کنید.

□

نتیجه ۱.۱.۱۸. فرض کنید $\mathfrak{p}$ ایده‌آلی اول از حلقه‌ی R باشد. در این صورت به ازای هر عدد طبیعی n داریم $\sqrt{\mathfrak{p}^n} = \mathfrak{p}$.

برهان. به گزاره‌ی ۳.۴۷ از [۳۰] مراجعه کنید.

□

گزاره ۱.۱.۱۹. فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی و متناهی باشد. در این صورت عدد اول p و اعداد صحیح و مثبت n، t و l موجوداند به طوری که $|R| = p^n$، $|\mathfrak{m}| = p^t$ و $|\frac{R}{\mathfrak{m}}| = p^l$، بعلاوه $char(R) = p$.

برهان. به گزاره‌ی ۲.۱ از [۶] مراجعه کنید.

□

گزاره ۱.۱.۲۰. فرض کنید $Z(R)$ مجموعه مقسوم علیه‌های صفر حلقه‌ی R باشد. در این صورت $Z(R) = \cup_{0\neq x\in R}\sqrt{0 :_R x}$.

[۱] variety

[۲] nilradical

برهان. به گزاره‌ی ۱۵.۱ از [۱۲] مراجعه کنید.

□

تعریف ۲۱.۱.۱. حلقه‌ی R را نوتری (آرتینی) گوییم هرگاه هر زنجیر صعودی (نزولی) از ایده‌آل‌های آن ایستا باشد. به طور معادل، حلقه R را نوتری (آرتینی) گوییم هرگاه هر مجموعه‌ی ناتهی از ایده‌آل‌های آن، عضو بیشین (کمین) داشته باشد.

گزاره ۲۲.۱.۱. فرض کنید R حلقه‌ای آرتینی باشد. در این صورت هر ایده‌آل اول حلقه‌ی R بیشین است.

برهان. به گزاره‌ی ۱.۸ از [۱۲] مراجعه کنید. □

تعریف ۲۳.۱.۱. یک زنجیر از ایده‌آل‌های اول، دنباله اکیداً صعودی از ایده‌آل‌های اول به صورت $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n$ به طول n است. بعد حلقه‌ی R را سوپریمم طول همه‌ی زنجیرهای ایده‌آل‌های اول آن تعریف می‌کنیم و با $dim(R)$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$dim(R) = sup\{n \mid \exists\ \mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_n \in Spec(R);\ \ \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n\}.$$

بعد حلقه‌ی R همواره یک عدد حقیقی نامنفی یا بی‌نهایت است یعنی $0 \leq dim(R) \leq \infty$.

مثال ۲۴.۱.۱. از آن‌جایی که میدان‌ها هیچ ایده‌آلی بجز صفر وخودشان ندارند، لذا بعد هر میدان صفر است.

مثال ۲۵.۱.۱. چون ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی $\mathbb{Z}$ به صورت $p\mathbb{Z}$ می‌باشد که p عددی اول است، لذا بعد حلقه‌ی $\mathbb{Z}$، یک است زیرا زنجیرهای آن به شکل $0 \subset p\mathbb{Z}$ می‌باشند.

قضیه ۲۶.۱.۱. فرض کنید ایده‌آل‌های $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{m}$ نسبت به هم متباین باشند، یعنی $\mathfrak{a} + \mathfrak{m} = R$. در این صورت داریم:

$$\frac{R}{(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{m})} \cong \frac{R}{\mathfrak{a}} \times \frac{R}{\mathfrak{m}}.$$

برهان. به گزاره‌ی ۱۰.۱ از [۱۲] رجوع شود. □

قضیه ۲۷.۱.۱. اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $a \in R$، آن‌گاه $\frac{R}{Ann(a)} \cong Ra$.

برهان. می‌توان یک همریختی پوشا از R به Ra طوری تعریف کرد که هر $r \in R$ را به ra ببرد. از طرفی هسته‌ی این همریختی $Ann(a)$ می‌شود. لذا بنا به قضیه‌ی اول یکریختی حکم برقرار است.

$\square$

۲.۱ مباحثی در نظریه‌ی گراف

در این بخش مقدماتی از نظریه گراف که از [۱۶] جمع آوری شده است، بیان می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید V یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. یک گراف ساده یا به اختصار گراف، زوج مرتب $G = (V, E)$ می‌باشد که $V = \{x_۱, x_۲, ..., x_n\}$ را مجموعه رئوس و $E \subseteq \{\{x, y\} | x, y \in V\}$ را مجموعه یال‌های گراف G گوییم. بنابراین اعضای مجموعه‌ی E زیر مجموعه‌هایی دو عضوی از مجموعه‌ی V هستند.

تعریف ۲.۲.۱. تعداد رئوس گراف G را مرتبه‌ی گراف گوییم و با $|G|$ نشان می‌دهیم. گراف G را متناهی گوییم هرگاه $|G| < \infty$.

تعریف ۳.۲.۱. دو رأس u و v از گراف G را مجاور گوییم هرگاه $\{u, v\}$ در $E(G)$ واقع شده باشد.

تعریف ۴.۲.۱. گراف G را کامل گوییم هرگاه هر دو رأس u و v مجاور باشند. گراف کامل n رأسی را با K_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۲.۱. گراف $\acute{G} = (\acute{V}, \acute{E})$ را زیر گراف $G = (V, E)$ گوییم و با $\acute{G} \subseteq G$ نشان می‌دهیم هرگاه $\acute{V} \subseteq V$ و $\acute{E} \subseteq E$.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید G یک گراف و $\acute{G}$ زیر گراف G باشد. در این صورت $\acute{G}$ را زیرگراف فراگیر[۱] از G گوییم هرگاه $V(\acute{G}) = V(G)$. به وضوح هر زیر گراف فراگیر از G با حذف تعدادی از یال‌های گراف G حاصل می‌شود. بنابراین تعداد کل زیر گراف‌های فراگیر از G برابر است با $۲^{|E(G)|}$. همچنین زیر گراف $\acute{G}$ از G را زیر گراف القا شده[۲] نامیم هرگاه $\acute{G}$ با حذف تعدادی از رئوس G بدست آید. بنابراین تعداد کل زیر گراف‌های القا شده G برابر است با $۲^{|V(G)|}$.

[۱] spanning subgraph

[۲] induced subgraph

تعریف ۷.۲.۱. گرافی را که هیچ یالی نداشته باشد گراف تهی[۱] و گرافی را که هیچ رأس و هیچ یالی نداشته باشد گراف پوچ[۲] گوییم.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید $\acute{G}$ زیرگرافی از G باشد. در این صورت اگر $\acute{G}$ کامل باشد، آن‌گاه $\acute{G}$ را یک خوشه[۳] در G گوییم. به وضوح چنین زیرگرافی، زیرگراف القا شده می‌باشد. تعداد رأس‌های موجود در بزرگترین خوشه در G را با $\omega(G)$ نشان می‌دهیم و به آن عدد خوشه‌ای G گوییم.

تعریف ۹.۲.۱. گراف $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ را متمم گراف $G = (V, E)$ گوییم هرگاه $\bar{V} = V$ و یال $e \in \bar{E}$ اگر و تنها اگر $e \notin E$.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنید v رأسی از گراف G باشد. در این صورت درجه‌ی رأس v که با $deg_G(v)$ یا $deg(v)$ نشان می‌دهیم برابر است با تعداد رأس‌های مجاور با v در G.

عدد $\delta(G) = min\{deg(v)|v \in V(G)\}$ را درجه‌ی کمین G وعدد $\Delta(G) = max\{deg(v)|v \in V(G)\}$ را درجه‌ی بیشین G گوییم.

تعریف ۱۱.۲.۱. گشت[۴] در G دنباله‌ی ناتهی $w = v_۰e_۱v_۱...e_kv_k$ است، که جمله‌های آن متناوباً رأس‌ها و یال‌ها هستند بقسمی که برای $۱ \leq i \leq k$، دو انتهای یال e_i، $v_{i-۱}$ و v_i هستند. در این صورت w را گشتی از $v_۰$ به v_k یا $(v_۰, v_k)$-گشت گوییم. رأس‌های $v_۰$ و v_k را به ترتیب ابتدا و انتهای w و $v_۱, v_۲, ..., v_{k-۱}$ را رأس‌های داخلی‌اش می‌نامیم. عدد صحیح k طول w است.

اگر یال‌های $e_۱, e_۲, ..., e_k$ از گشت w مجزا باشند، آن‌گاه w را گذرگاه[۵] می‌نامیم. در این حالت طول w برابر تعداد یال‌های w است. علاوه بر این اگر رأس‌های $v_۰, v_۱, ..., v_k$ مجزا باشند، w را مسیر[۶] نامیم تعداد یال‌های یک مسیر را طول آن مسیر گوییم و هر مسیر را با دنباله رأس‌های آن و به صورت $v_k — \cdots — v_۱ — v_۰$ نشان می‌دهیم.

[۱] empty graph
[۲] null graph
[۳] clique
[۴] walk
[۵] trail
[۶] path

تعریف ۱۲.۲.۱. دنباله‌ی $C = v_0e_1v_1...e_nv_0$ را یک دور می‌نامیم هرگاه $v_0e_1v_1...v_{n-1}$ یک مسیر باشد.
طول یک دور را تعداد یال‌های آن تعریف کرده و دور به طول n را با C_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنید u و v دو رأس از گراف G باشند. در این صورت فاصله‌ی بین دو رأس u و v که آن را با $d(u,v)$ نشان می‌دهیم عبارتست از طول کوتاهترین مسیر بین u و v. اگر هیچ مسیری بین u و v موجود نباشد، آن‌گاه $d(u,v) = \infty$.

تعریف ۱۴.۲.۱. قطر[۱] گراف G را با $diam(G)$ نشان می‌دهیم و عبارتست از

$$diam(G) = Sup\{d(u,v) \mid u,v \in V(G)\}.$$

تعریف ۱۵.۲.۱. طول کوتاه‌ترین دور در گراف G را کمر[۲] گراف گوییم و با $gr(G)$ نشان می‌دهیم. اگر گراف فاقد دور باشد، آن‌گاه $gr(G) = \infty$.

گزاره ۱۶.۲.۱. اگر گراف G شامل حداقل یک دور باشد، آن‌گاه

$$gr(G) \leq 2diam(G) + 1$$

برهان. به گزاره‌ی ۱.۳.۲ از [۲۰] رجوع شود. □

تعریف ۱۷.۲.۱. در گراف G، عدد رنگی[۳] را با $\chi(G)$ نشان می‌دهیم و آن عبارتست از حداقل تعداد رنگ‌هایی که بتوان به رأس‌های G متناظر کرد به طوری که هر دو رأس مجاور هم رنگ نباشند.
حداقل تعداد رنگ‌هایی را که بتوان به یال‌های گراف G متناظر کرد به طوری که هر دو یال مجاور هم‌رنگ نباشد را عدد رنگی یالی گراف G گوییم و با $\acute{\chi}(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۸.۲.۱. گراف G را r−بخشی گوییم هرگاه بتوان مجموعه رئوس آن را به r بخش مجزا تقسیم کرد به طوری که هیچ یالی بین هر دو رأس واقع در یک بخش موجود نباشد.

---
[۱] diameter
[۲] girth
[۳] chromatic number

از جمله گراف‌های r-بخشی، گراف r-بخشی کامل است که رئوس هر بخش، با تمام رأس‌های موجود در سایر بخش‌ها مجاور می‌باشند. گراف دو بخشی کامل با بخش‌هایی از اندازه‌های m و n را با $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم.

گراف دو بخشی کامل $K_{1,n}$ را گراف ستاره[۱] گوییم که شامل $n+1$ رأس می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۱۹. گراف G را همبند گوییم هرگاه مسیری بین هر دو رأس دلخواه آن وجود داشته باشد.

تعریف ۱.۲.۲۰. گراف همبند فاقد دور را درخت گوییم.

تعریف ۱.۲.۲۱. گراف خط[۲] وابسته به گراف G گرافی است با مجموعه رئوس $E(G)$، که در آن دو رأس مجاورند اگر و تنها اگر یال‌های متناظرشان در G با یکدیگر مجاور باشند. گراف خط وابسته به گراف G را با $L(G)$ نمایش می‌دهیم و اگر $\{x,y\} \in E(G)$، آنگاه رأس متناظر آن در $L(G)$ را با $[x,y]$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۲۲. گراف G را مسطح[۳] گوییم اگر بتوان آن را طوری در صفحه رسم کرد که یال‌ها یکدیگر را در نقطه‌ای غیر از رئوس قطع نکنند.

تعریف ۱.۲.۲۳. فرض کنید G یک گراف باشد. در این صورت گراف حاصل از افزودن تعدادی رأس بر روی یال‌های گراف G را یک زیر تقسیم[۴] از G گوییم.

قضیه ۱.۲.۲۴. **(کوراتوفسکی** [۵]**)** گراف G مسطح است اگر و تنها اگر دارای هیچ زیر تقسیمی از $K_{3,3}$ یا K_5 نباشد.

برهان. به قضیه‌ی ۱۰.۹ از [۱۶] مراجعه کنید. □

تعریف ۱.۲.۲۵. گراف G را اویلری گوییم اگر شامل گذرگاه بسته‌ی باشد که از تمام یال‌ها می‌گذرد.

قضیه ۱.۲.۲۶. گراف همبند G یک گراف اویلری است اگر و تنها اگر درجه‌ی تمام رئوس آن زوج باشد.

برهان. به قضیه‌ی ۱.۴ از [۱۶] مراجعه کنید. □

[۱] star graph
[۲] line graph
[۳] planar
[۴] subdivision
[۵] kuratowski

تعریف ۲۷.۲.۱. گراف G را همیلتونی گوییم اگر دوری شامل تمام رأس‌های آن در G وجود داشته باشد.

تعریف ۲۸.۲.۱. فرض کنید G یک گراف باشد. مجموعه غالب[۱] در گراف G، زیر مجموعه‌ای از رئوس آن مانند A است به طوری که هر رأس خارج A با دست کم یک رأس از A مجاور باشد. اندازه‌ی کوچکترین مجموعه غالب در گراف G را عدد غالب G می‌گوییم و با نماد $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۹.۲.۱. گراف G را منظم[۲] گوییم هرگاه درجه‌ی تمام رئوسش یکسان باشد.

تعریف ۳۰.۲.۱. رأس v در گراف G را رأس برشی[۳] گوییم هرگاه با حذف آن و یال‌های متصل به آن بر تعداد مؤلفه‌های همبندی افزوده شود.

تعریف ۳۱.۲.۱. فرض کنید v رأسی از گراف G باشد. در این صورت خروج از مرکز[۴] v که با $e(v)$ نشان می‌دهیم عبارتست از

$$e(v) = max\{d(u,v) \mid u \in V(G)\}.$$

همچنین شعاع G برابر است با

$$r(G) = min\{e(v) \mid v \in V(G)\}.$$

رأس v از G را رأس مرکزی می‌گوییم هرگاه $e(v) = r(G)$. مجموعه رأس‌های مرکزی G را مرکز G می‌نامیم.

[۱] dominating set
[۲] regular
[۳] cut vertex
[۴] eccentricity