بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهرکرد

دانشکده علوم و ریاضی

گروه ریاضی محض

رساله دکتری

رشته ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

تشخیص‌پذیری برخی از گروه‌های تقریبا ساده با استفاده از دنباله درجه‌ی رئوس گراف اول و مرتبه‌ی گروه

پژوهشگر

معصومه سجادی

استادان راهنما

دکتر غلامرضا رضایی‌زاده و دکتر محمدرضا درفشه

مهر ۱۳۹۲

تقدیم به آنان که اندیشیدن را دوست دارند

((بسم الله الرحمن الرحیم))

در آغاز ((الحمدلله رب العالمین))

[1]خدایا بخشش پی در پی تو و ریزش فضل و کرامت مرا از شمردن ثنا و احسانت عاجز می کند و چگونه می توانم تو را سپاس گزاری کنم که همان نیز، احتیاج به سپاس گزاری دیگری دارد.

خدایا، با تمام کوچکی و بندگی خودم تو را شاکرم که نعمت علم آموزی را به من عطا نمودی و به بهانه ی انجام این طرح دریچه ای از علم را به رویم گشودی که به وضوح بخش دیگری از زیباییهایش را ببینم.

در ابتدا از پدر، مادر و همسرم به خاطر همراهی و کمک ایشان، در سختی هایی که پیش رو داشتم تشکر می کنم و امیدوارم این قدردانی ناچیز من را پذیرا باشند. اما بر خود لازم می دانم به پاس زحمات اساتید راهنمای بزرگوارم، دکتر غلامرضا رضایی زاده و دکتر محمدرضا درفشه که با سعه ی صدر و دقت نظرشان باعث هر چه پربارتر شدن این رساله شدند نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشم و اما از اساتید بزرگوارم دکتر بیژن طائری، دکتر محمدرضا ریسمانچیان و دکتر ندا آهنجیده که از راهنمایی های ارزشمند ایشان بی بهره نبودم بی نهایت سپاسگزارم. همچنین از دیگر اساتیدم در گروه ریاضی که در دوران تحصیلم به من آموختند تا ذره ای از دریای بی کران علم را بیاموزم نیز کمال تشکر و قدردانی را دارم. خدایا روح بلند شهدای اسلام، آنان که رفتند تا ما آسوده خاطر زندگی کنیم و آزادانه بیندیشیم را متعالی بگردان. در پایان ((اهدنا الصراط المستقیم))، آمین یارب العالمین.

معصومه سجادی

مهر ۱۳۹۲

---

[1] بخشی از مناجات امام سجاد (ع) در مناجات خمس‌عشر.

اظهار نامه

در این رساله کلیهٔ مطالب بدون مرجع در فصل‌های دوم و سوم اصیل (Original) هستند.

ضمناً مقاله‌ی

M. R. Darafsheh, G. R. Rezaeezadeh, M. Sajjadi and M. Bibak, OD-Characterization of almost simple groups related to $U_3(17)$, Quasigroups and related systems 21(1) (2013) 49-58.

و از فصل دوم مقاله‌ی

G. R. Rezaeezadeh, M. R. Darafsheh, M. Sajjadi and M. Bibak, OD-Characterization of almost simple groups related to $L_3(25)$, Accepted in Bulletin of the Iranian Mathematical Society.

استخراج شده‌اند.

چکیده

در این رساله، تشخیص‌پذیری برخی از گروه‌های تقریبا ساده را با دو ابزار مرتبه‌ی گروه و دنباله درجه رئوس گراف اول گروه، بررسی خواهیم کرد. یک بار گروه‌های تقریبا ساده را مرتبط با گروه ساده‌ی $PSU_3(17)$ و بار دیگر مرتبط با $PSL_3(25)$ در نظر می‌گیریم. تفاوت‌هایی که بین کارهای ما و دیگر مقالات کار شده در این زمینه وجود دارد این است که، گراف اول گروه‌های تقریبا ساده‌ی مورد مطالعه‌ی ما در حد یکریختی منحصر به فرد نخواهند بود و همچنین گروه ساده‌ی $PSL_3(25)$، بزرگ‌ترین گروه خودریختی خارجی را در بین کارهای مشابه دارا می‌باشد. بنابراین این ویژگی‌ها، کارهای ما را از دیگر کارهای مشابه در این زمینه مجزا می‌کنند.

کلمات کلیدی : گروه تقریبا ساده؛ تشخیص‌پذیری؛ دنباله درجه رئوس گراف اول گروه.

فهرست مطالب

مقدمه

یکی از مسائل مهم در نظریه‌ی گروه‌ها، رده‌بندی گروه‌ها با استفاده از ابزارهای مختلف می‌باشد. بدین صورت که ویژگی خاصی از گروه را مدنظر قرار می‌دهند و سپس کلاس گروه‌های مورد نظر را در حد یکریختی، دسته‌بندی می‌کنند. به عنوان مثال اگر در کلاس گروه‌های ساده، مرتبه‌ی گروه را مدنظر قرار دهیم، هر گروه ساده از مرتبه‌ی ۶۰، با گروه متناوب از درجه‌ی پنج ($\mathbb{A}_5$)، یکریخت خواهد شد و بنابراین $\mathbb{A}_5$ به وسیله‌ی مرتبه، به طور منحصر به فرد مشخص می‌شود. این بدین معناست که، این گروه توسط مرتبه‌اش تشخیص‌پذیر است. لذا مرتبط با مسئله‌ی رده‌بندی گروه‌ها، مسئله‌ی تشخیص‌پذیری را نیز عنوان می‌کنند. به عنوان مثال اگر قرار دهیم $h(G)$ را تعداد گروه‌های غیر یکریختی که دارای ویژگی‌ای مشابه با G باشند (مثلا مرتبه‌ای برابر با $|G|$ داشته باشند)، در این صورت اگر $h(G) = 1$، گوییم گروه G با این ویژگی تشخیص‌پذیر است و در صورتی که $h(G) = k$، گوییم گروه G با این ویژگی k-تشخیص‌پذیر است.

اما در این میان ابزارهایی همچون گراف اول الحاقی گروه، که ریاضی‌دانانی به نام‌های گرونبرگ[۲] و کگل[۳] آن را مطرح کردند؛ طیف گروه، دنباله درجه رئوس گراف اول گروه، که اول بار توسط درفشه و همکاران ایشان در سال ۲۰۰۵ مطرح شد؛ و ... نیز عنوان شدند. با استفاده از این ابزارها در مسئله‌ی تشخیص‌پذیری گروه‌ها مطالعات زیادی صورت گرفت که برخی از نتایج آن‌ها را می‌توانید در [۷]، [۱۱]، [۱۲]، [۲۱]، [۴] و [۵]، مشاهده کنید.

در این رساله ما دو ابزار مرتبه و دنباله درجه رئوس گراف اول گروه را مدنظر قرار می‌دهیم و سپس در مسئله‌ی رده‌بندی کلاس گروه‌های متناهی، به دنبال رده‌بندی آن‌هایی هستیم که مرتبه و دنباله درجه‌ای برابر با گروه مورد نظر ما (برخی از گروه‌های تقریبا ساده) داشته باشند، یا به عبارتی تشخیص‌پذیری برخی از گروه‌های تقریبا ساده را بررسی خواهیم کرد. از پژوهش‌هایی که در این زمینه صورت گرفته و درگیر با گروه‌های تقریبا ساده بوده‌اند می‌توان به [۲۰]، [۲۲] و [۲۳] اشاره کرد. اما با توجه به مطالب اخیر، مطالعات ما در این زمینه منجر به چهار مقاله‌ی زیر شده است، که در این رساله به دوتای اول خواهیم پرداخت.

---
[۲] Gruenberg
[۳] Kegel

[3] M. R. Darafsheh, G. R. Rezaeezadeh, M. Sajjadi and M. Bibak, OD-Characterization of almost simple groups related to $U_3(17)$, Quasigroups and related systems 21(1) (2013) 49-58.

[14] G. R. Rezaeezadeh, M. R. Darafsheh, M. Sajjadi and M. Bibak, OD-Characterization of almost simple groups related to $L_3(25)$, Accepted in Bulletin of the Iranian Mathematical Society.

[2] M. R. Darafsheh, G. R. Rezaeezadeh, M. Bibak and M. Sajjadi, OD-Characterization of almost simple groups related to ${}^2E_6(2)$, Advances in Algebra 6(1) (2013) 45-54.

[13] G. R. Rezaeezadeh, M. Bibak and M. Sajjadi, Characterization of projective special linear group in dimention three by their orders and degree patterns, To appear in Bulletin of the Iranian Mathematical Society.

بر این اساس این رساله مشتمل بر سه فصل است. در فصل اول، تعاریف و قضایای لازم که جهت مطالعه‌ی این رساله لازم است را گردآوری کرده‌ایم. فصل دوم را به تشخیص‌پذیری گروه‌های تقریبا ساده‌ی مرتبط با گروه ساده‌ی $PSU_3(17)$، اختصاص داده‌ایم که در واقع بر پایه‌ی [۳]، می‌باشد و در فصل سوم راجع به تشخیص‌پذیری گروه‌های تقریبا ساده‌ی مرتبط با $PSL_3(25)$، صحبت خواهیم کرد که اساس آن مقاله‌ی [۱۴] است . امید آن‌که این رساله برای علاقه‌مندان مفید واقع شود.

فهرست نمادها

مجموعه اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$
زیرمجموعه	$\subseteq$
زیرگروه	$\leq$
زیرگروه سره	$<$
زیرگروه نرمال	$\trianglelefteq$
H با زیرگروهی از G یکریخت است	$H \lesssim G$
زیرگروه تولید شده توسط X	$\langle X \rangle$
یکریختی	$\cong$
هم‌نهشت	$\equiv$
پیمانه	mod
مجموعه اعداد صحیح به پیمانه‌ی p	$\mathbb{Z}_p$
m عاد می‌کند n را	$m \mid n$
m عاد نمی‌کند n را	$m \nmid n$
بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک m و n	(m, n)
متعلق به	$\in$
به طوری‌که	$s.t$
مرتبه‌ی گروه G	$\lvert G \rvert$
مرتبه‌ی عنصر x	$O(x)$
زیرگروه تولید شده توسط X	$\langle X \rangle$
مرکزساز H در G	$C_G(H)$
نرمال‌ساز H در G	$N_G(H)$
مرکز G	$Z(G)$

توانی از p که مرتبه‌ی G را می‌شمارد	$\|G\|_p$
مجموعه‌ی همه‌ی p-زیرگروه‌های سیلوی G	$\mathrm{Syl}_p(G)$
p زیرگروه سیلوی G	G_p
گروه متقارن از درجه‌ی n	$\mathbb{S}_n$
گروه متناوب از درجه‌ی n	$\mathbb{A}_n$
گروه دووجهی از مرتبه‌ی ۲n	D_{2n}
گروه خودریختی‌های G	$\mathrm{Aut}(G)$
گروه خودریختی‌های داخلی G	$\mathrm{Inn}(G)$
گروه خودریختی‌های خارجی G	$\mathrm{Out}(G)$
مجموعه‌ی همه همریختی‌ها از گروه A به گروه B	$\mathrm{Hom}(A, B)$
مجموعه‌ی مرتبه‌ی عناصر G	$\pi_e(G)$
مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های اول $\|G\|$	$\pi(G)$
گراف اول G	$\Gamma(G)$
وجود یال pq در گراف اول	$p \sim q$
عدم وجود یال pq در گراف اول	$p \nsim q$
عدد بزرگ‌ترین مجموعه‌ی مستقل از گراف اول G	$t(G)$
بنیان G	$\mathrm{Soc}(G)$
توسیع A توسط B	$A.B$
توسیع شکافنده A توسط B	$A : B$
کلاسی از گروه‌های ساده با ماکزیمم شمارنده‌ی اول p	$\mathfrak{S}_p$
مزدوج x با g	x^g
مدار شامل x در G	$\mathrm{Orb}_G(x)$
پایدارساز x درG	G_x
حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم گروه‌های M و N	$M \rtimes N$
حاصل‌ضرب حلقوی گروه‌های M و N	$M \wr N$

فصل ۱
تعاریف و مفاهیم پیش‌نیاز

این فصل را به تعاریف و مفاهیم پیش‌نیاز که برای مطالعه‌ی این رساله لازم است اختصاص می‌دهیم. در بخش اول مطالبی راجع به گروه‌های ساده و تقریبا ساده، بیان می‌کنیم و در بخش‌های بعدی به ترتیب راجع به گراف اول گروه، مسئله‌ی تشخیص‌پذیری یک گروه و مفاهیمی از گروه از جمله گروه فروبنیوس صحبت خواهیم کرد. در این فصل هر جا که بر متناهی بودن و یا نبودن گروه تاکید نشده است، منظور گروه متناهی می‌باشد.

۱.۱ گروه‌های ساده و تقریبا ساده

۱.۱.۱ معرفی گروه‌های ساده و تقریبا ساده

تعریف ۱.۱.۱ (گروه ساده). گروه غیربدیهی G را ساده گوییم، هرگاه زیرگروه سره‌ی نرمال نابدیهی نداشته باشد.

در یک تقسیم‌بندی گروه‌های ساده را به پنج دسته‌ی زیر تقسیم‌بندی می‌کنند. گروه‌های چهار دسته‌ی اول، هر کدام خانواده‌ای نامتناهی از گروه‌های ساده را تشکیل می‌دهند که جز دسته‌ی اول و دوم که گروه‌های دوری و جایگشتی می‌باشند، دو دسته‌ی دیگر یا به روش ماتریسی ساخته شده‌اند و یا با استفاده از نظریه‌ی جبر لی به دست آمده‌اند. گروه‌های دیگر که جزیی از یک خانواده‌ی نامتناهی از گروه‌های ساده نیستند، گروه‌های ساده‌ی پراکنده نامیده می‌شوند و بیست و شش عدد می‌باشند که در دسته‌ی پنجم گنجانده شده‌اند.

۱ - گروه‌های ساده‌ی دوری که با $\mathbb{Z}_p$، برای اعداد اول p، یکریخت می‌باشند.

۲ - گروه‌های متناوب $\mathbb{A}_n$، برای $n \geqslant 5$.

۳ - گروه‌های کلاسیک، که به شش دسته تقسیم می‌شوند: گروه‌های خطی یعنی $PSL_n(q)$ برای $n \geqslant ۲$ (به جز $PSL_۲(۲)$ و $PSL_۲(۳)$)؛ گروه‌های یکانی یعنی $PSU_n(q)$ برای $n \geqslant ۳$ (به جز $PSU_۳(۲)$)؛ گروه‌های سیمپلکتیک یعنی $PSp_{۲n}(q)$ برای $n \geqslant ۲$ (به جز $PSp_۴(۲)$) و سه خانواده از گروه‌های متعامد که به صورت زیر می‌باشند،

(۱) $P\Omega_{۲n+۱}(q)$، $n \geqslant ۳$، q فرد.

(۲) $P\Omega^+_{۲n}(q)$، $n \geqslant ۴$.

(۳) $P\Omega^-_{۲n}(q)$، $n \geqslant ۴$.

که q توانی از یک عدد اول است.

۴ - شامل گروه‌های استثنایی از نوع لی:

$$G_۲(q)، q \geqslant ۳؛ F_۴(q)؛ E_۶(q)؛ {}^۲E_۶(q)؛ {}^۳D_۴(q)؛ E_۷(q)؛ E_۸(q)؛$$

که q توانی از یک عدد اول است.

$${}^۲B_۲(۲^{۲n+۱})، n \geqslant ۱؛ {}^۲G_۲(۳^{۲n+۱})، n \geqslant ۱؛ {}^۲F_۴(۲^{۲n+۱})، n \geqslant ۱؛$$
$${}^۲F_۴(۲)'.$$

۵ - گروه‌های ساده‌ی پراکنده.

تعریف ۲.۱.۱. اگر G گروه و H زیرگروهی نرمال از G باشد طوری که $\frac{G}{H} \cong K$، آن‌گاه G توسیعی از H توسط K می‌باشد و آن را با نماد $G = H.K$ یا $G = HK$ نشان می‌دهند، در این حالت توسیع G از H را غیرشکافنده گویند. اگر K نیز زیرگروه G باشد گوییم این توسیع شکافنده است و آن را با نماد $G = H : K$ یا $G = H \rtimes K$ نشان می‌دهند. در صورتی که $H \leq Z(G)$، زیرگروه H را زیرگروه مرکزی از G گویند و توسیع را یک توسیع مرکزی گویند.

نمادگزاری. توسیع $A.B$ مفروض است. اگر C زیرگروه دوری از B از مرتبه‌ی n باشد، آن‌گاه توسیع $A.C$ را با نماد $A.n$ نشان می‌دهیم. در صورتی‌که C دارای بیش از یک زیرگروه دوری از مرتبه‌ی n باشد این توسیع‌ها را با نمادهای $A.n_۱$، $A.n_۲$ و ... نشان می‌دهیم. برای توسیع شکافنده نیز همین نمادگزاری‌ها برقرار هستند. با توجه به قضیه‌ی ژوردان-هولدر[۱] هر گروه متناهی G توسیعی متوالی از گروه‌های ساده است. لذا اولین قدم در پاسخ به سوالات راجع به یک گروه متناهی دلخواه، اغلب منجر به پاسخ راجع به گروه‌های ساده و یا گروه‌های تقریبا ساده خواهد شد.

[۱] Jordan-Holder

تعریف ۳.۱.۱ (گروه تقریبا ساده)**.** گروه غیربدیهی G را تقریبا ساده گوییم، هرگاه گروه ساده‌ی ناآبلی مثل S وجود داشته باشد، به طوری‌که $S \trianglelefteq G \lesssim \mathrm{Aut}(S)$. در این حالت گوییم G گروه تقریبا ساده‌ی مرتبط با S است. واضح است که هر گروه ساده یک گروه تقریبا ساده است.

ملاحظه ۴.۱.۱. *اگر G گروه تقریبا ساده‌ی مرتبط با گروه S باشد، آن‌گاه*

$$S \trianglelefteq G \lesssim \mathrm{Aut}(S)$$

لذا، $\frac{G}{S} \lesssim \frac{\mathrm{Aut}(S)}{S} \cong \mathrm{Out}(S)$ و بنابراین زیرگروه K از $\mathrm{Out}(S)$ وجود دارد که $G \cong S.K$، یعنی G توسیعی از S توسط زیرگروهی از $\mathrm{Out}(S)$ خواهد شد.

اکنون با در نظر گرفتن ملاحظه‌ی ۴.۱.۱، در تعیین ساختار و یا مرتبه‌ی گروه خودریختی خارجی گروه‌های ساده، مطالب زیر را آورده‌ایم.

لم ۵.۱.۱. *فرض کنیم $\mathbb{A}_n$ و $\mathbb{S}_n$ گروه‌های متناوب و متقارن از درجه‌ی n باشند. در این صورت :*

۱) *اگر $n = ۶$، آن‌گاه* $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}_n) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{S}_n)$، $\mathrm{Inn}(\mathbb{A}_n) \cong \mathrm{Inn}(\mathbb{S}_n)$ و $[\mathrm{Aut}(\mathbb{S}_n) : \mathrm{Inn}(\mathbb{S}_n)] = ۲$.

۲) *اگر $n \neq ۶$ و $n > ۳$، آن‌گاه* $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}_n) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{S}_n) \cong \mathbb{S}_n$.

برهان. به مرجع ،[۱۶] لم ۱۱.۴.۸ مراجعه شود. □

نتیجه ۶.۱.۱. *برای $n \geqslant ۵$، $|\mathrm{Out}(\mathbb{A}_n)| = ۲$.*

برهان. آن‌جا که برای $۵ \leqslant n \neq ۶$، گروه متناوب $\mathbb{A}_n$ ساده است لذا،

$$|\mathrm{Inn}(\mathbb{A}_n)| = |\mathbb{A}_n|$$

و در نتیجه،

$$|\mathrm{Out}(\mathbb{A}_n)| = |\mathrm{Aut}(\mathbb{A}_n) \cong \mathbb{S}_n|/|\mathbb{A}_n| = ۲$$

اما در حالت $n = ۶$ داریم:

$$|\mathrm{Aut}(\mathbb{A}_۶)/\mathrm{Inn}(\mathbb{A}_۶)| = |\mathrm{Aut}(\mathbb{S}_۶)/\mathrm{Inn}(\mathbb{S}_۶)| = [\mathrm{Aut}(\mathbb{S}_۶) : \mathrm{Inn}(\mathbb{S}_۶)] = ۲.$$

□

لم ۷.۱.۱. *فرض کنید G گروه ساده‌ی کلاسیک با شرایط ذکر شده، که در دسته‌بندی گروه‌های ساده نام بردیم، باشد و $q = p^f$، که p عدد اول است. در این صورت برای گروه خودریختی خارجی G داریم :*

الف) اگر $G \cong PSL_n(q)$، آن‌گاه

$$\mathrm{Out}(G) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{(n,q-۱)} : \mathbb{Z}_f : \mathbb{Z}_۲ \cong D_{۲(n,q-۱)} \times \mathbb{Z}_f & n \geqslant ۳ \\ \mathbb{Z}_{(۲,q-۱)} \times \mathbb{Z}_f & n = ۲ \end{cases}$$

ب) اگر $G \cong PSU_n(q)$، آن‌گاه

$$\mathrm{Out}(G) \cong \mathbb{Z}_{(n,q+۱)} : \mathbb{Z}_{۲f}$$

ج) اگر $G \cong PSp_{۲n}(q)$، آن‌گاه

$$\mathrm{Out}(G) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_f & q \text{ زوج باشد} \\ \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_f & q \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

د) اگر $G \cong O_{۲n+۱}(q)$، آن‌گاه

$$\mathrm{Out}(G) \cong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_f$$

ذ) اگر $G \cong O_n^+(q)$ و $n \neq ۸$، آن‌گاه

$$\mathrm{Out}(G) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲ & q \text{ زوج باشد} \\ \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_f & \frac{۱}{۲}m(q-۱) \text{ فرد باشد و } q \text{ فرد باشد} \\ D_۸ \times \mathbb{Z}_f & \frac{۱}{۲}m(q-۱) \text{ زوج باشد و } q \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

ه) اگر $G \cong O_۸^+(q)$، آن‌گاه

$$\mathrm{Out}(G) \cong \begin{cases} \mathbb{S}_۳ \times \mathbb{Z}_f & q \text{ زوج باشد} \\ \mathbb{S}_۴ \times \mathbb{Z}_f & q \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

ی) اگر $G \cong O_n^-(q)$، آن‌گاه

$$\mathrm{Out}(G) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{۲f} & q \text{ زوج باشد} \\ \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_{۲f} & \frac{۱}{۲}m(q-۱) \text{ زوج باشد و } q \text{ فرد باشد} \\ D_۸ \times \mathbb{Z}_f & \frac{۱}{۲}m(q-۱) \text{ فرد باشد و } q \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

برهان. به مرجع [۹]، صفحات ۲۱، ۲۳، ۲۵، ۳۵، ۳۶، ۳۸ و ۴۱ مراجعه شود. □

اکنون جدول ۱ را که از مرجع [۱] گرفته شده، راجع به خودریختی خارجی گروه‌های ساده‌ی استثنایی می‌آوریم. به این ترتیب که مرتبه‌ی خودریختی خارجی گروه‌های ساده‌ی جدول برابر با dfg خواهد بود.
اما جدول ۲، گروه‌های ساده‌ی پراکنده به همراه مرتبه و مرتبه‌ی گروه خودریختی خارجی‌شان را در بر دارد که مرتبه‌ی گروه خودریختی خارجی، با حرف o نشان داده شده است.

جدول شماره ۱

S	باشرط	d	f	g
$^{۳}D_{۴}(q)$		۱	$q^{۳} = p^{f}$	۱
$G_{۲}(q)$		۱	$q = p^{f}$	اگر $p = ۳$, ۲
$^{۲}G_{۲}(q)$	f فرد	۱	$q = ۳^{f}$	۱
$F_{۴}(q)$		۱	$q = p^{f}$	اگر $p = ۲$, ۲
$^{۲}F_{۴}(q)$	f فرد	۱	$q = ۲^{f}$	۱
$E_{۶}(q)$		$(۳, q - ۱)$	$q = p^{f}$	۲
$^{۲}E_{۶}(q)$		$(۳, q + ۱)$	$q^{۲} = p^{f}$	۱
$E_{۷}(q)$		$(۲, q - ۱)$	$q = p^{f}$	۱
$E_{۸}(q)$		۱	$q = p^{f}$	۱
$^{۲}B_{۲}(q)$	f فرد	۱	$q = ۲^{f}$	۱

جدول شماره ۲

S	نام لاتین	مرتبه	o
$M_{۱۱}$	Mathieu	$۲^{۴}.۳^{۲}.۵.۱۱$	۱
$M_{۱۲}$		$۲^{۶}.۳^{۳}.۵.۱۱$	۲
$M_{۲۲}$		$۲^{۷}.۳^{۲}.۵.۷.۱۱$	۲
$M_{۲۳}$		$۲^{۷}.۳^{۲}.۵.۷.۱۱.۲۳$	۱
$M_{۲۴}$		$۲^{۱۰}.۳^{۳}.۵.۷.۱۱.۲۳$	۱
$J_{۱}$	Janko	$۲^{۳}.۳.۵.۷.۱۱.۱۹$	۱
$J_{۲}$		$۲^{۷}.۳^{۳}.۵^{۲}.۷$	۲
$J_{۳}$		$۲^{۷}.۳^{۵}.۵.۱۷.۱۹$	۲
$J_{۴}$		$۲^{۲۱}.۳^{۳}.۵.۷.۱۱^{۳}.۲۳.۲۹.۳۱.۳۷.۴۳$	۱
HS	Higman-Sims	$۲^{۹}.۳^{۲}.۵^{۳}.۷.۱۱$	۲
Mc	McLaughlin	$۲^{۷}.۳^{۶}.۵^{۳}.۷.۱۱$	۲
Suz	Suzuki	$۲^{۱۳}.۳^{۷}.۵^{۲}.۷.۱۱$	۲
LY	Lyons	$۲^{۸}.۳^{۷}.۵^{۶}.۷.۱۱۳۱.۳۷.۶۷$	۱
He	Held	$۲^{۱۰}.۳^{۳}.۵^{۲}.۷^{۳}.۱۷$	۲
Ru	Rudvalis	$۲^{۱۴}.۳^{۳}.۵^{۳}.۷.۱۳.۲۹$	۱
$O'N$	O'Nan	$۲^{۹}.۳^{۴}.۵.۷^{۳}.۱۱.۱۹.۳۱$	۲
$Co۳$	Conway	$۲^{۱۰}.۳^{۷}.۵^{۳}.۷.۱۱.۲۳$	۱
$Co۲$		$۲^{۱۸}.۳^{۶}.۵^{۳}.۷.۱۱.۲۳$	۱
$Co۱$		$۲^{۲۱}.۳^{۹}.۵^{۴}.۷^{۲}.۱۱.۱۳.۲۳$	۱
$Fi(۲۲)$	Fischer	$۲^{۱۷}.۳^{۹}.۵^{۲}.۷.۱۱.۲۳$	۲
$Fi(۲۳)$		$۲^{۱۸}.۳^{۱۳}.۵^{۲}.۷.۱۱.۱۳.۱۷.۲۳$	۱
$Fi(۲۴)'$		$۲^{۲۱}.۳^{۱۶}.۵^{۲}.۷^{۳}.۱۱.۱۳.۱۷.۲۳.۲۹$	۲
HN	Thompson	$۲^{۱۴}.۳^{۶}.۵^{۶}.۷.۱۱.۱۹$	۲
Th	Harada	$۲^{۱۵}.۳^{۱۰}.۵^{۳}.۷^{۲}.۱۳.۱۹.۳۱$	۱
$\mathbb{B}$	Baby Monster	$۲^{۴۱}.۳^{۱۳}.۵^{۶}.۷^{۲}.۱۱.۱۳.۱۷.۱۹.۲۳.۳۱.۴۷$	۱
M	Monster	$۲^{۴۶}.۳^{۲۰}.۵^{۹}.۷^{۶}.۱۱^{۲}.۱۳^{۳}.۱۷.۱۹.۲۳.۲۹.۳۱.۴۱.۴۷.۵۹.۷۱$	۱

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید $p \geqslant ۵$ عدد اول باشد. مجموعه‌ی همه‌ی گروه‌های ساده که شمارنده‌های مرتبه‌شان کوچکتر مساوی با p باشند را با نماد $\mathfrak{S}_p$ نشان می‌دهیم. واضح است که برای اعداد اول p و q با شرط $q \leqslant p$ رابطه‌ی $\mathfrak{S}_q \subseteq \mathfrak{S}_p$ برقرار می‌باشد.

جدول شماره ۳ : گروه‌های ساده‌ی متعلق به $\mathfrak{S}_{۳۱}$

S	$\lvert S\rvert$	o	S	$\lvert S\rvert$	o
$A_{۵}$	$۲^{۲} \cdot ۳ \cdot ۵$	۲	$L_{۲}(۶۴)$	$۲^{۶} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot ۱۳$	۶
$A_{۶}$	$۲^{۳} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵$	۴	$U_{۴}(۵)$	$۲^{۷} \cdot ۳^{۴} \cdot ۵^{۶} \cdot ۷ \cdot ۱۳$	۴
$S_{۴}(۳)$	$۲^{۶} \cdot ۳^{۴} \cdot ۵$	۲	$L_{۳}(۹)$	$۲^{۷} \cdot ۳^{۶} \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot ۱۳$	۴
$L_{۲}(۷)$	$۲^{۳} \cdot ۳ \cdot ۷$	۲	$S_{۶}(۳)$	$۲^{۹} \cdot ۳^{۹} \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot ۱۳$	۲
$L_{۲}(۸)$	$۲^{۳} \cdot ۳^{۲} \cdot ۷$	۳	$O_{۷}(۳)$	$۲^{۹} \cdot ۳^{۹} \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot ۱۳$	۲
$U_{۳}(۳)$	$۲^{۵} \cdot ۳^{۳} \cdot ۷$	۲	$G_{۲}(۴)$	$۲^{۱۲} \cdot ۳^{۳} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷ \cdot ۱۳$	۲
$A_{۷}$	$۲^{۳} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵ \cdot ۷$	۲	$S_{۴}(۸)$	$۲^{۱۲} \cdot ۳^{۴} \cdot ۵ \cdot ۷^{۲} \cdot ۱۳$	۶
$L_{۲}(۴۹)$	$۲^{۴} \cdot ۳ \cdot ۵^{۲} \cdot ۷^{۲}$	۴	$O_{۸}^{+}(۳)$	$۲^{۱۲} \cdot ۳^{۱۲} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷ \cdot ۱۳$	۲۴
$U_{۳}(۵)$	$۲^{۴} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵^{۳} \cdot ۷$	۶	$L_{۵}(۳)$	$۲^{۹} \cdot ۳^{۱۰} \cdot ۵ \cdot ۱۱^{۲} \cdot ۱۳$	۲
$L_{۳}(۴)$	$۲^{۶} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵ \cdot ۷$	۱۲	$A_{۱۳}$	$۲^{۹} \cdot ۳^{۵} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷ \cdot ۱۱ \cdot ۱۳$	۲
$A_{۸}$	$۲^{۶} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵ \cdot ۷$	۲	$A_{۱۴}$	$۲^{۱۰} \cdot ۳^{۵} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷^{۲} \cdot ۱۱ \cdot ۱۳$	۲
$A_{۹}$	$۲^{۶} \cdot ۳^{۴} \cdot ۵ \cdot ۷$	۲	$A_{۱۵}$	$۲^{۱۰} \cdot ۳^{۶} \cdot ۵^{۳} \cdot ۷^{۲} \cdot ۱۱ \cdot ۱۳$	۲
$J_{۲}$	$۲^{۷} \cdot ۳^{۳} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷$	۲	$L_{۶}(۳)$	$۲^{۱۱} \cdot ۳^{۱۵} \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot ۱۱^{۲} \cdot ۱۳^{۲}$	۴
$A_{۱۰}$	$۲^{۷} \cdot ۳^{۴} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷$	۲	Suz	$۲^{۱۳} \cdot ۳^{۷} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷ \cdot ۱۱ \cdot ۱۳$	۲
$U_{۴}(۳)$	$۲^{۷} \cdot ۳^{۶} \cdot ۵ \cdot ۷$	۸	$A_{۱۶}$	$۲^{۱۴} \cdot ۳^{۶} \cdot ۵^{۳} \cdot ۷^{۲} \cdot ۱۱ \cdot ۱۳$	۲
$S_{۴}(۷)$	$۲^{۸} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷^{۴}$	۲	$Fi_{۲۲}$	$۲^{۱۷} \cdot ۳^{۹} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷ \cdot ۱۱ \cdot ۱۳$	۲
$S_{۶}(۲)$	$۲^{۹} \cdot ۳^{۴} \cdot ۵ \cdot ۷$	۱	$L_{۲}(۱۷)$	$۲^{۴} \cdot ۳^{۲} \cdot ۱۷$	۲
$O_{۸}^{+}(۲)$	$۲^{۱۲} \cdot ۳^{۵} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷$	۶	$L_{۲}(۱۶)$	$۲^{۴} \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot ۱۷$	۴
$L_{۲}(۱۱)$	$۲^{۲} \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot ۱۱$	۲	$S_{۴}(۴)$	$۲^{۸} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵^{۲} \cdot ۱۷$	۴
$M_{۱۱}$	$۲^{۴} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵ \cdot ۱۱$	۱	He	$۲^{۱۰} \cdot ۳^{۳} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷^{۳} \cdot ۱۷$	۲
$M_{۱۲}$	$۲^{۶} \cdot ۳^{۳} \cdot ۵ \cdot ۱۱$	۲	$O_{۸}^{-}(۲)$	$۲^{۱۲} \cdot ۳^{۴} \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot ۱۷$	۲
$U_{۵}(۲)$	$۲^{۱۰} \cdot ۳^{۵} \cdot ۵ \cdot ۱۱$	۲	$L_{۴}(۴)$	$۲^{۱۲} \cdot ۳^{۴} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷ \cdot ۱۷$	۴
$M_{۲۲}$	$۲^{۷} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot ۱۱$	۲	$S_{۸}(۲)$	$۲^{۱۶} \cdot ۳^{۵} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷ \cdot ۱۷$	۱
$A_{۱۱}$	$۲^{۷} \cdot ۳^{۴} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷ \cdot ۱۱$	۲	$U_{۴}(۴)$	$۲^{۱۲} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵^{۳} \cdot ۱۳ \cdot ۱۷$	۴
$M^{c}L$	$۲^{۷} \cdot ۳^{۶} \cdot ۵^{۳} \cdot ۷ \cdot ۱۱$	۲	$U_{۳}(۱۷)$	$۲^{۶} \cdot ۳^{۴} \cdot ۷ \cdot ۱۳ \cdot ۱۷^{۳}$	۶
HS	$۲^{۹} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵^{۳} \cdot ۷ \cdot ۱۱$	۲	$O_{۱۰}^{-}(۲)$	$۲^{۲۰} \cdot ۳^{۶} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷ \cdot ۱۱ \cdot ۱۷$	۲
$A_{۱۲}$	$۲^{۹} \cdot ۳^{۵} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷ \cdot ۱۱$	۲	$L_{۲}(۱۳^{۲})$	$۲^{۳} \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot ۱۳^{۲} \cdot ۱۷$	۴
$U_{۶}(۲)$	$۲^{۱۵} \cdot ۳^{۶} \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot ۱۱$	۶	$S_{۴}(۱۳)$	$۲^{۶} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵ \cdot ۷^{۲} \cdot ۱۳^{۴} \cdot ۱۷$	۲
$L_{۳}(۳)$	$۲^{۴} \cdot ۳^{۳} \cdot ۱۳$	۲	$L_{۳}(۱۶)$	$۲^{۱۲} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷ \cdot ۱۳ \cdot ۱۷$	۲۴
$L_{۲}(۲۵)$	$۲^{۳} \cdot ۳ \cdot ۵^{۲} \cdot ۱۳$	۴	$S_{۶}(۴)$	$۲^{۱۸} \cdot ۳^{۴} \cdot ۵^{۳} \cdot ۷ \cdot ۱۳ \cdot ۱۷$	۲
$U_{۳}(۴)$	$۲^{۶} \cdot ۳ \cdot ۵^{۲} \cdot ۱۳$	۴	$O_{۸}^{+}(۴)$	$۲^{۲۴} \cdot ۳^{۵} \cdot ۵^{۴} \cdot ۷ \cdot ۱۳ \cdot ۱۷^{۲}$	۱۲
$S_{۴}(۵)$	$۲^{۶} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵^{۴} \cdot ۱۳$	۲	$F_{۴}(۲)$	$۲^{۲۴} \cdot ۳^{۶} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷^{۲} \cdot ۱۳ \cdot ۱۷$	۲
$L_{۴}(۳)$	$۲^{۷} \cdot ۳^{۶} \cdot ۵ \cdot ۱۳$	۴	$A_{۱۷}$	$۲^{۱۴} \cdot ۳^{۶} \cdot ۵^{۳} \cdot ۷^{۲} \cdot ۱۱ \cdot ۱۳ \cdot ۱۷$	۲
${}^{۲}F_{۴}(۲)'$	$۲^{۱۱} \cdot ۳^{۳} \cdot ۵^{۲} \cdot ۱۳$	۲	$A_{۱۸}$	$۲^{۱۵} \cdot ۳^{۸} \cdot ۵^{۳} \cdot ۷^{۲} \cdot ۱۱ \cdot ۱۳ \cdot ۱۷$	۲
$L_{۲}(۱۳)$	$۲^{۲} \cdot ۳ \cdot ۷ \cdot ۱۳$	۲	$L_{۲}(۱۹)$	$۲^{۲} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵ \cdot ۱۹$	۲
$L_{۲}(۲۷)$	$۲^{۲} \cdot ۳^{۳} \cdot ۷ \cdot ۱۳$	۶	$L_{۳}(۷)$	$۲^{۵} \cdot ۳^{۲} \cdot ۷^{۳} \cdot ۱۹$	۶
$G_{۲}(۳)$	$۲^{۶} \cdot ۳^{۶} \cdot ۷ \cdot ۱۳$	۲	$U_{۳}(۲^{۳})$	$۲^{۹} \cdot ۳^{۴} \cdot ۷ \cdot ۱۹$	۱۸
${}^{۳}D_{۴}(۲)$	$۲^{۱۲} \cdot ۳^{۴} \cdot ۷^{۲} \cdot ۱۳$	۳	$U_{۳}(۱۹)$	$۲^{۵} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷^{۳} \cdot ۱۹$	۲
$Sz(۸)$	$۲^{۶} \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot ۱۳$	۳	$L_{۴}(۷)$	$۲^{۹} \cdot ۳^{۴} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷^{۶} \cdot ۱۹$	۴

o	$\lvert S\rvert$	S	o	$\lvert S\rvert$	S
۲	$۲^{۲۶} \cdot ۳^{۱۳} \cdot ۵^{۶} \cdot ۷^{۴}$ $\cdot ۱۱^{۲} \cdot ۱۳^{۲} \cdot ۱۷ \cdot ۱۹ \cdot ۲۳ \cdot ۲۹$	$A_{۲۹}$	۲	$۲^{۷} \cdot ۳^{۵} \cdot ۵ \cdot ۱۷ \cdot ۱۹$	$J_{۳}$
۲	$۲^{۲۷} \cdot ۳^{۱۴} \cdot ۵^{۷} \cdot ۷^{۴}$ $\cdot ۱۱^{۲} \cdot ۱۳^{۲} \cdot ۱۷ \cdot ۱۹ \cdot ۲۳ \cdot ۲۹$	$A_{۳۰}$	۱	$۲^{۵} \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot ۱۱ \cdot ۱۹$	$J_{۱}$
۲	$۲^{۵} \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot ۳۱$	$L_{۲}(۳۱)$	۲	$۲^{۴} \cdot ۳ \cdot ۵^{۲} \cdot ۷ \cdot ۱۱^{۳} \cdot ۱۹$	$L_{۳}(۱۱)$
۲	$۲^{۵} \cdot ۳ \cdot ۵^{۳} \cdot ۳۱$	$L_{۳}(۵)$	۲	$۲^{۱۴} \cdot ۳^{۶} \cdot ۵^{۶} \cdot ۷ \cdot ۱۱ \cdot ۱۹$	HN
۵	$۲^{۵} \cdot ۳ \cdot ۱۱ \cdot ۳۱$	$L_{۲}(۲^{۵})$	۶	$۲^{۱۸} \cdot ۳^{۷} \cdot ۵ \cdot ۷^{۲} \cdot ۱۳ \cdot ۱۹$	$U_{۴}(۲^{۳})$
۶	$۲^{۲} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵^{۳} \cdot ۷ \cdot ۳۱$	$L_{۲}(۵^{۳})$	۲	$۲^{۱۶} \cdot ۳^{۸} \cdot ۵^{۳} \cdot ۷^{۲} \cdot ۱۱ \cdot ۱۳ \cdot ۱۷ \cdot ۱۹$	$A_{۱۹}$
۱	$۲^{۶} \cdot ۳^{۳} \cdot ۵^{۶} \cdot ۷ \cdot ۳۱$	$G_{۲}(۵)$	۲	$۲^{۱۸} \cdot ۳^{۸} \cdot ۵^{۴} \cdot ۷^{۲} \cdot ۱۱ \cdot ۱۳ \cdot ۱۷ \cdot ۱۹$	$A_{۲۰}$
۲	$۲^{۱۰} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot ۳۱$	$L_{۵}(۲)$	۲	$۲^{۱۸} \cdot ۳^{۹} \cdot ۵^{۴} \cdot ۷^{۳} \cdot ۱۱ \cdot ۱۳ \cdot ۱۷ \cdot ۱۹$	$A_{۲۱}$
۲	$۲^{۱۵} \cdot ۳^{۴} \cdot ۵ \cdot ۷^{۲} \cdot ۳۱$	$L_{۶}(۲)$	۲	$۲^{۲۰} \cdot ۳^{۹} \cdot ۵^{۴} \cdot ۷^{۳} \cdot ۱۱^{۲} \cdot ۱۳ \cdot ۱۷ \cdot ۱۹$	$A_{۲۲}$
۸	$۲^{۷} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵^{۶} \cdot ۱۳ \cdot ۳۱$	$L_{۴}(۵)$	۶	$۲^{۳۶} \cdot ۳^{۹} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷^{۲} \cdot ۱۱ \cdot ۱۳ \cdot ۱۷ \cdot ۱۹$	${}^{۲}E_{۶}(۲)$
۱۲	$۲^{۷} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵^{۶} \cdot ۷ \cdot ۱۳ \cdot ۳۱$	$L_{۳}(۵^{۲})$	۲	$۲^{۳} \cdot ۳ \cdot ۱۱ \cdot ۲۳$	$L_{۲}(۲۳)$
۲	$۲^{۹} \cdot ۳^{۴} \cdot ۵^{۹} \cdot ۷ \cdot ۱۳ \cdot ۳۱$	$O_{۷}(۵)$	۶	$۲^{۷} \cdot ۳^{۲} \cdot ۱۱ \cdot ۱۳^{۲} \cdot ۲۳^{۳}$	$U_{۳}(۲۳)$
۲	$۲^{۹} \cdot ۳^{۴} \cdot ۵^{۹} \cdot ۷ \cdot ۱۳ \cdot ۳۱$	$S_{۶}(۵)$	۱	$۲^{۷} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot ۱۱ \cdot ۲۳$	$M_{۲۳}$
۲۴	$۲^{۱۲} \cdot ۳^{۵} \cdot ۵^{۱۲} \cdot ۷ \cdot ۱۳^{۲} \cdot ۳۱$	$O_{۸}^{+}(۵)$	۱	$۲^{۱۰} \cdot ۳^{۳} \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot ۱۱ \cdot ۲۳$	$M_{۲۴}$
۲	$۲^{۲۰} \cdot ۳^{۵} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷ \cdot ۱۷ \cdot ۳۱$	$O_{۱۰}^{+}(۲)$	۱	$۲^{۱۰} \cdot ۳^{۷} \cdot ۵^{۳} \cdot ۷ \cdot ۱۱ \cdot ۲۳$	$Co_{۳}$
۲	$۲^{۱۱} \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot ۷^{۲} \cdot ۱۹ \cdot ۳۱^{۳}$	$U_{۳}(۳۱)$	۱	$۲^{۱۸} \cdot ۳^{۶} \cdot ۵^{۳} \cdot ۷ \cdot ۱۱ \cdot ۲۳$	$Co_{۲}$
۴	$۲^{۲۰} \cdot ۳^{۵} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷ \cdot ۱۱ \cdot ۱۷ \cdot ۳۱$	$L_{۵}(۲^{۲})$	۱	$۲^{۲۱} \cdot ۳^{۹} \cdot ۵^{۴} \cdot ۷^{۲} \cdot ۱۱ \cdot ۱۳ \cdot ۲۳$	$Co_{۱}$
۱	$۲^{۲۵} \cdot ۳^{۶} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷ \cdot ۱۱ \cdot ۱۷ \cdot ۳۱$	$S_{۱۰}(۲)$	۱	$۲^{۱۸} \cdot ۳^{۱۳} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷ \cdot$ $۱۱ \cdot ۱۳ \cdot ۱۷ \cdot ۲۳$	$Fi_{۲۳}$
۲	$۲^{۳۰} \cdot ۳^{۸} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷^{۲} \cdot ۱۱ \cdot ۱۷ \cdot ۳۱$	$O_{۱۲}^{+}(۲)$	۲	$۲^{۲۰} \cdot ۳^{۹} \cdot ۵^{۴} \cdot ۷^{۳} \cdot$ $۱۱^{۲} \cdot ۱۳ \cdot ۱۷ \cdot ۱۹ \cdot ۲۳$	$A_{۲۳}$
۲	$۲^{۹} \cdot ۳^{۴} \cdot ۵ \cdot ۷^{۳} \cdot ۱۱ \cdot ۱۹ \cdot ۳۱$	$O'N$	۲	$۲^{۲۳} \cdot ۳^{۱۰} \cdot ۵^{۴} \cdot ۷^{۳} \cdot$ $۱۱^{۲} \cdot ۱۳ \cdot ۱۷ \cdot ۱۹ \cdot ۲۳$	$A_{۲۴}$
۱	$۲^{۱۵} \cdot ۳^{۱۰} \cdot ۵^{۳} \cdot ۷^{۲} \cdot ۱۳ \cdot ۱۹ \cdot ۳۱$	Th	۲	$۲^{۲۳} \cdot ۳^{۱۰} \cdot ۵^{۶} \cdot ۷^{۳} \cdot$ $۱۱^{۲} \cdot ۱۳ \cdot ۱۷ \cdot ۱۹ \cdot ۲۳$	$A_{۲۵}$
۲	$۲^{۳۰} \cdot ۳^{۶} \cdot ۵^{۳} \cdot ۷ \cdot ۱۱ \cdot ۱۳ \cdot ۱۷ \cdot ۳۱$	$O_{۱۲}^{-}(۲)$	۲	$۲^{۲۴} \cdot ۳^{۱۰} \cdot ۵^{۶} \cdot ۷^{۳} \cdot$ $۱۱^{۲} \cdot ۱۳^{۲} \cdot ۱۷ \cdot ۱۹ \cdot ۲۳$	$A_{۲۶}$
۱۲	$۲^{۳۰} \cdot ۳^{۶} \cdot ۵^{۳} \cdot ۷^{۲} \cdot ۱۱ \cdot ۱۳ \cdot ۱۷ \cdot ۳۱$	$L_{۶}(۲^{۲})$	۲	$۲^{۲۴} \cdot ۳^{۱۳} \cdot ۵^{۶} \cdot ۷^{۳} \cdot$ $۱۱^{۲} \cdot ۱۳^{۲} \cdot ۱۷ \cdot ۱۹ \cdot ۲۳$	$A_{۲۷}$
۱	$۲^{۳۶} \cdot ۳^{۸} \cdot ۵^{۳} \cdot ۷^{۲} \cdot ۱۱ \cdot ۱۳ \cdot ۱۷ \cdot ۳۱$	$S_{۱۲}(۲)$	۲	$۲^{۲۶} \cdot ۳^{۱۳} \cdot ۵^{۶} \cdot ۷^{۴} \cdot$ $۱۱^{۲} \cdot ۱۳^{۲} \cdot ۱۷ \cdot ۱۹ \cdot ۲۳$	$A_{۲۸}$
۲	$۲^{۲۴} \cdot ۳^{۱۳} \cdot ۵^{۶} \cdot ۷^{۴} \cdot ۱۱^{۲}$ $\cdot ۱۳^{۲} \cdot ۱۷ \cdot ۱۹ \cdot ۲۳ \cdot ۲۹ \cdot ۳۱$	$A_{۳۱}$	۲	$۲^{۲} \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot ۲۹$	$L_{۲}(۲۹)$
۲	$۲^{۲۹} \cdot ۳^{۱۳} \cdot ۵^{۶} \cdot ۷^{۴} \cdot ۱۱^{۲}$ $\cdot ۱۳^{۲} \cdot ۱۷ \cdot ۱۹ \cdot ۲۳ \cdot ۲۹ \cdot ۳۱$	$A_{۳۲}$	۴	$۲^{۵} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵ \cdot ۱۷^{۲} \cdot ۲۹$	$L_{۲}(۱۷^{۲})$
۲	$۲^{۲۹} \cdot ۳^{۱۴} \cdot ۵^{۶} \cdot ۷^{۴} \cdot ۱۱^{۳}$ $\cdot ۱۳^{۲} \cdot ۱۷ \cdot ۱۹ \cdot ۲۳ \cdot ۲۹ \cdot ۳۱$	$A_{۳۳}$	۲	$۲^{۱۰} \cdot ۳^{۴} \cdot ۵ \cdot ۱۷^{۴} \cdot ۲۹$	$S_{۴}(۱۷)$
۲	$۲^{۳۰} \cdot ۳^{۱۴} \cdot ۵^{۶} \cdot ۷^{۴} \cdot ۱۱^{۳}$ $\cdot ۱۳^{۲} \cdot ۱۷^{۲} \cdot ۱۹ \cdot ۲۳ \cdot ۲۹ \cdot ۳۱$	$A_{۳۴}$	۱	$۲^{۱۴} \cdot ۳^{۳} \cdot ۵^{۳} \cdot ۷ \cdot ۱۳ \cdot ۲۹$	Ru
۲	$۲^{۳۰} \cdot ۳^{۱۴} \cdot ۵^{۷} \cdot ۷^{۵} \cdot ۱۱^{۳}$ $\cdot ۱۳^{۲} \cdot ۱۷^{۲} \cdot ۱۹ \cdot ۲۳ \cdot ۲۹ \cdot ۳۱$	$A_{۳۵}$	۴	$۲^{۱۱} \cdot ۳^{۷} \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot ۱۳ \cdot ۱۷^{۶} \cdot ۲۹$	$U_{۴}(۱۷)$
۲	$۲^{۳۲} \cdot ۳^{۱۶} \cdot ۵^{۷} \cdot ۷^{۵} \cdot ۱۱^{۳}$ $\cdot ۱۳^{۲} \cdot ۱۷^{۲} \cdot ۱۹ \cdot ۲۳ \cdot ۲۹ \cdot ۳۱$	$A_{۳۶}$	۲	$۲^{۲۱} \cdot ۳^{۱۶} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷^{۳} \cdot ۱۱ \cdot$ $۱۳ \cdot ۱۷ \cdot ۲۳ \cdot ۲۹$	$Fi'_{۲۴}$