دانشگاه مازندران

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض
(هندسه دیفرانسیل)

موضوع:

خمینه های متقارن همدیس وخمینه های شبه همدیس ریمانی بازگشتی

استاد راهنما:

دکتر ابوالفضل طالشیان

استاد مشاور:

دکترمهدی رفیعی راد

نگارش:

فرشته محمودیان بالادهی

تیرماه ۹۱

تقدیم به :

پدر و مادر عزیزم

به پاس عاطفه سرشار وگرمای امیدبخش وجودشان که دراین سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است.

به پاس قلبهای بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی وترس در پناهشان به شجاعت می گراید.

وبه پاس محبت های بی دریغ شان که هرگز فروکش نمیکند.

سپاسگزاری

سپاس و ثنای بی حد بر آستان صفات خداوندی که در کمال رافت در نهایت عطوفت رخصت اتمام این پایان نامه را به بنده عطا فرموده است.

بر خود لازم می دانم که تا بدینوسیله از زحمات بی دریغ، تلاش های بی وقفه و راهنمایی های ارزشمند استاد گرامی جناب آقای دکتر ابوالفضل طالشیان تشکر و قدردانی نمایم.

همچنین از زحمات استاد مشاورم جناب آقای دکتر رفیعی نیکو تشکر را دارم.

از آقایان دکتر علیزاده افروزی و دکتر تقوی که زحمت داوری این پایان نامه را پذیرفتند و همچنین آقای هاشمی که به عنوان نماینده تحصیلات تکمیلی حضور داشتند قدردانی می نمایم.

سپاس و تشکر بیکرانم را به همدلی و همراهی و همگامی پدر و مادر مهربانم که زحمات بی دریغشان همواره مشوقم بوده تقدیم می کنم.

شکر خدا که هر چه طلب کردم از خدا بر منتهای همت خود کامران شدم.

فرشته محمودیان

تیرماه ۹۱

چکیده

دردزینسکی و روتر [۲] در سال ۱۹۷۷، خمینه های متقارن همدیس را بررسی کردند، همچنین کوان و بک[۱۱] در سال ۲۰۰۴، خمینه های بازگشتی همدیس را مورد مطالعه قرار دادند. یانو و ساواکی [۱۳] در سال ۱۹۶۸، اولین بار کشان خمیدگی شبه همدیس را معرفی کردند که شامل هر دوی کشان خمیدگی همدیس و کشان خمیدگی هم دوری می باشد.

$$W_{jkl}^{m} = -(n-۲)bC_{jkl}^{m} + [a+(n-۲)b]\,\tilde{C}_{jkl}^{m}$$

در این پایان نامه، ابتدا خمینه های متقارن همدیس و سپس خمینه های متقارن شبه همدیس تعریف و مورد بررسی قرار گرفت و نتایج جالبی بدست آمد.فصل چهارم این پایان نامه شامل سه بخش است که در واقع از دو مقاله تشکیل شده است. در مقاله اول نشان داده شده است که یک خمینه ریمانی بازگشتی همدیس M با همبندی ریمانی ∇ و همراه با کشان خمیدگی همدیس همساز، متقارن همدیس است. و در مقاله دوم نشان داده شده که یک خمینه ریمانی شبه بازگشتی که دارای کشان خمیدگی شبه همدیس همساز است، متقارن همدیس است.

واژه های کلیدی: کشان خمیدگی همدیس، کشان خمیدگی شبه همدیس، متقارن همدیس، بازگشتی همدیس، بازگشتی ریچی، خمینه های ریمانی.

فهرست مندرجات

.

فصل اول

مفاهیم اولیه

.

۱-۱ خمینه[۱]

۱-۱-۲ تعریف فضای آفین[۲۳,۳۰]: فرض کنیم A یك مجموعه غیر تهی و V یك فضای برداری روی میدان F باشد. اگر برای تبدیل $\varphi: A\times A \longrightarrow V$ باضابطه $\varphi(p,q)=\overrightarrow{pq}\in V$ به ازای نقاط r,q,p در A روابط زیر برقرار باشد، A را یك فضای آفین می نامند.

آ) برای هر p ، q و r در A، داشته باشیم $\overrightarrow{pr}=\overrightarrow{pq}+\overrightarrow{qr}$

ب) برای هر نقطه انتخابی p در A و بردار α در V، نقطه یکتای q در A وجود داشته باشد به قسمی که $\overrightarrow{pq}=\alpha\in V$.

در اینجا p نقطه ابتدا و q نقطه انتها است. بعد A همیشه با بعد V برابر است. مجموعه A یك مجموعه از نقاط است. گاهی مجموعه A را یك مجموعه نقطه‌ای و فضای آفین A را یك فضای نقطه‌ای نامند.

۱-۱-۲[۲٤] تعریف: فضای X ، فضای ضرب داخلی نامیده می شود هرگاه ضرب داخلی روی X که با نگاشت $\begin{cases} g: X\times X \to R \\ g(x,y)=\langle x,y\rangle \end{cases}$ معرفی می شود دارای خواص زیر باشد

۱. $\langle x,y\rangle>\cdot$ برای هر $\cdot\neq x\in X$ ، $\langle\cdot,\cdot\rangle=\cdot$.

۲. $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$ برای هر $x,y\in X$.

۳. $<\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2, y>=\lambda_1\langle x_1,y\rangle+\lambda_2\langle x_2,y\rangle$.

برای هر $\lambda_1,\lambda_2\in R$ و هر $x_1,y_2,y\in X$

و نیز داریم $\|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$.

اگر $\|x\|=1$ یعنی $\langle x,x\rangle=1$ ، آنگاه بردار $x\in X$ را بردار واحد گویند و یك زیر مجموعه غیر تهی $\{x_1,\ldots,x_n\}$ از X را مجموعه متعامد می نامند هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد.

الف- $\|x_i\|=1$ یعنی $\langle x_i,x_j\rangle=1$ برای همه $i=j$

.

۱- Manifold

ب- $\langle x_i , x_j \rangle = ۰$ برای همه $i \neq j$

۱-۱-۳ تعریف [۳۰]: اگر روی فضای برداری R^n یك ضرب داخلی تعریف کنیم، یعنی:

$$\langle \cdot \rangle : R^n \times R^n \longrightarrow R$$

$$(x , y) \longrightarrow \langle x , y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

آن‌گاه $\mathrm{E}^n = (R, \langle . \rangle)$ را فضای اقلیدسی نامند. و با استفاده از

$$d : \mathrm{E}^n \times \mathrm{E}^n \longrightarrow R$$

$$(x , y) \longrightarrow d(x , y) = \|x , y\| = \sum_{i=۱}^{n} (y_i - x_i)^۲$$

یك متر روی E^n تعریف می شود. پس E^n یك فضای متری است.

۱-۱-٤ تعریف[٤,۳۰]: اگر x یك نقطه در E^n باشد آن‌گاه $\overrightarrow{e_0 x}$ بر اساس میدان استانده n وجهی متعامد اقلیدسی عبارت است از $\overrightarrow{e.x} = \sum_{i=۱}^{n} x_i . \overrightarrow{e.e_i}$ که $x_i : E^n \longrightarrow R$ را توابع مختصاتی اقلیدسی و n تائی $\{x_۱, x_۲, ..., x_n\}$ را مجموعه مختصات اقلیدسی گویند.

۱-۱-٥ تعریف[۲۹] : فرض کنیم X یك مجموعه غیر تهی و τ مجموعه‌ای از زیر مجموعه‌های باز X باشد، اگرشرایط زیر

۱- X و $\varnothing$ عضو τ باشند.

۲- برای هر $U \in \tau$ و $V \in \tau \Leftarrow V \cap U \in \tau$

۳- برای هر i در I اگر $U_i \in \tau$ باشد، آنگاه داشته باشیم $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$

برقرار باشند آنگاه τ را روی X یك توپولوژی و ساختمان (X , τ) را یك فضای توپولوژی گویند.

۱-۱-٦ تعریف همانسانی[1][۲٤,۲۷] : فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژی باشند. اگر نگاشت

.

۱- Homemorphism

$f: X \longrightarrow Y$ پیوسته و همچنین f^{-1} وجود داشته و پیوسته باشد، آنگاه f از X به Y یك همانسانی (همانریختی یا همئومورفیسم) است و وقتی f از X به Y یك همانسانی باشد، گوییم X و Y همانسانند (همانریختند یا همئومرفند).

۱-۱-۷ فضای هاسدورف[1][۲۴,۲۹] **:** فضای توپولوژی (X, τ) را یك فضای هاسدورف گویند هرگاه برای هر دو نقطه متمایز x و y یك همسایگی از x مانند V و یك همسایگی از y مانند U وجود داشته باشد به قسمی که

$$V \cap U = \varnothing$$

بعنوان مثال فضای اقلیدسی E^n ، یك فضای هاسدورف است.

۱-۱-۸ تعریف(خمینه توپولوژی)[۲۹]: فرض کنیم X یك فضای توپولوژی n بعدی باشد. اگر برای X ویژگی های زیر برقرار باشد، آنگاه X را یك خمینه توپولوژی گویند.

الف) X یك فضای هاسدورف باشد.

ب) هر زیر مجموعه باز از X با E^n یا با زیر مجموعه‌ای از E^n همانریخت باشد.

ج) X به وسیله تعداد شمارش پذیری از مجموعه های باز پوشانده شود.

۱-۱-۹ تعریف [۲۹]: فرض کنیم U در E^n یك مجموعه باز باشد. اگرتابع $f: U \longrightarrow R$ پیوسته و از هر مرتبه‌ای کلیه مشتق‌های جزیی اش وجود داشته و پیوسته باشند، آنگاه تابع f را دیفرانسیل‌پذیر گویند. وقتی تابعی از هرمرتبه‌ای دارای کلیه مشتق‌های جزئی باشد در آن صورت تابعی از رده‌ی C^∞ نامیده می شود و می نویسیم $f \in C^\infty(U,R)$.

توجه: برای دیفرانسیل‌پذیری از مرتبه K داریم $f \in C^k(U,R)$.

۱-۱-۱۰ تعریف(وابرریختی[2]**)[۴,۲۹]:** فرض کنیم U و V زیر مجموعه‌های باز فضای اقلیدسی E^n باشند. اگر تابع، $g: U \longrightarrow V$ در ویژگی های زیر صدق کند

.

۱- Hausdorff space
۲- Diffeomorphism

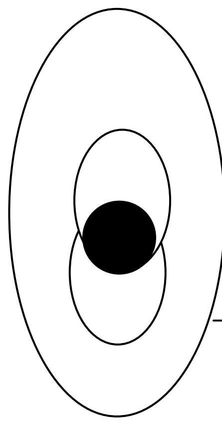
۱- $g \in C^{\infty}(U,V)$

۲- $g^{-1}:V \longrightarrow U$ وجود داشته و $g^{-1} \in C^{\infty}(V,U)$

آنگاه g را وابرریختی (دیفئومورفیسم) نامند و U و V را وابرریخت گویند.

۱-۱-۱۱ تعریف [۲۴,۲۹] : فرض کنیم M یك مجموعه و U یك زیرمجموعه باز از M باشد، اگر برد تابع یك‌به‌یك $x:U \subset M \longrightarrow R^n$ زیرمجموعه‌ی باز R^n باشد آنگاه $\{U,x\}$ را یك نقشه n بعدی گویند و با استفاده از توابع تصویری $p_i : R^n \longrightarrow R$ یك چنین نقشه‌ای روی قلمروش U، یك مجموعه از توابع مختصاتی $x_i = p_i o x$ را تعریف می کند به طوریکه $x=(x_1,x_2,...,x_n)$. همچنین $x(m)=(x_1(m),x_2(m),...,x_n(m))$ یك مجموعه مختصاتی موضعی در نقطه $m \in U$ است.

۱-۱-۱۲تعریف[۱۱,۲۹]: به گردایه ای از نقشه ها که قلمرویشان تمام مجموعه M را می پوشاند یك اطلس از M به R^n گفته می شود و با A نمایش می دهند. چنین اطلسی را C^{∞} گویند اگر برای هر دو نقشه‌ی x و y از اطلس A که اشتراك قلمروهایشان تهی نباشد $x \circ y^{-1} : R^n \longrightarrow R^n$ یك وابرریختی باشد.



.

۱-۱-۱۳ تعریف[٤]: يك اطلس C^{∞} از يك مجموعه M را كامل گویند اگر مشمول در اطلس C^{∞} دیگری نباشد. يك اطلس كامل C^{∞} از مجموعه M به توی R^{n} يك ساختار C^{∞}، از بعد n را روی M تعیین می نماید. دراینصورت مجموعه M با ساختار C^{∞} ارائه شده n بعدی، يك خمینه دیفرانسیل‌پذیر (منیفلد دیفرانسل‌پذیر) n بعدی نامیده می شود.

۱-۱-۱٤ تعریف[۲۹]: نقشه ای از اطلس كامل كه يك ساختار C^{∞} روی خمینه M ایجاد می كند، يك نقشه ازخمینه نامیده می شود و قلمرویش، قلمروی مختصاتی خمینه است.

۱-۱-۱٥ تعریف[۲٤,۲۹]: فرض كنیم خمینه‌های دیفرانسیل‌پذیر M و M' به ترتیب از بعد n و n' باشند و $f : M \longrightarrow M'$ يك تابع باشد. فرض كنیم m نقطه‌ای ازقلمروی تابع f بوده با انتخاب نقشه‌های x و x' به ترتیب در m و $f(m)$ تابع

$$F = x' \circ f \circ x^{-1} : R^{n} \longrightarrow R^{n'}$$

يك نمایشگر مختصاتی f نامیده می شود.

اگر F در xm از رده‌ی C^{∞} باشد، آنگاه f را در m دیفرانسیل‌پذیر گویند.

$$\begin{array}{ccccc} m & M & \xrightarrow{f} & M' & fm \\ & \downarrow x & & \downarrow x' & \\ xm & R^{n} & \xrightarrow{F} & R^{n'} & F(xm) \end{array}$$

$$F = x' \circ f \circ x^{-1} : R^{n} \longrightarrow R^{n'}$$

توجه: دیفرانسیل‌پذیری f در m مستقل از انتخاب نمایشگرمختصاتی است. به فرض $G = y' \circ y^{-1}$ نمایشگرمختصاتی دیگری باشد. اگر F در xm از رده‌ی C^{∞} باشد آنگاه $\left(y' \circ x'^{-1}\right) \circ F \circ \left(x \circ y^{-1}\right)$ در ym از رده‌ی C^{∞} است. لازم نیست كه این تابع برابر G باشد اما یقیناً يك تحدید از G است و لذا خود در ym از رده C^{∞} است.

تابع $f : M \longrightarrow M'$ دیفرانسیل‌پذیر است اگردرهر نقطه از قلمرویش دیفرانسل‌پذیر باشد.

.

۱-۲ بردارهای مماس و فضای مماس

۱-۲-۱ تعریف[۲۵]:

دوتائی (p,v) در E^n را در نظر می گیریم، p نقطه اثر و v را یك بردارمماس در نقطه p از E^n می نامند. مجموعه بردارهای مماس در نقطه p از E^n را به صورت $T_P\left(E^n\right)$ نشان می دهند وآن را فضای مماس در نقطه p می گویند.

توجه: از این پس $(v,p) \in T_p(E^n)$ را با v_p نمایش می‌دهیم، و $T_p\left(E^n\right)$ با عمل جمع و ضرب عددی یك فضای برداری است.

$$\oplus : T_p\left(E^n\right)\times T_p\left(E^n\right)\longrightarrow T_p\left(E^n\right)$$

$$\left(v_p,u_p\right)\longrightarrow v_p \oplus u_p = \left(p, v+u\right) = \left(v+u\right)\big|_p$$

$$\otimes : R\times T_p\left(E^n\right)\longrightarrow T_p\left(E^n\right)$$

$$\left(\lambda, v_p\right)\longrightarrow \lambda\cdot\left(v_p\right) = \left(p,\lambda v\right) = \lambda v_p$$

که در اینجا ساختمان $\{T_p(E^n),\oplus,R,+,.,\otimes\}$ روی میدان حقیقی R یك فضای برداری است بنابراین اگر V فضای برداری E^n باشد، فضای مماس را به‌طور خلاصه به صورت زیر ارائه می کنیم

$$T_p\left(E^n\right) = \left\{\left(p,v\right) : v\in V\ , p\in E^n\right\}$$

۱-۲-۲ تعریف[۸,۲۳]:

اگر $U \subseteq E^n$ و U مجموعه باز باشد، تابع

$$X : U\longrightarrow \bigcup_{p\in U} T_p\left(U\right)$$

با ضابطه $X\left(p\right) = X_p$ تابعی است که نقطه p از U را به فضای برداری X_p از $\bigcup_{p\in U} T_p\left(U\right)$ می نگارد و آن را میدان برداری روی U گویند.

.

حال تابع زیر را می توان تعریف کرد

$$\pi:\bigcup_{p\in U}T_p(U)\longrightarrow U$$
$$X_p\longrightarrow p$$

و آن را تصویر طبیعی نامند والبته خود $\pi oX=I:U\longrightarrow U$ یك تابع همانی است. اگر به جای فضای اقلیدسی E^n یك خمینه مانند M در نظر گرفته شود آن‌گاه تبدیل X به صورت زیر است

$$X:M\longrightarrow\bigcup_{p\in M}T_p(M)$$
$$p\longrightarrow X(p)=X_p\in T_p(M)$$

به طوریکه اگر

$$\pi:\bigcup_{P\in U}T_P(U)\longrightarrow U$$
$$X_P\longrightarrow P$$

تصویر طبیعی باشد و

$$\pi oX=I:M\longrightarrow M$$
$$P\longrightarrow P$$

آنگاه X یك میدان برداری روی خمینه M است.

۱-۲-۳ تعریف [۷,۲۳]:

مجموعه میدان‌های برداری روی M را با $\chi(M)$ نمایش می دهند که یك فضای میدان برداری را تشکیل می دهند

$$\chi(M)=\left\{X\,\middle|\,X:M\longrightarrow\bigcup_{P\in M}T_P(M)\right\}$$

بنابراین

$$\oplus:\chi(M)\times\chi(M)\longrightarrow\chi(M)$$
$$(X,Y)\longrightarrow X\oplus Y$$

برای هر p در M، $(X+Y)_p=X_P+Y_P$ و $(\chi(M),+)$ یك گروه تعویض‌پذیر است.

ضرب عددی با میدان‌های برداری (فضای برداری) عبارت است از

.

$$\odot : R \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$
$$(k, X) = kX$$
$$\forall p \in M \Rightarrow (kX)_P = k\vec{X}_P$$

پس ویژگی های فضای برداری در آن صدق می کند یعنی ساختمان $\{\chi(M),\oplus,R,+,.,\otimes\}$ یك فضای برداری است. این فضای برداری را روی خمینه M یا فضای اقلیدسی E^n ، یك فضای میدان برداری گویند که به صورت $\chi(E^n)$ هم ارائه می شود.

۱-۲-٤ تعریف (دوگان فضای مماس)[۲۵]:

دوگان فضای مماس $T_p(E^n)$ را با $T_p^*(E^n)$ نشان می دهیم

$$T_p^*(E_n) = \{V_p^* | V_p^* : T_p(E^n) \to R\}$$

که V_p^* دوگان بردار مماس V_p است.

۱-۳ توابع r- خطی و ۱- فرمی ها

۱-۳-۱ تعریف (۱- فرمی)[۲۵]:

فرض کنید $T_p^*(E^n)$ دوگان فضای مماس E^n در نقطه p باشد اگر تابع

$$\psi : E^n \to \bigcup_{p\in E^n} T_p^*(E^n)$$

طوری تعریف شود که داشته باشیم

$$\pi : \bigcup_{p\in E^n} T_p^*(E^n) \to E^n$$
$$\pi o \psi = I : E^n \to E^n$$

آنگاه تابع ψرا ۱- فرمی گویند.

.

مجموعـه‌ی همـه ۱- فرمـی هـا در E^n را بـا $\chi^*\left(E^n\right)$ نمـایش مـی دهند کـه $\chi^*\left(E^n\right)$ دوگـان فضـای میـدانهای بـرداری $\chi\left(E^n\right)$ اسـت. بطـور مشـابه سـاختار $\{\chi^*(E^n),\oplus,R,+,.,\otimes\}$ یـك فضای برداری ۱- فرمی ها است.

۱-۳-۲ مثال:

$n+1$ وجهی $\{p_{.},p_{۱},...,p_n\}$ در E^n مفروض است. مختصات اقلیدسی که به وسیله مجموعه نقاط $\{p_{.},p_{۱},...,p_n\}$ معلوم می گردد را به صورت $\{x_{۱},...,x_n\}$ نشان می دهیم. مجموعه‌ی برداری $\left\{\overrightarrow{p_{.}p_{۱}},...,\overrightarrow{p_{.}p_n}\right\}$ در E^n درواقع یك پایه فضای برداری E^n است. اکنون $v_i=\overrightarrow{p_0p_i}$ را درنظر می گیریم در آن صورت

$$\frac{\partial}{\partial x_i}:E^n\longrightarrow\bigcup_{p\in E^n}T_P\left(E^n\right)$$

$$p\longrightarrow\frac{\partial}{\partial x_i}(p)=(p,v)=v_p$$

می توان گفت که $\frac{\partial}{\partial x_i}$ یك میدان برداری در E^n است. به طور مشابه برای هر i، $1\le i\le n$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}:E^n\longrightarrow\bigcup_{p\in E^n}T_P\left(E^n\right)$$

$$p\longrightarrow\frac{\partial}{\partial x_i}(p)=\left\{p,\overrightarrow{p_{.}p_{۱}}\right\}$$

را می توان ارائه کرد.

۱-۳-۳ تعریف [۲۰]:

در هر نقطه p در E^n، n بردار مماس به‌صورت

.

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial x_1}(p) = (1,0,\ldots,0)\Big|_p$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial x_2}(p) = (0,1,\ldots,0)\Big|_p$$

.

.

.

$$\frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial x_n}(p) = (0,0,\ldots,1)\Big|_p$$

وجود دارد. بنابراین در E^n ، n بردار به دست می آید. مجموعه میدان برداری $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ را پایه طبیعی در E^n و یا به طور خلاصه میدان برداری طبیعی می نامند. در واقع مفهومش این است که برای هر $1 \le i \le n$ میدان برداری $\frac{\partial}{\partial x_i}$ مثبت بوده و در جهت محور x_i ، میدان برداری یکه است. اگر $Y \in \chi(E^n)$ را در نظر بگیریم با توجه به تعریف، پایه $\{y_i\}_{i=1}^n$ به صورت $Y = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ارائه می شود. در اینجا $y_i : E^n \longrightarrow R$ ، $1 \le i \le n$ توابع مختصاتی اقلیدسی میدان برداری Y می باشند.

۱-۳-۴ تعریف (توابع r- خطی)[۸,۲۵]: فرض کنید $V_1,\ldots,V_r$ فضای برداری روی R باشند. تابع $f : V_1\times\ldots\times V_r \to R$ را یك تابع r- خطی گوییم هرگاه به ازای هر i ، $1 \le i \le r$ ، v_i در V_i و a, b در R داشته باشیم

$$f(v_1,\ldots v_{i-1}, av_i + bv_i, v_{i+1},\ldots,v_r) =$$
$$af(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_r) + bf(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_r)$$

وقتی f، r- خطی باشد آنگاه به ازای هر V_i، نیزخطی است.

اگر $r=2$ آنگاه f را یك تابع دو خطی نامند یعنی $f : V_1\times V_2 \to R$ یك تابع دو خطی است هرگاه به ازای هر

$$v_2 = \sum_{j=1}^n b_j y_j \in V_2 \quad , \quad v_1 = \sum_{i=1}^n a_i x_i \in V_i$$

آنگاه

$$f(v_1,v_2) = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j f(x_i, y_j)$$

.

که $\{x_i\}$ پایه‌ای برای V_1 و $\{y_j\}$ پایه‌ای برای V_2 خواهند بود.

۱-۴ دیفرانسیل گیری نسبی و مشتق

۱-۴-۱ دیفرانسیل گیری نسبی و مشتق[۲۳,۲۵]:

فرض کنیم x یك نقشه با قلمروی U از خمینه دیفرانسیل‌پذیر M باشد. نسبت به این نقشه و نقشه همانی روی R، یك تابع دیفرانسیل‌پذیر $f : M \to R$ با قلمروی V دارای نمایش مختصاتی F است بطوریکه روی $U \cap V$، $f = F \circ x$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & R \\ x\downarrow & & \downarrow i \\ R^n & \xrightarrow{F} & R \end{array}$$

$F : R^n \to R$ یك تابع دیفرانسیل‌پذیر است. بنابراین دارای مشتق نسبی $F_{,i}\ (i = 1,2,\dots n)$ است (مشتق نسبت به مولفه ی i ام). اکنون $\frac{\partial f}{\partial x_i} = F_{,i} \circ x : M \to R$ را تعریف کنیم که توابع دیفرانسیل‌پذیر با قلمروی $U \cap V$ هستند.

اگر $x : M \to R^n$ یك نقشه باشد آنگاه اینگونه نگاشت ها، توابع مشتق‌های نسبی هستند. نقشه همانی روی R را معمولاً با t نمایش می دهند. پس اگر $f : R \to R$ یك تابع دیفرانسیل‌پذیر باشد، به جای $\frac{\partial f}{\partial t}$ ، مشتق معمولی $\frac{df}{dt}$ استفاده می شود. بطور کلی توابع $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ درست شبیه مشتق‌های نسبی عمل می کنند.

۱-۴- ۲ قضیه [۲۵]:

اگر g, f توابع دیفرانسیل‌پذیر روی M باشند و $\alpha, \beta \in R$ آنگاه

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha f + \beta g) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x_i} g + f\ \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

.

۱-٤-۳ تعریف مشتق سویی [۲۰,۲۵]:

فرض کنیم $R \rightarrow f : E^n$ یك تابع دیفرانسیل‌پذیر باشد و $v_p \in T_p\left(E^n\right)$، $\vec{v}_p = \overrightarrow{pq}$. در این صورت $\overrightarrow{v_p}[f] = \frac{d}{dt}\left[f\left(p_1 + t\left(q_1 - p_1\right), p_2 + t\left(q_2 - p_2\right), \dots p_n + t\left(q_n - p_n\right)\right)\right]\Big|_{t=0}$

را مشتق f در جهت(سوی) v_p نامند.

۱-٤-٤ قضیه[۲۵] :

اگر $f : E^n \rightarrow R$ تابع دیفرانسیل‌پذیر و $v = \left(v_1, v_2 \dots v_n\right)$ باشد در اینصورت

$$v_p[f] = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p.$$

۱-٤-٥ مثال [۲۵]:

اگر $f\left(x\right) = f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 x_2 x_3$ و $v = \left(1, 3, 4\right)$ و $p = \left(1, 1, 0\right)$ مفروض باشند، طبق قضیه $v_p[f]$ را بدست می آوریم

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_p = \left(2x_1 x_2 x_3\right)\Big|_p = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_p = \left(x_1^2 x_3\right)\Big|_p = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}\Big|_p = \left(x_1^2 x_2\right)\Big|_p = 1$$

$$v_p[f] = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_p v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_p v_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\Big|_p v_3 = 0 \times 1 + 0 \times 3 + 1 \times 4 = 4$$

$$v_p[f] = 4$$

اگر M یك خمینه دیفرانسیل‌پذیر از بعد n باشد مجموعه توابع دیفرانسیل‌پذیر $f : M \rightarrow R$ که قلمرویشان شامل یك نقطه ارائه شده $m \in M$ می باشد، با $F\left(m\right)$ نمایش می دهیم. ترکیبات R- خطی چنین توابعی نیز متعلق به $F\left(m\right)$ می باشند.

۱-٤-٦ تعریف(فضای مماس) [۲۳]:

.

مجموعه همه مشتق‌های $F(m)$ دارای یك ساختار R - خطی است و یك فضای برداری حقیقی می باشد که آن را فضای مماس $T_m(M)$ در m می نامیم. هر مشتق روی $F(m)$ یك عضو از این فضا است و یك بردار مماس در m نامیده می شود.

۱-٤-۷ قضیه [۲۳]:

اگر x نقشه ای از M باشد که قلمرویش شامل یك نقطه ارائه شده m باشد آنگاه بردارهای

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_m \qquad (i=1,...,n)$$

برای $T_m(M)$ تشکیل یك پایه می دهند.

۱-٤-۸ تعریف[۲۵]:

اگر برای هر p در E^n و $X\in\chi(E^n)$ و $F \in C^{\infty}(E^n, R)$، $(XF)(P)=X_p[F]$ باشد، آنگاه تابع $X[F]$ در $C^{\infty}(E^n, R)$ را مشتق F در جهت میدان برداری X نامند.

طبق تعریف اخیر، براساس تساوی $(XF)(p)=X_p[F]$، X یك نگاشت است به قسمی که

$$X : C^{\infty}(E^n, R) \to C^{\infty}(E^n, R)$$

۱-٤-۹ قضیه[۲۵]:

اگر برای هر $X, Y \in\chi(E^n)$ و $\forall f, g, h \in C^{\infty}(E^n, R)$ و $\forall a,b\in R$ و هر P در E^n، $fX(P)=f(P)X_p$، در این صورت

۱- $(fX+gY)[h]=fX[h]+gY[h]$

۲- $X(af+bg)=aX[f]+bX[g]$

۳- $X(fg) = X[f]g+fX[g]$

۱-۵ مشتق هموردا

۱-۵-۱ تعریف[۷]: