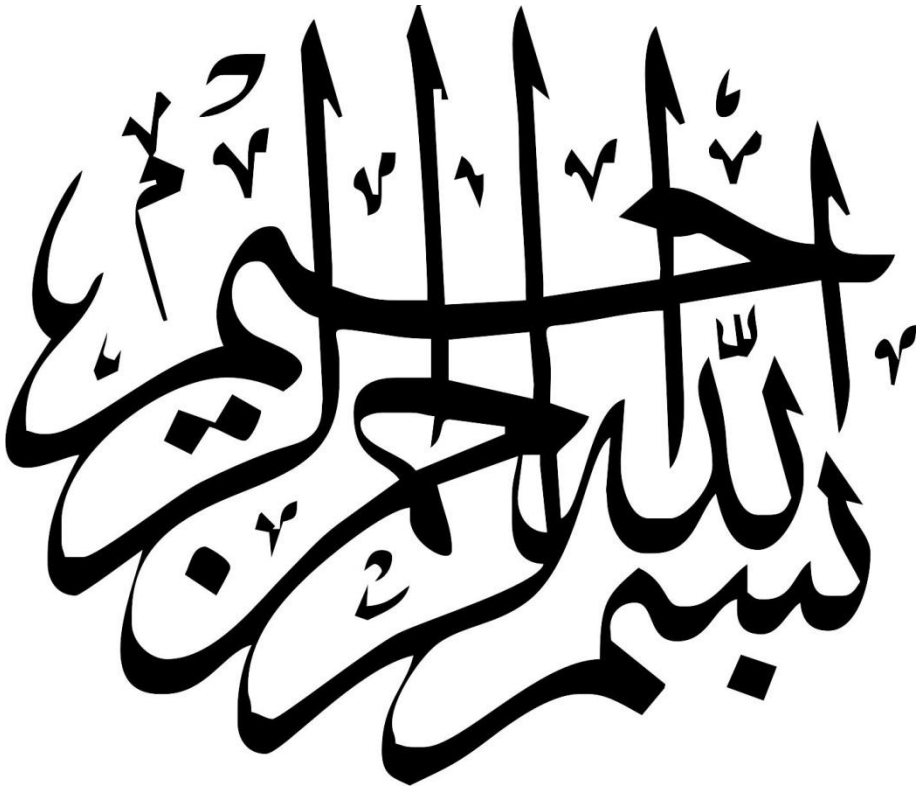

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده : علوم ریاضی

گروه : ریاضی کاربردی

عنوان پایان نامه ارشد

پایداری سیستم های گسسته زمانی خطی مثبت

دانشجو : **فاطمه محمدی زاده سوروئی**

استاد راهنما :

دکتر حجت احسنی طهرانی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ماه و سال انتشار : **تیر ماه ۱۳۹۰**

تقدیم به:

پدرم، که برای بالندگی ام خمید...

مادرم، که برای شکوفایی ام پژمرد...

آنان که توانشان رفت تا به توانایی برسم و مویشان سپید گشت تا رویم سپید بماند.

در برابرشان زانوی ادب بر زمین می نهم.

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی

به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است

و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند.

خدایا مرا تقدیر پذیری خیر بنویس

تا هر آنچه را که تو زود میخواهی من دیر نخواهم

و هر آنچه را که تو دیر می خواهی من زود نخواهم

به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق» بسی شایسته است

که با درود فراوان خدمت خانواده بسیار عزیز، دلسوز و فداکارم که پیوسته جرعه نوش جام تعلیم و تربیت، فضیلت و انسانیّت آنها بوده‌ام و همواره چراغ وجودشان رو شنگر راه من در سختی ها و مشکلات بوده است، از ایشان تقدیر و تشکر نمایم.

از زحمات بی دریغ اساتید بزرگوارم در دانشگاه صنعتی شاهرود بخصوص استاد ارجمندم جناب آقای دکتر احسن طهرانی که با راهنمایی های خود نه تنها در زینه پایان نامه که در زندگی نیز راهگشای اینجانب بودند کمال تشکر و سپاسگزاری را داشته باشم.

همچنین از هم اتاقی های عزیزم و دوستان گرامیم که لحظاتی سرشار از صفا و صمیمیت را در کنار خود برایم به یادگار گذاشتند و همیشه اینجانب را مورد لطف و محبت خود قرار داده و به من درس صداقت و مهر ورزی آموختند بسیار سپاسگزار باشم.

تعهدنامه

اینجانب **فاطمه محمدی زاده سوروئی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه **صنعتی شاهرود** نویسنده پایان‌نامه: **پایداری سیستم های گسسته زمانی خطی مثبت** تحت راهنمایی‌های **دکتر حجت احسنی طهرانی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تا کنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا « **Shahrood University of Technology** » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجودات زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه سیستم های خطی گسسته-زمانی مثبت، ویژگی های کنترل پذیری، دسترسی پذیری و مشاهده پذیری برای این نوع از سیستم ها بیان شده، و سپس انواع پایداری برای سیستم مثبت و نیز مسئله تخصیص مقدار ویژه با استفاده از ماتریس همدم مورد بررسی قرار گرفته و در نهایت روشی جدید برای تخصیص مقدار ویژه با استفاده از فرم همدم برداری و پارامتری سازی پس خورد حالت بیان گردیده، به گونه ای که سیستم حلقه بسته مثبت باقی بماند.

واژه‌های کلیدی: سیستم مثبت، پس خورد، تخصیص مقدار ویژه.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه:

۱. محمدی زاده، ف. طهرانی، ح. ا. ارجمندزاده، ز. تعیین کنترلگر سیستم خطی مثبت با نرم کمینه . چهارمین کنفرانس بین المللی انجمن ایرانی تحقیق در عملیات.

۲. محمدی زاده، ف. طهرانی، ح. ا. ارجمندزاده، ز. تخصیص مقادیر ویژه برای کنترل سیستم خطی مثبت. ششمین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن.

۳. ارجمندزاده، ز. طهرانی، ح. ا. محمدی زاده، ف. تعیین کنترلگر بهینه زمانی سیستم های دو بعدی خطی راسر. چهارمین کنفرانس بین المللی انجمن ایرانی تحقیق در عملیات.

۴.

Arjmand zadeh, Z. Tehrani, H. A. Mohamadi zadeh, F. Stabilization of fractional 2D linear systems described by the roesser model.

فهرست مطالب

۱ مقدمه و تاریخچه **۱**
۱.۱ تاریخچه ۱
۲.۱ تعریف‌ها و نمادهای مقدماتی ۲
۱.۲.۱ معرفی سیستم های کنترل ۳

۲ کنترل سیستم های خطی مثبت **۱۱**
۱.۲ مقدمه ۱۱
۲.۲ دسترسی پذیری ۱۲
۳.۲ کنترل پذیری سیستم های مثبت ۱۷
۱.۳.۲ دسترسی پذیری و کنترل پذیری سیستم های مثبت با پس خورد حالت . . ۱۸
۴.۲ مشاهده پذیری سیستم های مثبت ۱۹
۱.۴.۲ سیستم های مثبت دوگان و رابطه بین دسترسی پذیری و مشاهده پذیری . ۲۱

۳ پایداری و تخصیص مقادیر ویژه **۲۳**
۱.۳ پایداری سیستم های مثبت ۲۳
۲.۳ پایداری ورودی کراندار-خروجی کراندار ۲۷
۳.۳ پایداری مجانبی مولفه ای و پایداری نمایی سیستم های مثبت ۲۹
۴.۳ تخصیص مقادیر ویژه سیستم های مثبت ۳۲
۱.۴.۳ مقدمات ۳۳
۲.۴.۳ فرمول بندی مسئله ۳۳
۵.۳ ماتریس های نامنفی متشابه تکینی ۳۵
۶.۳ مشخصه سازی طیف و تخصیص مقدار ویژه ۳۷
۱.۶.۳ الگوریتم روش تخصیص مقدار ویژه ۴۰

۴ روشی جدید جهت تخصیص مقادیر ویژه سیستم های خطی مثبت **۴۴**
۱.۴ مقدمه ۴۴
۱.۱.۴ ناورداهای کرونکر ۴۶
۲.۱.۴ تبدیل به فرم همدم برداری ۴۷
۲.۴ نامنفی بودن کنترل ها ۵۷

۳.۴ نتیجه گیری ۵۹

برنامه های کامپیوتری **۶۱**

مراجع **۶۷**

فصل ۱
مقدمه و تاریخچه

۱.۱ تاریخچه

در طول دو دهه گذشته کارهای بسیاری روی بررسی و مشخصه سازی برخی ویژگی های مهم سیستم های خطی مثبت صورت گرفته است.

آقایان کاکسون[۱] [۴] ، شاپیرو[۲] [۴] ، رامچف[۳] [۲۰] ، جیمز[۴] [۸] و والچر[۵] دسترسی پذیری و کنترل پذیری سیستم های خطی مثبت را مورد بررسی قرار داده اند. مشاهده پذیری[۶] (که در فصل های بعد تعریف خواهد شد) این سیستم ها توسط اوتا[۷] [۱۷] و وان دن هاف[۸] مطالعه شده است. ساختار مجموعه های دسترس پذیر و رفتار مجانبی آنها توسط رامچف، فرینا[۹]، بنونتی[۱۰] و کمینه سازی سیستم توسط اندرسون[۱۱] و وان دن هاف مورد بررسی قرار گرفته اند. و سیستم های خطی دو بعدی مثبت توسط فرناسینی[۱۲]، والچر و کاکزورک[۱۳] [۱۰] مطالعه گردیده است.

---

[۱] Coxson
[۲] Shapiro
[۳] Rumchev
[۴] James
[۵] Valcher
[۶] identifiability
[۷] Ohta
[۸] Van Den Hof
[۹] Farina
[۱۰] Benvenuti
[۱۱] Anderson
[۱۲] Fornasini
[۱۳] Kaczorek

شکل ۱.۱: سیستم کنترل نشده

کنترل پس خورد سیستم های مثبت نیز توسط افرادی مانند برمن[۱۴] [۱۰] و کاکزورک مورد بحث قرار گرفته است. کاکزورک پایداری سیستم های خطی مثبت را با استفاده از پس خورد حالت خطی بدون محدودیت کنترل نامنفی در سیستم حلقه بسته در نظر گرفت و راه حلی که مسئله را بر اساس قضیه گرشگورین[۱۵] حل نماید را ارائه داد.

۲.۱ تعریف‌ها و نمادهای مقدماتی

تعریف ۱.۲.۱. سیستم:

سیستم[۱۶] عبارت است از یک عضو و یا مجموعه ای از اعضا، که به عنوان یک مجموعه با همدیگر کار می کنند.

شکل(۱.۱)یک رابطه ساده ورودی و خروجی را نشان می دهد، و نمونه ای از یک سیستم کنترل نشده است که شرایط موجود در دنیای فیزیکی را توصیف می کند.

چند مثال:

•نیروگاه

ورودی این سیستم سوخت می باشد. نیروگاه به عنوان یک سیستم عمل نموده و خروجی آن الکتریسیته می باشد.

•موتور الکتریکی

[۱۴] Berman
[۱۵] Gersgorin theorem
[۱۶] system

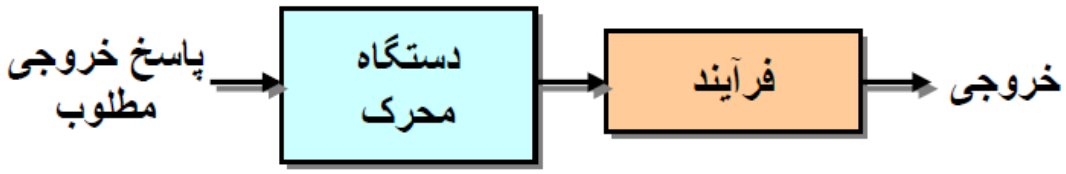
ورودی این سیستم الکتریسیته می باشد که موجب دوران سیستم که موتور می باشد، می گردد.

•ساختمان در طول زلزله

سیستم همان سازه است و حرکت فونداسیون همان سیگنال ورودی است و سیگنال خروجی پاسخ سازه است.

۱.۲.۱ معرفی سیستم های کنترل

تقاضای بشر برای کنترل سیستم های مختلف از جمله نیروهای طبیعت، یکی از علل پیشرفت انسان در طول تاریخ است. در خلال قرن بیستم مهندسی کنترل، بسیاری از آرزوهای بشر را جامه عمل پوشاند. نحوه کار ماشین ها و وسایل اولیه ای که به دست بشر ساخته شد، ایجاب می کرد که دست انسان مستقیما با آنها در تماس بوده و رفتار آنها را کنترل کند. بنابراین یک ماشین یا دستگاه دائما و به طور متناوب (هر چند دقیقه) احتیاج به کنترل داشته است. اما امروزه علم کنترل در قسمت هایی مورد استفاده قرار می گیرد که انسان به سادگی قادر به انجام آنها نیست. در بسیاری از مسائل از قبیل کنترل دقیق درجه حرارت، دقت در اندازه گیری، سرعت جوابگیری، علوم هسته ای، مهندسی و سایر رشته ها که انسان قادر به درک و حل سریع آنها نیست، کنترل خودکار نقش اساسی و حیاتی را ایفا می کند. رشد و توسعه طرز استفاده از دستگاه های کنترل خودکار در خلال ۳۰ تا ۳۵ سال اخیر، اثر مشخصی در زندگی بشر گذارده است. چون پیشرفت و استفاده از کنترل خودکار جهت اجرای بهترین نوع عملکرد سیستم های دینامیکی، بهبود کیفیت و زوال قیمت محصول، ازدیاد درصد تولید و سهولت زیاد کنترل و فرمان سیستم ها را سبب شده است. نام سیستم های کنترل خودکار اصولا به وسایلی اطلاق می شود که در هر لحظه و به طور خودکار یک سلسله از اعمال خود را بررسی، و اگر اختلافی با وضع یا نتیجه پیش بینی شده داشته باشد آن را اصلاح می کنند. اتومبیل بدون راننده یا هواپیمای بدون خلبان مثالهایی از کاربرد مدارهای کنترل خودکار در سالهای اخیر است. هواپیمای بدون خلبان در هر گونه شرایط جوی که از قبل به طور کامل قابل پیش بینی نیست، ارتفاع



شکل ۲.۱: سیستم کنترل حلقه باز

و زاویه حرکت با افق را حفظ می کند و پرواز را طبق برنامه به انجام می رساند. به طور کلی برای سیستم های کنترل خودکار سه خصوصیت اساسی تعریف می شود:

۱. کار یک مدار کنترل خودکار تا حد قابل قبولی مستقل از پارازیت ها و عوامل خارجی، قابل کنترل است.

۲. سیستم می تواند خود را با شرایطی که قابل پیش بینی نیست وفق دهد.

۳. دقت عمل بسیار خوب؛ و در اکثر موارد به مراتب بالاتر از دقت عمل انسان است.

تقسیم بندی سیستم های کنترل:

سیستم های کنترل به طور کلی به دو نوع عمده حلقه باز[۱۷] و حلقه بسته[۱۸] تقسیم می شوند. تفاوت اساسی این دو گروه از سیستم های کنترل ناشی از کاربرد شاخه پس خورد[۱۹] در سیستم های مدار بسته است.

تعریف ۲.۲.۱. سیستم های کنترل حلقه باز

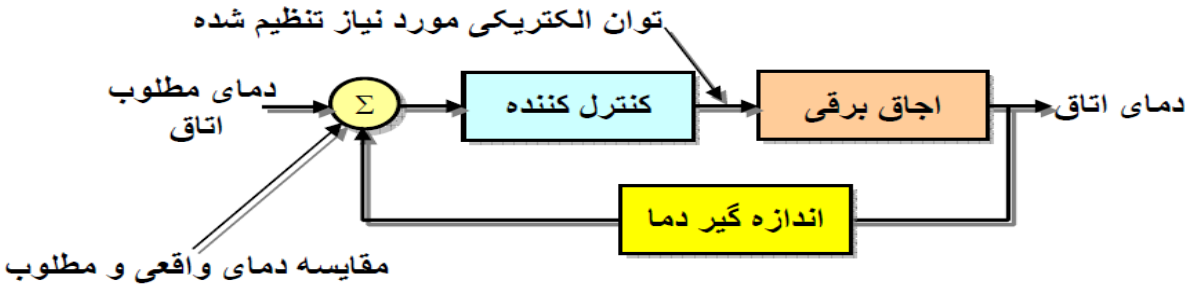
سیستم های کنترل حلقه باز سیستم هایی هستند که در آنها عمل کنترل تحت تاثیر نتیجه آن عمل نیست. به عبارت دیگر خروجی سیستم بر روی عمل کنترل اثری ندارد (شکل ۲.۱).

[۱۷] open-loop
[۱۸] close-loop
[۱۹] feed back

مثلا هواپیمایی که در بالای ابرها پرواز می کند و خلبان هواپیما فقط یک قطب نما دارد یک سیستم حلقه باز را تشکیل می دهد. در حالت ایده آل خلبان می تواند به کمک قطب نمای خود به مقصد دلخواه برسد، ولی اگر جریان هوا و باد را در نظر بگیریم و همچنین با توجه به اینکه عکس العمل خلبان برای تصحیح مسیر هواپیما آهسته است، معمولا برای پروازهای طولانی هواپیما از مسیر اصلی خود قدری منحرف می شود.

تعریف ۳.۲.۱. سیستم های کنترل حلقه بسته (پس خورد)

ملاحظه شد که در یک سیستم حلقه باز، رابطه مشخصی بین ورودی اصلی یا فرمان دهنده و خروجی یا فرمان گیرنده موجود است. ولی این رابطه ممکن است به علت ورودی های فرعی یا اغتشاشات که بر قسمت های مختلف مدار وارد می شود، تغییر کند. بنابراین در یک سیستم حلقه باز فقط با تنظیم ورودی نمی توان از نتیجه خروجی کاملا مطمئن بود. مثلا اگر اتاقی که توسط یک بخاری برقی گرم و جریان بخاری به وسیله یک مقاومت متغیر تنظیم شود، رابطه معینی بین اندازه مقاومت و کالری داده شده بوسیله بخاری، و در نتیجه دمای اتاق موجود خواهد بود. در این مثال دمای اتاق تحت فرمان اندازه مقاومت است و برای هر مقاومت، دمای معینی وجود خواهد داشت. حال اگر یکی از پنجره های اتاق باز شود، برای همان مقدار مقاومت، دیگر دمای اتاق ثابت نخواهد بود، بلکه مقدار دیگری را اختیار می نماید. لذا در این حالت تعیین مقدار مقاومت، مستقیما برای ایجاد دمای مورد نظر کافی نیست، بلکه باید دستگاهی تعبیه شود که دمای اتاق را در شرایط مختلف بررسی کند و در ضمن بررسی اگر لازم باشد مقاومت را متناسب با مقدار لازم تغییر دهد. برای این منظور فرض کنید یک ترموستات در اتاق و در سر راه جریان الکتریکی قرار داده شود به طوری که کلید جریان را در دمای پایین تر از دمای مطلوب باز کند، با توجه به شرایط جدید نوعی عمل فرمان از طرف دما انجام شده و اثر ورودی فرعی خنثی شده است (نظیر کنترل اتوهای برقی). در این حالت مدار فرمان حلقه باز نیست.



شکل ۳.۱: سیستم کنترل حلقه بسته

اختلالات یا آشفتگی عاملی است که بر روی خروجی سیستم کنترلی اثر می گذارد. به عنوان مثال برای اختلال در یک سیستم حرارت مرکزی می توان به عواملی مانند باز شدن پنجره، تغییر دما یا سرعت باد خارج ساختمان اشاره نمود. سیستم کنترلی که قادر به غلبه بر اغتشاشات باشد، دارای پیچیدگی بیشتر و در نتیجه هزینه بیشتر خواهد بود که البته امکان ناپایداری خواهد داشت.

•گرمکن الکتریکی با کنترل کننده دما

• یک سیستم کنترلی حلقه بسته (پس خوردی) اغلب از یک رابطه پیشنهادی بین خروجی و ورودی مرجع، تقویت شده و برای کنترل فرایند استفاده می کند.

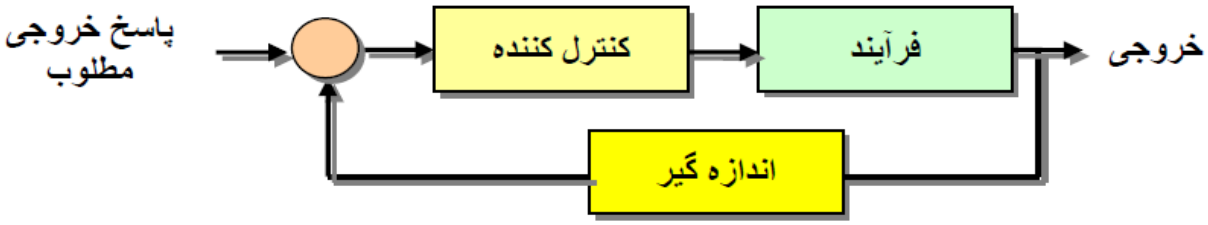
• در اغلب موارد تفاضل بین خروجی فرایند تحت کنترل و ورودی مرجع، تقویت شده و برای کنترل به فرایند اعمال می گردد به نحوی که این اختلاف به تدریج کاهش یابد.

• مفهوم پس خورد، مبنای تحلیل و طراحی سیستم های کنترل می باشد.

• یک سیستم کنترل حلقه بسته، خروجی را اندازه گرفته و این سیگنال را برای مقایسه آن با خروجی مطلوب (مرجع یا فرمان) پس خورد می نماید (شکل۴.۱).

مشخصات پس خورد:

وجود پس خورد باعث ایجاد ویژگی های زیر در سیستم می شود:



شکل ۴.۱: سیستم کنترل با پس خورد

۱. افزایش دقت

۲. کاهش حساسیت نسبت خروجی به ورودی در مقابل تغییرات در پارامترها و سایر مشخصات سیستم

۳. کاهش اثر اختلالات خارجی یا نویز

مدل های سیستم کنترل:

برای نمایش سیستم کنترل باید خصوصیات یا توصیف آرایش آن سیستم و اجزای آن را به شکل قابل تحلیل، طراحی و ارزیابی در آورد.

برای این امر سه روش به کار برده شده است:

۱. مدل ریاضی به فرم معادلات دیفرانسیل، معادلات تفاضلی و یا روابط ریاضی مانند تبدیل لاپلاس و z

۲. نمودارهای بلوکی

۳. نمودار های مسیر جریان

• مدل های ریاضی هنگامی استفاده می شوند که مقادیر کمّی مورد نیازند. مثلا برای ارائه جزئیات رفتار خروجی سیستم پس خورد به یک ورودی داده شده به سیستم به کار برده می شود.

تعریف ۴.۲.۱. معادله مشخصه:

چند جمله ای مشخصه یا معادله مشخصه[۲۰] ماتریس $A_{n\times n}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$p(z) = det[Iz - A] = (z - z_۱)(z - z_۲)\cdots(z - z_n)$$

تعریف ۵.۲.۱. مقدار ویژه:

مقادیر $z_۱, z_۲, \cdots, z_n$ که ریشه های معادله $det[Iz - A] = ۰$ هستند را مقادیر ویژه[۲۱] ماتریس A نامند و مجموعه آنها را طیف[۲۲] A گویند.

تعریف ۶.۲.۱. چندجمله ای مینیمال:

چندجمله ای مینیمال[۲۳] $\Psi(\lambda)$ برای یک ماتریس مانند A یک چندجمله ای است که حداقل درجه را دارد، به طوری که $\Psi(A) = ۰$ باشد.

تعریف ۷.۲.۱. رد ماتریس:

اگر A ماتریسی $n \times n$ با درایه های a_{ij} باشد؛ رد[۲۴] یا اثر ماتریس A به صورت زیر تعریف می شود:

$$tr(A) = a_{۱۱} + a_{۲۲} + \cdots + _{nn} = \sum_{i=۱}^{n} a_{ii}$$

تعریف ۸.۲.۱. ماتریس تکین:

ماتریسی که در هر سطر و هر ستون تنها دارای یک درایه مثبت باشد و بقیه درایه های آن صفر باشند را ماتریس تکین[۲۵] خوانیم [۷, ۱۰].

تعریف ۹.۲.۱. ماتریس تبدیل:

ماتریس تبدیل[۲۶] یک حالت خاص از ماتریس تکین است، که در هر سطر و هر ستون این ماتریس تنها یک درایه یک وجود دارد و بقیه درایه های آن صفر هستند [۷, ۱۰].

[۲۰] characteristic equation
[۲۱] eigen values
[۲۲] spectral
[۲۳] minimal polynomial
[۲۴] trace
[۲۵] monomial matrix
[۲۶] Transition matrix

یک ماتریس تکین حاصلضرب یک ماتریس تبدیل و یک ماتریس قطری نامنفرد[۲۷] است.

تعریف ۱۰.۲.۱. ماتریس مثبت:

ماتریس $A \in R^{n\times n}$ را مثبت نامیم[۲۸] ، اگر حداقل یکی از درایه های آن مثبت باشد و درایه منفی نداشته باشد [۷, ۱۰, ۱۶].

قضیه ۱۱.۲.۱. ماتریس معکوس[۲۹] یک ماتریس مربعی مثبت، مثبت است اگر و تنها اگر یک ماتریس تکین باشد [۱۶].

قضیه ۱۲.۲.۱. اگر r یک مقدار ویژه ماکسیمم ماتریس A باشد؛ آنگاه

$$min_i r_i \leq r \leq max_i r_i$$

و

$$min_j c_j \leq r \leq max_j c_j$$

که $r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ و $c_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ به ترتیب مجموع درایه های i امین سطر و j امین ستون ماتریس A می باشند.

تعریف ۱۳.۲.۱. سیگنال کراندار: یک سیگنال (ورودی،خروجی) $s_i,\ i \in Z_+$ کراندار خوانده می شود اگر و تنها اگر مقدار آن (یا نرم $\|s_i\|$) برای هر $i \in Z_+$ کراندار باشد.

مطالب ارائه شده در فصل پایان نامه به صورت ذیل آورده شده است:

در فصل دوم، پس از تعریف سیستم مثبت درونی و بیرونی، دسترسی پذیری، کنترل پذیری و مشاهده پذیری سیستم های مثبت؛ سیستم های مثبت دوگان و ارتباط میان دسترسی پذیری و مشاهده پذیری را بیان می کنیم؛ در فصل سوم، به تعریف انواع پایداری مانند پایداری مجانبی، پایداری ورودی کراندار- خروجی کراندار،

[۲۷] non singular
[۲۸] positive matrix
[۲۹] inverse matrix

پایداری مجانبی مولفه ای و پایداری نمایی برای سیستم های مثبت اشاره شده، سپس مسئله تخصیص مقدار ویژه با استفاده از ماتریس همدم و در نهایت الگوریتم روش بیان شده است؛ در نهایت، در فصل چهارم؛ روشی جدید جهت تخصیص مقادیر ویژه سیستم های خطی مثبت با استفاده از پارامتری سازی ارائه شده که در این فصل پس از بیان مقدمه، مختصری از چگونگی تبدیل ماتریس ها به فرم استاندارد اشلون و فرم همدم برداری آورده شده است، سپس با استفاده از ویژگی هایی که برای مقادیر ویژه در فصل ۳ شرح داده شد، ماتریس پس خورد حالت پارامتری با مقادیر ویژه دلخواه به گونه ای که سیستم حلقه بسته مثبت باقی بماند را محاسبه می نماییم، و سپس با اعمال محدودیت مثبت بودن بردار ورودی ماتریس پس خورد حالت را محاسبه می نماییم.

فصل ۲
کنترل سیستم های خطی مثبت

۱.۲ مقدمه

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x_{i+۱} = Ax_i + Bu_i \\ y_i = Cx_i + Du_i \end{cases} \quad (۱.۲)$$

که در آن A یک ماتریس $n \times n$ ، B ماتریسی $n \times m$ ، C ، $p \times n$ و D ماتریسی $p \times m$ می باشد و $x_i \in R^n$ بردارهای حالت[۱] و $u_i \in R^m$ بردارهای ورودی[۲] هستند.

تعریف ۱.۱.۲. [۱۰] سیستم (۱.۲) را مثبت خارجی[۳] خوانیم اگر و تنها اگر برای هر دنباله ورودی $u_i \in R^m_+$ ، که $i \in Z_+$ و $x_۰ = ۰$ ، برای بردارهای خروجی داشته باشیم $\forall i \in Z_+, y_i \in R^p_+$.

تعریف ۲.۱.۲. [۷, ۱۰, ۱۹] سیستم(۱.۲) را مثبت داخلی[۴] (یا به اختصار مثبت) خوانیم اگر و تنها اگر برای هر $x_۰ \in R^n_+$ و هر دنباله ورودی $u_i \in R^m_+, i \in Z_+$ داشته باشیم: $x_i \in R^n_+$ و $y_i \in R^p_+$.

در تعاریف فوق R^n_+ مجموعه بردارهای حقیقی n بعدی با مولفه های نامنفی است. در ضمن می توان نشان داد که معادله حالت در سیستم (۱.۲) مثبت است اگر و تنها اگر $A \in R^{n \times n}_+$ و $B \in R^{n \times m}_+$ باشد، که $R^{n \times m}_+$ مجموعه ماتریس های حقیقی $n \times m$ با درایه های نا منفی است.

[۱] state vector
[۲] input vector
[۳] externally positive
[۴] internally positive