بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی، (گرایش آنالیز عددی)

عنوان:

روش پیشگو-اصلاحگر هشت‌گامی متقارن برای حل عددی معادله شرودینگر ومسائل مقدار اولیه با جواب‌های نوسانی

استاد راهنما:

آقای دکترعلی شکری

پژوهشگر:

حسین سعادت

مهر ۱۳۹۳

«فقال: یا ابا عبدالله! لیس العلمُ بالتّعلم، انّما هوَ نورٌ یقعُ في قلب من یریدُ الله تبارك و تعالي اَن یهدیَه فان اَردتَ العلمَ فاطلبُ اوّلا في نفسك حقیقة العبودیه، و اطلب العلمَ باستعماله و استفهِم الله یُفهِمَك»،

«علم و دانش با تحصیل کردن زیاد به دست نمی‌آید، بلکه نوری است که خدا در دلِ آنکه هدایتش را بخواهد(دل پاک)، می‌تاباند. پس هرگاه به دنبال علم رفتی، ابتداء جوهره بندگی را در جان خویش بجوی و با بکار بستن دانش آنرا به دست آور و فهم را از خدا بخواه تا او به تو عنایت کند»

حمد و ستایش خداوند سبحان را، که مرا توفیق عنایت فرمود تا در راه کسب علم و دانش گام بردارم.

و به پاس احترام به حرمت دانش بر خود لازم می‌دانم که از زحمات و راهنمایی‌های استاد گرانقدر و ارجمندم آقای دکتر علی شکری که نظارت این تحقیق را بر عهده داشته و در تمام مراحل از یاری و مساعدت ایشان برخوردار بوده‌ام قدردانی کنم. از آقای دکتر بزم، که زحمت داوری این پایانامه را تقبل فرمودند تشکر می کنم.

از راهنمایی‌ها و کمک‌های علمی پروفسور تئودور سیموز، تنها یاری کننده علمی بنده و مشوقم برای مقاله نویسی، کمال تشکر را دارم و بخاطر ارسال رهنما، جهت مقاله نویسی قدردانی می کنم.

از جناب آقای دکتر رحیمی که کمک حال بنده در مقطع کارشناسی و ارشد بوده سپاسگزاری می کنم.

از آقایان دکتر دارابی، دکتر رحیمی، دکتر شهریاری و دکتر حجتی که زحمت تعلیم بنده در دوره کارشناسی را بعهده داشته‌اند تشکر ویژه‌ای می کنم.

نام خانوادگی: سعادت   نام: حسین

عنوان پایان‌نامه: یک روش پیشگو- اصلاحگر هشت‌گامی متقارن برای حل عددی معادله شرودینگر شعاعی و مسائل مقدار اولیه مربوطه با جواب‌های نوسانی

استاد راهنما:آقای دکتر علی شکری   استاد مشاور: ———

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد

رشته: ریاضی کاربردی   گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: مراغه   دانشکده: علوم پایه

تاریخ فارغ‌التحصیلی: مهر ۱۳۹۳   تعداد صفحه: ۱۱۰

کلید واژه‌ها: معادله شرودینگر، مسائل چرخشی، تاخیر فاز، جواب نوسانی، روش چندگامی متقارن، پیشگو-اصلاحگر

چکیده

در این پایان نامه، هدف ارائه یک روش پیشگو اصلاحگر هشت‌گامی متقارن جدید با تاخیر فاز از مرتبه بینهایت می‌باشد. این روش بر اساس روش چندگامی متقارن کوئینلان-ترمین با هشت‌گام و مرتبه جبری هشت بوده و برای حل عددی معادله شرودینگر مستقل از زمان شعاعی با استفاده از تابع پتانسیل وودس-ساکسن ساخته می‌شود. همچنین از این روش می‌توان برای حل عددی مسائل مقدار اولیه با جواب‌های نوسانی مانند مسائل چرخشی استفاده کرد. روش جدید را با تعدادی از روش‌های بهینه ساخته شده اخیر موجود در نشریات مقایسه کرده ایم. کارایی روش‌ها اندازه گیری شده است و نتیجه گرفتیم که روش جدید با تاخیر فاز از مرتبه بینهایت خیلی بهتر از روش‌های دیگر برای مسائل حل شده است.

فهرست مطالب

مقدمه

از آن جائیکه بعضی

مسائل کاربردی و عملی منجر به حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل می‌شود لذا یکی از مباحث مهم در ریاضیات، حل معادلات دیفرانسیلی است. در ریاضیات محض با دسته بندی معادلات، وقت زیادی صرف تجزیه و تحلیل معادلات دیفرانسیل و یادگیری روش‌های تحلیلی برای بدست آوردن جواب آنها می‌شود. در این تجزیه و تحلیل نشان داده می‌شود که گروه خاصی از معادلات را می‌توان به روش تحلیلی حل نمود.

اما معادلات دیفرانسیل فراوانی وجود دارند که نمی‌توان با روش‌های تحلیلی موجود جواب آنها را به طور دقیق پیدا کرد. حتی اگر هم بتوان به جواب دقیق رسید، گاهی اوقات، بعضی معادلات دیفرانسیل ساده نیز جواب‌های بسیار پیچیده دارند. روش‌های تئوری فقط قابل استفاده در حالتهای خاص می‌باشند. در حالت کلی معادلات دیفرانسیل با مقادیر اولیه را نمی‌توان با روش های تئوری حل نمود، لذا با حل عددی معادلات دیفرانسیل می‌توان جواب طیف وسیعی از مسائل کاربردی را مشخص نمود.

فصل اول

مقدمات و مفاهیم اساسی

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اساسی

در این بخش تعاریف و قضایای مقدماتی و برخی از نمادهایی که در فصل‌های آتی مورد نیاز است را معرفی می‌کنیم. سپس به معرفی روش‌های چندگامی و مسائل مربوط به آن می‌پردازیم. در ادامه قضایای مربوط به آن را بیان خواهیم کرد. معادله شرودینگر را شرح داده و برای درک بهتر معادله دیفرانسیلی، ناحیه پایداری و سازگاری چند مثال عددی در آخر فصل مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۱.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۱. فرم کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی از مرتبه m به صورت

$$f(x, y, y^{'}, ..., y^{(m-1)}, y^{(m)}) = 0, \tag{۱.۱}$$

یا

$$y^{(m)}(x) = f(x, y, y^{'}, ..., y^{(m-1)}), \tag{۲.۱}$$

می باشد. فرم (**؟؟**) را فرم استاندارد معادله دیفرانسیل (**؟؟**) می‌نامند. در این فرم بالاترین مشتق موجود، بر حسب مشتقات مراتب پایین‌تر متغییر مستقل x نشان داده می‌شود. جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه m شامل m ثابت دلخواه مستقل است، برای تعیین این مقادیر ثابت، m شرط در یک نقطه نیاز است که شرایط اولیه نامیده می‌شوند. معادله دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه را مسأله مقدار اولیه[۱] می‌نامند. بنابراین مسأله مقدار اولیه مرتبه mام به صورت

$$y^{(m)}(x) = f(x, y, y^{'}, ..., y^{(m-1)}), \qquad y^{(i)}(x_0) = c_0^i, \qquad i = 0, 1, ..., m-1, \tag{۳.۱}$$

بیان می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. ساختار کلی یک روش چندگامی[۲] به صورت

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}, \qquad f_{n+j} = f(x_{n+j}, y_{n+j}), \tag{۴.۱}$$

یا

$$\alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n+1} + \cdots + \alpha_k y_{n+k} = h\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n+1} + \cdots + \alpha_k y_{n+k}, \tag{۵.۱}$$

است که در آن α_i, β_i ها، به ازای $i = 0, \cdots, k$، مقادیر ثابت بوده و $\alpha_k \neq 0$. اگر $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ باشد آنگاه یک روش $k-1$ گامی حاصل می‌شود، بنابر این فرض می‌کنیم $\alpha_0 \neq 0$ یا $\beta_0 \neq 0$. بدون اینکه خللی به کلیت مساله وارد شود، می‌توان α_k را برابر یک در نظر گرفت.

[۱] Initial value problem
[۲] Multistep method

یک خاصیت اساسی که از روش چندگامی انتظار می‌رود این است که جواب عددی y_n تولید شده توسط روش عددی هنگامی که طول گام h به صفر میل می کند، به جواب تحلیلی $y(x)$ همگرا باشد.

تعریف ۳.۱.۱. یک روش عددی را همگرا گویند هرگاه به ازای هر x_n متعلق به بازه‌ی $[a, b]$ تساوی

$$\lim_{\substack{h \longrightarrow 0 \\ x_n = x_0 + nh}} y_n = y(x_n), \tag{۶.۱}$$

برقرار باشد که در آن y_n جواب‌های معادله تفاضلی (**؟؟**) بوده که در شرایط آغازین صدق می‌کند.

تعریف ۴.۱.۱. یک روش عددی را پایدار گویند هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$، $\delta(\epsilon)$ ای وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $0 \leq h \leq h_0$ اگر $|y(x_0) - \overline{y}(x_0)| < \delta(\epsilon)$ آنگاه نامعادله

$$|y(x_n) - \overline{y}(x_n)| < \epsilon,$$

برقرار باشد.

برای روش چندگامی (**؟؟**) عملگر $L[y(x), x]$ را بصورت

$$L[y(x), x] = \sum_{i=0}^{k} a_i y(x + ih) - h^2 \sum_{i=0}^{k} b_i y'(x + ih)\,, \tag{۷.۱}$$

تعریف می‌کنیم، وقتی $y(x) \in C[a, b]$.

اگر سری تیلور عملگر $L[y(x), x]$ را حول نقطه x بنویسیم به عبارت

$$L[y(x), x] = C_0 y(x) + \sum_{i=1}^{\infty} C_i h^i y^{(i)}(x)\,, \tag{۸.۱}$$

می‌رسیم که در آن C_i ها اعداد ثابتی هستند. در عملگر تفاضلی(**؟؟**) و روش چندگامی خطی مربوطه

(**؟؟**) اگر $C_0 = C_1 = \cdots C_p = 0$ و $C_{p+1} \neq 0$ می‌گوییم روش از مرتبه p است. همچنین جمله‌ای که شامل عبارت C_{p+1} باشد را جمله اصلی خطای برشی روش (**؟؟**) می‌گوییم و همچنین مجموع جملات که شامل عبارات C_i به ازای $i = p+1..\infty$ هستند را خطای تجمعی روش (**؟؟**) می‌گوییم.

تعریف ۵.۱.۱. روش چندگامی (**؟؟**) سازگار گفته می‌شود هرگاه از مرتبه $p \geq 1$ باشد، به عبارت دیگر وقتی $h \longrightarrow 0$، خطای برشی روش (عملگر L) به صفر میل کند [**؟**].

نتیجه ۶.۱.۱. *روشی که همگرا باشد حتماً سازگار است، ولی اگر سازگار باشد همگرائی تضمین نمی‌شود. شرط لازم برای همگرائی، سازگاری است* [**؟**].

اکنون اولین و دومین چند جمله‌ای مشخصه روش چندگامی (**؟؟**) به صورت

$$\rho(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \zeta^j, \qquad \sigma(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j \zeta^j, \tag{۹.۱}$$

تعریف می‌شود. روش چندگامی خطی سازگار است اگر و تنها اگر

$$\rho(1) = 0, \qquad \rho'(1) = \sigma(1), \tag{۱۰.۱}$$

بنابر این در یک روش سازگار، اولین چند جمله ای مشخصه $\rho(\zeta)$ همیشه یک ریشه $+1$ دارد. $\zeta_1 = +1$ را ریشه اصلی و بقیه ریشه‌های ζ_i به ازای $i = 2, 3, \cdots, k$ را ریشه‌های بدلی می‌نامند. ریشه‌های بدلی فقط وقتی ظاهر می‌شوند که تعداد گام‌های روش بزرگتر از یک باشد [**؟**].

تعریف ۷.۱.۱. روش چند گامی خطی صفر پایدار گفته می‌شود هرگاه هیچ ریشه‌ای از اولین چند جمله‌ای

مشخصه‌اش قدر مطلق بزرگتر از یک نباشد و تعداد ریشه‌ها با قدر مطلق یک صفر باشد. به بیان دیگر ریشه‌های $\rho(\zeta)$ داخل یا روی دایره واحد واقع شوند. ریشه‌های ساده معادله روی دایره قرار می‌گیرند.

اکنون قضیه اساسی دال کوئیست برای روش‌های چندگامی بیان می‌شود.

قضیه ۸.۱.۱. *شرط لازم و کافی برای اینکه روش چندگامی خطی (؟؟) همگرا باشد آن است که سازگار و صفر پایدار باشد.*

اثبات. به [؟] رجوع شود. □

چون مفهوم همگرایی شامل مباحث بسیار گسترده در مسائل مقدار اولیه است ولی سازگاری و صفر-پایداری یک مفهوم ساده جبری که به راحتی قابل بررسی هستند لذا با توجه به قضیه اساسی دال کوئیست به جای بررسی همگرایی، سازگاری و صفر-پایداری بررسی می‌شوند. لازم به ذکر است که مفهوم سازگاری، خطای برشی را در هر تکرار کنترل می‌کند، در حالی که صفر پایداری، خطای تجمعی در محاسبات قبلی را کنترل می‌کند. بنابر این صفرپایداری و سازگاری هم زمان خطای کلی که شرط لازم برای همگرایی است، را کنترل می‌نمایند.

قضیه ۹.۱.۱. *اگر k فرد باشد مرتبه یک روش k گامی صفر-پایدار نمی‌تواند از $k+1$ بیشتر باشد در صورتی که اگر k زوج باشد مرتبه روش نمی‌تواند از $k+2$ بیشتر باشد.*

اثبات. به [؟] رجوع شود. □

تعریف ۱۰.۱.۱. یک مسأله مقدار اولیه با یک جواب هموار، پایدار و ثابت لیپ شیتز L بزرگ سخت نامیده می‌شود. سختی یک تعریف ریاضی نیست بلکه یک مفهوم کیفی است و دسته‌ای از مسائل را نشان می‌دهد که برای آن‌ها روش‌های ضمنی می‌تواند خیلی بهتر از روش‌های صریح عمل کند.

تعریف ۱۱.۱.۱. یک روش حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی از مرتبه اول A - پایدار گفته می‌شود، اگر با اعمال روش عددی روی معادله تست $y' = \lambda y$ که منجر به رابطه $y_{n+1} = R(z)y_n$ می‌شود، رابطه $|R(z)| < 1$ را نتیجه بدهد. در اینجا $R(z)$ چندجمله‌ای پایداری روش است. ناحیه پایداری روش A - پایدار شامل سمت چپ ناحیه مختصات است.

۲.۱ ناحیه پایداری

برای پایداری روش عددی (**؟؟**)، این روش را روی معادله آزمون $y' = \lambda y$، $\lambda \in \mathbb{C}$ بکار می‌بریم در این صورت عبارت

$$\sum_{j=0}^{k}(\alpha_j - z\beta_j)y_{n+j} = 0 \qquad n = 0, 1, ...$$

بدست می‌آید که در آن $z = h\lambda$. معادله مشخصه برای روش (**؟؟**) به صورت

$$\pi_z(\xi) = \rho(\xi) - z\sigma(\xi) = \sum_{j=0}^{k}(\alpha_j - z\beta_j)\xi^j$$

بدست می‌آید.

تعریف ۱.۲.۱. (رجوع شود به [**؟**]) ناحیه پایداری $S \subset \mathbb{C}$ برای یک روش چندگامی خطی، مجموعه‌ای

از تمام zها است، به طوری که دنباله y_n به ازای بردارهای آغازین $y_0, ..., y_{k-1}$ کراندار شود.

واضح است که $z \in S$اگر وتنها اگر π_z در شرط ریشه صدق کند. همچنین روش چندگامی صفر پایدار است اگر و تنها اگر $0 \in S$.

مثال ۲.۲.۱. *روش دوگامی صریح $y_{n+2} - y_n = 2hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ را در نظر می‌گیریم. با به‌کارگیری این روش روی معادله آزمون $y' = \lambda y$ عبارت*

$$y_{n+2} = y_n + 2zy_{n+1}, \qquad z = h\lambda.$$

را بدست می‌آوریم. چندجمله‌ای مشخصه $\pi_z(\xi) = \xi^2 - 2z\xi - 1$ دارای دو ریشه $\xi_1 = z + \sqrt{1+z^2}$ و $\xi_2 = z + \sqrt{1-z^2}$ می‌باشد به طوری که ξ_1 ریشه اصلی و ξ_2 ریشه فرعی است. حاصل‌ضرب این ریشه‌ها برابر -1 می‌باشد بنابراین شرط ریشه برقرار است اگر و تنها اگر ξ_1 و ξ_2 روی دایره واحد قرار گیرند و ساده باشند. با در نظر گرفتن $\xi_1 = e^{i\theta}$ و $\xi_2 = e^{-i\theta}$، مقادیر z که منجر به تولید این ریشه‌ها می‌شوند در رابطه

$$z = \frac{(\xi^2 - 1)}{2\xi} = \frac{1}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = i \sin\theta,$$

صدق می‌کنند، بنابراین ناحیه پایداری روش به صورت

$$S = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) = 0, \quad | z |< 1\},$$

می‌باشد.

۳.۱ روش‌های پیشگو-اصلاحگر

فرض کنید که برای حل مساله مقدار اولیه، از یک روش چندگامی خطی ضمنی استفاده شود. در هر گام برای تعیین y_{n+k} باید معادله

$$y_{n+k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} = h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}) + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j}, \qquad (۱۱.۱)$$

را حل نمود که در آن f_{n+j} و y_{n+j} به ازای $j = 0, 1, \cdots, k-1$ معلوم هستند. در حالت کلی این معادله غیر خطی است. در صورتیکه شرط

$$h < 1/L|\beta_k|, \qquad (۱۲.۱)$$

برقرار باشد آنگاه y_{n+k} دارای جواب منحصر بفردی بوده و تکرارهای

$$y_{n+k}^{[i+1]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} = h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[i]}) + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j}, \qquad (۱۳.۱)$$

به y_{n+k} همگرا می‌شوند، که در آن $y_{n+k}^{[i]}$ تقریب دلخواه اولیه دلخواه است.

هر تکرار از (**؟؟**) شامل یک محاسبه از $f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[i]})$ است. واضح است هر اندازه تقریب اولیه $y_{n+k}^{[0]}$ دقیق باشد آنگاه تعداد تکرارهای لازم برای بدست آوردن مقدار قابل قبول برای y_{n+k} کمتر می‌شود. لذا هدف این است که حدس اولیه $y_{n+k}^{[0]}$ به طور دقیق ساخته شود. برای این کار با استفاده از یک روش صریح به طور جداگانه y_{n+k} تخمین زده شده و این مقدار محاسبه شده بعنوان حدس اولیه $y_{n+k}^{[0]}$ در نظر گرفته می‌شود.

در عمل برای حل مسائل مقدار اولیه، یک روش چندگامی ضمنی به تنهایی به کار برده نمی‌شود، بلکه از آن برای بهتر نمودن تقریب‌های حاصل از روش‌های چندگامی صریح استفاده می‌شود. این روند را که ترکیبی از روش صریح و ضمنی است، روش پیشگو-اصلاحگر می‌نامیم. روش صریح پیشگو و روش ضمنی اصلاحگر نامیده می‌شود.

حال فرایند بالا را می‌توان به یکی از دو روش زیر انجام داد. در روش اول تکرار (**??**) تا جایی ادامه داده می‌شود که در شرط $|y_{n+k}^{[i+1]} - y_{n+k}^{[i]}| < \epsilon$ برآورد شود که در آن ϵ یک مقدار کوچک از قبل تعیین شده، است. در این حالت مقدار $y_{n+k}^{[i+1]}$ به عنوان یک تقریب قابل قبولی برای جواب دقیق y_{n+k} در نظر گرفته می‌شود. در این روش پیشاپیش نمی‌توان گفت که چه تعداد تکرار نیاز است. یعنی میزان محاسبات برای y_{n+k} مشخص نیست. از طرف دیگر مقدار پذیرفته شده برای $y_{n+k}^{[i+1]}$ مستقل از حدس اولیه $y_{n+k}^{[i+1]}$ است، به طوری که خطای برشی و پایداری ضعیف روش پیشگو-اصلاحگر تنها وابسته به روش اصلاحگر بوده و خواص پیشگو در تعیین آنها تاثیر گذار نخواهد بود. بخصوص طول گام h باید طوری انتخاب شود که $\overline{h}$ درون بازه پایداری مطلق یا نسبی روش اصلاحگر قرار گیرد، بنابراین هیچ مشکلی در محاسبات ایجاد نمی‌شود اگر $\overline{h}$ درون بازه پایداری مطلق یا نسبی روش پیشگو قرار نگیرد (حتی روش پیشگو می‌تواند صفر پایدار هم باشد).

در روش دوم هدف این است که میزان محاسبات برای تعیین y_{n+k} محدود باشد، برای این کار تعداد

تکرار روش اصلاحگر که در هر گام برای تعیین y_{n+k} بکار برده می‌شود، m در نظر گرفته می‌شود. در این حالت خطای برشی موضعی و مشخصه‌های پایداری ضعیف کل روش، تنها وابسته به روش اصلاحگر نیست، بلکه به هر دو روش یعنی پیشگو و اصلاحگر وابسته است. Pرا اندیسی برای روش پیشگو و C را اندیسی برای روش اصلاحگر و E را نمادی برای ارزیابی تابع f بر حسب مقادیر معلوم از مولفه‌هایش در نظر می‌گیریم. اگر با یک روش پیشگو $y_{n+k}^{[0]}$ محاسبه و مقدار $y_{n+k}^{[0]}$ تعیین شود، سپس با به کار بردن یک روش اصلاحگر $y_{n+k}^{[1]}$ محاسبه شود، در این صورت این مراحل با PEC نشان داده می‌شود.

۱.۳.۱ خطای برشی موضعی روش‌های پیشگو-اصلاحگر

فرض کنید عملگرهای خطی L^* و L، مرتبه‌های p^* و p، ثابت‌های خطای C^*_{p+1} و C_{p+1} به ترتیب مرتبط با روش‌های پیشگو و اصلاحگر، باشند. خطای برشی موضعی روش پیشگو-اصلاحگر در نقطه x_{n+k} در هر دو حالت $P(EC)^m E$ و $P(EC)^m$ با فرض برش موضعی تعیین می‌شود. همچنین فرض بر این است که جواب تحلیلی $y(x)$ از مساله مقدار اولیه به اندازه کافی مشتق پذیر است. لذا روابط

$$L^*[y(x);h] = C^*_{p+1}h^{p^*+1}y^{p^*+1}(x) + O(h^{p^*+2}),$$

$$L[y(x);h] = C_{p+1}h^{p+1}y^{p+1}(x) + O(h^{p+2}), \qquad (۱۴.۱)$$

برقرار هستند. با فرض $p^* = p - 2$ جمله خطا برای روش پیشگو-اصلاحگر برابر

$$L[y(x);h]_{PC} = ((C^*_{p+1})^2 + C_{p+1})h^{p+1}y^{p+1}(x) + O(h^{p+2}), \qquad (۱۵.۱)$$

این رابطه نشان می‌دهد که برای $m = 2$ خطای برشی موضعی در روش پیشگو- اصلاحگر با روش اصلاحگر هم مرتبه است، اما هم ارز نیست.

۴.۱ تاخیر فاز برای روش‌های متقارن

از آنجا که معادلات به شکل $y'' = f(x,y)$ که $y'(x_0) = y'_0$ در زمینه‌های مختلفی کاربرد دارند لذا حل عددی این نوع معادلات در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری قرار گرفته است. مفهوم تأخیر فاز برای روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل به شکل بالا اولین بار توسط بروسو و نیگرو [؟] معرفی شد. مناسب‌ترین روش حل این معادلات روش نومروف می‌باشد که تأخیر فازی از مرتبه‌ی ۴ دارد.

وقتی یک روش $2k-$گامی متقارن روی مسأله آزمون

$$y'' = -\omega^2 \, y, \qquad \omega \in \mathbb{R},$$

به کار برده می‌شود یک معادله‌ی تفاضلی به‌صورت

$$A_k(\nu)\, y_{n+k} + \cdots + A_1(\nu)\, y_{n+1} + A_0(\nu)\, y_n + A_1(\nu)\, y_{n-1} + \cdots + A_k(\nu)\, y_{n-k} = 0\,, \qquad (۱۶.۱)$$

بدست می‌آید که $\nu = \omega\, h$ و $A_0(\nu)$، $A_1(\nu)$،...،$A_k(\nu)$ چندجمله‌ای‌هایی از ν می‌باشند، که

$$A_i(\nu) = a_i + b_i\, \nu^2, \quad i = 0(1)k.$$

معادله‌ی مشخصه‌ی متناظر با (۱۴.۱) به‌صورت

$$A_k(\nu)\, s^k + \cdots + A_1(\nu)\, s + A_0(\nu) + A_1(\nu)\, s^{-1} + \cdots + A_k(\nu)\, s^{-k} = 0, \qquad (۱۷.۱)$$