بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين الرحمن الرحيم مالك يوم الدين إياك نعبد وإياك نستعين اهدنا الصراط المستقيم صراط الذين أنعمت عليهم غير المغضوب عليهم ولا الضالين

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (کاربردی)

روش اویلر با کنترل طول گام برای معادلات دیفرانسیل تصادفی

توسط

یلدا شمسی

استاد راهنما

دکتر سید محمد حسینی

تیر ۱۳۸۷

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

تاییدیه اعضای هیات داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیئت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه خانم **یلدا شمسی** رشته **ریاضی (کاربردی)** تحت عنوان: «**روش اویلر با کنترل طول گام برای معادلات دیفرانسیل تصادفی**» از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آنرا برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تائید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمحمد حسینی	استاد	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۳- استاد ناظر خارجی	دکتر اسماعیل بابلیان	استاد	
٤- استاد ناظر خارجی	دکتر شیوا زمانی	استادیار	
۵- نمایندہ شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	

بسمه‌تعالی

آیین‌نامهٔ چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس، مبیّن بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادّهٔ ۱ در صورت اقدام به چاپ پایان‌نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اطلاع دهد.

مادّهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد/رسالهٔ دکتری نگارنده در رشتهٔ ریاضی (کاربردی) است که در سال ۱۳۸۷ در دانشکدهٔ علوم پایه دانشگاه تربیت مدرّس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر سید محمد حسینی، مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر ـــــ و مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر ـــــ از آن دفاع شده است.»

مادّهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادّهٔ ۴ در صورت عدم رعایت مادّهٔ ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرّس، تأدیه کند.

مادّهٔ ۵ دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادّهٔ ۴ را از محلّ توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادّهٔ ۶ اینجانب یلدا شمسی دانشجوی رشته ریاضی (کاربردی) مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام‌خانوادگی: یلدا شمسی

تاریخ و امضا:

۸۷/۱۰/۲۰

دستورالعمل حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیات علمی، دانشجویان، دانش آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی که با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد ذیل را رعایت نمایند:

ماده ۱- حقوق مادی و معنوی پایان نامه‌ها / رساله‌های مصوب دانشگاه متعلق به دانشگاه است و هرگونه بهره‌برداری از آن باید با ذکر نام دانشگاه و رعایت آیین‌نامه‌ها و دستورالعمل‌های مصوب دانشگاه باشد.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و استاد راهنما مسئول مکاتبات مقاله باشند.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب حاصل از نتایج پایان نامه / رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی دانشگاه باید با مجوز کتبی صادره از طریق حوزه پژوهشی دانشگاه و بر اساس آئین نامه های مصوب انجام می‌شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق حوزه پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این دستورالعمل در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۱۳۸۴/۴/۲۵ در شورای پژوهشی دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب لازم الاجرا است و هرگونه تخلف از مفاد این دستورالعمل، از طریق مراجع قانونی قابل پیگیری خواهد بود.

اگر شایسته تقدیم باشد

به پدر و مادر عزیزم

به همسر مهربانم

به خواهر و دختر دلبندم

قدردانی

در اینجا بر خود لازم می‌دانم که از خانواده عزیزم بویژه پدر و مادر، که همواره با گذشت و فداکاری مرا یاری و تشویق نمودند، سپاسگزاری کنم. امیدوارم بتوانم گوشه‌ای از زحمات ایشان را جبران کنم.

از همسرم به خاطر یاری صمیمانه، تشکر می‌نمایم.

از استاد راهنمای ارجمند جناب آقای دکتر حسینی که با صبر و حوصله بسیار مرا در تدوین این پایان‌نامه راهنمایی نمودند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

همچنین از اساتید بزگوار جناب آقای دکتر بابلیان و دکتر حیدری و سرکار خانم دکتر زمانی، که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند، متشکرم.

از جناب آقای دکتر باستانی، که در دوران تحصیلشان در مقطع دکتری، از راهنمایی ایشان بهره‌مند گشتم، تشکر می‌نمایم.

چکیده

در این پایان نامه در ابتدا به دو قضیه مهم در مورد روش اویلر مارُیاما، اشاره می‌شود. به دلیل کاربرد ویژه و اهمیت خاص این قضایا در پیاده‌سازی روش اویلر برای معادلات نویز جمعی، اثبات کامل آنها بیان می‌شود. سپس روش اویلر با گام ثابت و متغیر، برای تعدادی معادله دیفرانسیل تصادفی، از نوع نویز جمعی که جواب تحلیلی آنها در دسترس نمی‌باشند و تعدادی معادله دیفرانسیل تصادفی، از نوع نویز ضربی که دارای جواب تحلیلی می‌باشند، پیاده‌سازی می‌شود و نتایج عددی مورد بحث قرار می‌گیرد. در معادلات نویز جمعی با محاسبه خطای سرتاسری در نرم L_2 ، و در معادلات نویز ضربی با محاسبه میانگین خطای سرتاسری در انتهای بازه، صحت محاسبات بررسی می‌شود. سپس روش اویلر ضمنی، با گام ثابت و متغیر، با هدف کاهش تعداد گام و حل معادلات دیفرانسیل تصادفی توسط روشی مشابه ولی با پایداری مطمئن تر، پیاده‌سازی می‌شود و نتایج بهتری حاصل می‌گردد. روش اویلر و اویلر ضمنی برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی دارای مرتبه ۰/۵ می‌باشند ولی به دلیل کم بودن هزینه محاسباتی این روشها، علی‌رغم پایین بودن مرتبه، در بسیاری از مسائل مورد استفاده قرار می‌گیرند و گاهی اوقات به روشهای مرتبه بالاتر ترجیح داده می‌شوند. در نهایت با تعمیم دستور تطبیقی به حالت دو بعدی، روش اویلر با گام ثابت و متغیر، برای تعدادی دستگاه معادلات دیفرانسیل تصادفی پیاده‌سازی می‌شود و نتایج عددی بیان می گردد. این روش پیشنهادی برای بعضی از مسائل، کارا و مفید می‌باشد.

کلمات کلیدی : معادلات دیفرانسیل تصادفی، روش تطبیقی، اویلر مارُیاما، اویلر ضمنی، نویز جمعی، نویز ضربی.

فهرست مندرجات

مقدمه

در سالهای اخیر کاربرد معادلات دیفرانسیل تصادفی در علوم گوناگون، بسیار چشمگیر است. زیرا پدیده‌هایی در طبیعت یافت می‌شوند که دارای مقادیری نامشخص و متغیر هستند و معادلات دیفرانسیل تصادفی در مدل سازی این پدیده‌ها بسیار مؤثرند. با توجه به اینکه حل تحلیلی تمام معادلات امکان پذیر نمی‌باشد، غالباً به حل عددی معادلات دیفرانسیل تصادفی می‌پردازند و در میان روشهای عددی برای حل معادلات دیفرانسیل، روشهای تطبیقی از اهمیت خاصی برخوردارند. تفاوت عمده معادله دیفرانسیل تصادفی و معادله دیفرانسیل تعینی، وجود فرآیند وینر یا همان حرکت براونی است و به همین دلیل درپیاده سازی روشهای عددی، برای معادلات دیفرانسیل تصادفی دچار محدودیتهایی هستیم، که درحل عددی معادلات دیفرانسیل تعینی مطرح نمی‌شوند.

هدف اصلی در این پایان نامه بررسی کامل مرجع [۴] می‌باشد.

در فصل اول به بیان مفاهیم مقدماتی و ضروری می‌پردازیم.

در فصل دوم پس از معرفی روش اویلر مارُیاما، قضایای مذکور در مرجع [۴] بیان و اثبات می‌شود. این قضایا برای اولین بار در این مرجع بیان شده و در پیاده‌سازی روش اویلر مارُیاما برای معادلات نویز جمعی، از اهمیت و کاربرد ویژه‌ای برخوردار است. به همین دلیل به اثبات مختصر این قضایا، در مرجع [۴] اکتفا نکرده و آنها را با جزئیات کامل اثبات می‌کنیم.

درابتدای فصل سوم نحوه پیاده سازی روش اویلر مارُیاما برای معادلات دیفرانسیل تصادفی بیان شده است. سپس جهت نوآوری، روش اویلر ضمنی را برای معادلات دیفرانسیل تصادفی

پیاده‌سازی می‌نماییم. در نهایت، با تعمیم دستور تطبیقی مرجع [۴] ، روش اویلرماروُیاما را برای دستگاه معادلات دیفرانسیل تصادفی پیاده‌سازی می‌کنیم.

در فصل چهارم نتایج عددی بیان و مقایسه می‌شود.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ فرآیند تصادفی

تعریف ۱.۱.۱ آزمایشی که برآمد آن را از قبل نمی‌توان تعیین کرد، آزمایش تصادفی نام دارد.

تعریف ۲.۱.۱ مجموعهٔ تمام برآمدهای ممکن یک آزمایش، فضای نمونه‌ای آن آزمایش نام دارد و با S نمایش داده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱ متغیر تصادفی $X(t)$ ، تابعی است که به هر برآمد S ، یک مقدار حقیقی را نسبت می‌دهد.

تعریف ۴.۱.۱ فرآیند تصادفی یا تابع تصادفی، مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی است که با مجموعهٔ T اندیس‌گذاری می‌شوند و آن را به صورت $X = \{X(t), t \in T\}$ نمایش می‌دهیم.

غالباً T را به زمان تعبیر می‌کنند. اگر T شمارا باشد، فرآیند تصادفی را زمان گسسته و اگر T پیوسته باشد، آن را زمان پیوسته گویند.

تعریف ۵.۱.۱ هر تحققی از X را، یک مسیر نمونه‌ای گویند.

تعریف ۶.۱.۱ به مقدار میانگین هر متغیر تصادفی، امید ریاضی آن متغیر گفته می‌شود که آن را با $E[x]$ نمایش می‌دهند.

۲.۱ اندازهٔ گاوسی

تعریف ۱.۲.۱ فرآیند تصادفی که در آن متغیرها دارای توزیع نرمال چند متغیره باشند، فرآیند گاوسی نامیده می‌شود. یعنی هر متغیر دارای میانگین و واریانس جداگانه است.

اندازه گاوسی بدین صورت بیان می‌شود:[۱]

$$\mu(A)=\frac{\int\limits_A e^{(-\frac{۱}{۲}<M^{-۱}(x-m),(x-m)>)}dx}{(۲\pi\det(M))^{\frac{k}{۲}}}$$

که در آن، A یک مجموعه برل از R^k است، M یک ماتریس $k\times k$ ، متقارن و معین مثبت است که عملگر همبستگی اندازه نام دارد و در آن $M_{ij}=cov(x_i,x_j)$.

$x=(x_۱,...,x_k)$ و $m=(m_۱,...,m_k)$ عنصر میانگین اندازه نام دارد و در آن m_i میانگین x_i می‌باشد.

و برای $x,y\in R^k$ داریم:

$$<x,y>=\sum_{i=۱}^{k}x_iy_i$$

اگر $k=۱$ ، خواهیم داشت :

$$\mu(A)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi\nu}}\int\limits_A e^{-\frac{(x-m)^۲}{۲\nu}}dx$$

---

[۱] در صورت نیاز به مطالعهٔ بیشتر به مراجع [۱۴] و [۱۲] مراجعه نمایید.

که در آن منظور از m و ν به ترتیب، میانگین و انحراف معیار است.

یکی از حالتهای خاص اندازهٔ گاوسی، با $k = ۱$ ، $m = ۰$ ، $\nu = ۱$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mu(A) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_A e^{-\frac{۱}{۲}x^۲} dx$$

۱.۲.۱ اندازهٔ وینر

اندازهٔ وینر، حالت خاصی از اندازهٔ گاوسی است و بدین صورت تعریف می‌شود:

$$W(B) = \prod_{j=۱}^{n} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi(t_j - t_{j-۱})}} \int\int_B ... \int e^{\left(\sum_{j=۱}^{n} \frac{-(u_j - u_{j-۱})^۲}{۲(t_j - t_{j-۱})}\right)} du_۱...du_n$$

که در آن، B یک زیرمجموعه برل از R^n است، $۰ = t_۰ < t_۱ < ... < t_n = ۱$ و $n \geq ۱$.

۳.۱ یافتن تقریب برای جواب

فرض کنید :

۱ — $F_۱$ فضای خطی روی R و X فضای خطی نرمدار و T عملگری خطی از $F_۱$ به X است.

۲ — F زیر مجموعه‌ای ناتهی و محدب از $F_۱$ می‌باشد که توسط T تولید شده است. یعنی $F = \{f \in F_۱ : ||T(f)|| \leq ۱\}$.

۳ — S عملگر خطی از $F_۱$ به فضای خطی نرمدار G ، جواب مسئله است.

۴ — Λ (مجموعه عملگرهای مجاز مسئله)، زیر مجموعه‌ای از توابع خطی L است که $L : F_۱ \to R$.

تعریف ۱.۳.۱ اگر مسئله‌ای دارای شرایط و مفروضات فوق باشد، مسئله خطی نامیده می‌شود.

به طور مثال ، مسئله زیر یک مسئله خطی است.

$$\begin{cases} z'(x) = f(x, z(x)) \\ z(x) = a \\ x \in [\circ, \text{١}] \end{cases}$$

$$F_\text{١} = \{f : R \to R | f(x) = \circ, \forall x \notin D\}$$

که در آن، f تابعی پیوسته و D زیرمجموعه‌ای باز، محدب و کراندار از R است. Λ شامل مقادیر تابع f و مشتقات تابع f در نقاط مختلف است. $S(f) = z$ جواب مسئله و $G = C[\circ, \text{١}]$ می‌باشد.

در حل معادلات دیفرانسیل اگر قادر به محاسبهٔ تابع به روشهای تحلیلی نباشیم، برای یافتن جواب تقریبی در نقطه‌ای معین، از روشهای عددی استفاده می‌کنیم. هدف ما یافتن y است و منظور از $y = N(f)$ جواب تابع X در انتهای بازه می‌باشد و f عضوی از F است.

$$N(f) = [L_\text{١}(f), L_\text{٢}(f, y_\text{١}), ..., L_{n+\text{١}}(f, y_\text{١}, ..., y_n)]$$

که در آن :

$$y_k = Q(\Psi_k(X(\circ), y_\text{١}, ...y_{k-\text{١}}))$$

$X(\circ)$ مقدار تابع X در ابتدای بازه و Q ، فرمول خطی مربوط به روش عددی است (مانند دستور روش اویلر). y_k مقدار تقریبی تابع در نقطهٔ k ام افراز است، که توسط اطلاعات مربوط به جواب در نقاط قبلی افراز، محاسبه شده است. نکتهٔ حائز اهمیت، انتخاب Q مناسب است، که منجر به تقریبی مناسب خواهد شد.

۴.۱ پیچیدگی

تعریف ۱.۴.۱ یافتن تقریب مناسب برای جواب مسئله با کمترین هزینه، پیچیدگی نام دارد.

پیچیدگی دارای حالتهای مختلف است :

۱ — بدترین حالت : $e(U) = \sup |S(f) - U(f)|$

۲ — حالت میانگین : $e(U) = \sqrt{E[||S(f) - U(f)||_2^2]}$

۳ — حالت احتمالی : $e(U) = \inf\{ \sup_{f \in F-A} |S(f) - U(f)|\}$

A قابل اغماض است (مجموعه‌ای با اندازهٔ کوچک است). S مقدار تقریبی، U مقدار واقعی و e خطای روش عددی است.[۲]

۵.۱ بهینگی روش

تعریف ۱.۵.۱ اگر خطای روش در حالت میانگین، دقیقاً با کمترین میزان خطای تمام روشهای عددی در حالت میانگین برابر باشد، می گوییم روش به طور میانگین بهینه است.

تعریف ۲.۵.۱ اگر خطای روش در حالت میانگین، تقریباً با کمترین میزان خطای تمام روشهای عددی در حالت میانگین برابر باشد، می گوییم روش مجانباً بهینه است.

۶.۱ انتگرال ایتو

معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{dX}{dt} = a(t, X(t)) + \sigma(t, X(t))noise$$

منظور از $noise$ (نویز)، نوفه یا اختلال است. باید در معادله فوق تعبیر ریاضی مناسبی برای جمله نوفه بیابیم. راه حل معقول و منطقی این است که، فرآیند تصادفی $W(t)$ را جایگزین جمله نوفه

[۲] در صورت نیاز به مطالعهٔ بیشتر در مورد بخش (۳.۱) و (۴.۱) به مرجع [۱۴] مراجعه نمایید.

کنیم. بنابراین داریم:

$$\frac{dX}{dt} = a(t, X(t)) + \sigma(t, X(t))W(t)$$

اکنون برای حل معادله فوق ، به گسسته سازی آن می‌پردازیم.

فرض می کنیم $t \in [0, T]$ و افراز زیر را در نظرمی گیریم :

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = T$$

صورت گسسته معادله فوق بدین صورت است:

$$X_{k+1} - X_k = a(t_k, X_k)\Delta t_k + \sigma(t_k, X_k)W_k\Delta t_k$$

که در آن

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k, \qquad W_k = W(t_k), \qquad X_k = X(t_k)$$

به ازای یک فرآیند تصادفی مناسب $V(t)$ می توان قرار داد:

$$W_k\Delta t_k = V_{k+1} - V_k$$

مناسب ترین فرآیند برای جایگزین کردن با $V(t)$ ، که دارای مسیرهای پیوسته باشد، حرکت براونی $B(t)$ است. بنابراین داریم:

$$X_n = X_0 + \sum_{j=0}^{n-1} a(t_j, X_j)\Delta t_j + \sum_{j=0}^{n-1} \sigma(t_j, X_j)\Delta B_j$$

اگر $\Delta t_j \to 0$ و حد سمت راست موجود باشد ، داریم:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dB(t)$$

مشکل ما، محاسبه $\int_0^t \sigma(s, X(s))dB(t)$ است ، که با گسسته سازی آن را محاسبه می‌کنیم.

فرض کنید $B_t(w)$ حرکت براونی یک بعدی است و f تابعی با مقدار حقیقی است.

مقدار $\int_0^T f(t,w)dB_t(w)$ را با $\sum_j f(t_j^*,w)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})(w)$ تقریب می‌زنیم که در آن $t_j^* \in \left[t_j, t_{j+1}\right]$.

در اینجا بر خلاف انتگرال ریمن اشتیلیس انتخاب t_j^* متفاوت به مقادیر مختلف برای انتگرال منتهی می‌شود. دو انتخاب زیر از همه مفیدتر و مرسوم‌تر است.

۱) $t_j^* = t_j$ ، که منجر به انتگرال ایتو می‌شود و با $\int_0^T f(t,w)dB_t(w)$ نمایش داده می‌شود.

۲) $t_j^* = \frac{t_j+t_{j+1}}{2}$ ، که منجر به انتگرال استراتونویچ می‌شود و آن را با $\int_0^T f(t,w) \circ dB_t(w)$ نمایش می‌دهند.[۳]

۷.۱ معادلات دیفرانسیل تصادفی

گاهی اوقات در مدل سازی پدیده‌ها، با دخالت عوامل تصادفی و مقادیری که مقدار ثابت و مشخصی ندارند، برخورد می‌کنیم. در این مواقع ، به اهمیت و لزوم معادلات دیفرانسیل تصادفی پی می‌بریم.

در واقع معادلات دیفرانسیل تصادفی الگوی ریاضی برای تحول زمانی پدیده‌هایی هستند، که دارای اختلال تصادفی می‌باشند. این نوع معادلات در مواردی چون الگوسازی قیمت های سهام، نوفهٔ حرارتی در مدارهای الکتریکی، برخی حالتهای حدی در سیستمهای صف و اختلالات تصادفی در سیستمهای فیزیکی، زیست شناختی، اقتصاد و مدیریت دارای کاربردهای فراوان هستند.

شکل کلی یک معادله دیفرانسیل تصادفی بدین صورت است:

$$dX(t) = a(t,X(t))dt + \sigma(t,X(t))dW(t) \qquad (1.7.1)$$

[۳] در صورت نیاز به مطالعهٔ بیشتر در مورد بخش (۶.۱) به مرجع[۱۹] مراجعه نمایید.