دانشکده علوم ریاضی
پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی
گرایش آنالیز عددی

عنوان:

روش‌های خطی عمومی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی

استاد راهنما:

دکتر علیرضا سهیلی

استاد مشاور:

دکتر فائزه توتونیان

نگارش:

وحید زارعی

اسفند ۱۳۹۱

چکیده

از جمله روش‌های متداول برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی، روشهای رانگ-کوتا و چندگامی خطی است. روش‌های خطی عمومی بعنوان تعمیمی از این دو روش برای بدست آوردن روابط مشترک بین این روش‌ها می‌باشند. برای بدست آوردن روش‌های خطی عمومی که بیشتر در مسائل خاص کاربرد دارند، نیاز است تا محدودیت‌هایی روی این روش‌ها اعمال شود. روش‌های انتگرال گیری چندمرحله ای ضمنی قطری بعنوان رده ای از روش‌های خطی عمومی معرفی می شوند. گرچه این رده از روش‌ها ممکن است بسیار محدود باشد، اما منجر به روش‌های خطی عمومی با خاصیت پایداری رانگ-کوتای ذاتی می‌شود که عملکرد قابل توجهی دارند. در حقیقت این روش‌ها از مرتبه مرحله بالاتری هستند و همچنین ساختار ضمنی قطری آنها باعث مزیت این روش‌ها نسبت به روش‌های قدیمی است. یکی از راه‌های ساخت روش‌هایی از مراتب بالاتر و با ناحیه پایداری بزرگتر، استفاده از مشتقات مراتب بالاتر در محاسبه جواب تقریبی با یک روش است. بدین منظور روش‌های خطی عمومی با مشتق دوم با اضافه کردن مشتق دوم به روش خطی عمومی بدست می‌آید.

هدف اصلی این پایان نامه بررسی خواص اساسی روش‌های خطی عمومی و روش خطی عمومی با مشتق دوم، از جمله مرتبه، همگرایی و شرایط پایداری این روش‌ها برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و همچنین ساخت روش‌هایی مناسب برای حل مسائل خاص است.

کلمات کلیدی:

مسائل مقدار اولیه - معادلات دیفرانسیل معمولی - روشهای خطی عمومی - مسائل سخت

فهرست مطالب

لیست تصاویر

لیست جداول

پیش‌گفتار

بسیاری از مسائل کاربردی در مهندسی، علوم، پزشکی، اقتصاد و علوم اجتماعی به‌صورت ریاضی مدل‌سازی می‌شوند که اکثر مواقع در قالب یک معادله دیفرانسیل ظاهر می‌شوند. از آنجایی که به‌دست آوردن جواب تحلیلی یک معادله دیفرانسیل معمولی اغلب کاری سخت و در برخی موارد نیز غیرممکن است، بنابراین روش‌های عددی می‌توانند با تقریب جواب معادله دیفرانسیل، به‌عنوان ابزار اساسی به‌کار گرفته شوند. از این‌رو حل عددی معادلات دیفرانسیل یکی از مهمترین مباحث مورد علاقه محققین بوده است.

در این پایان‌نامه روش‌های عددی برای حل معادله دیفرانسیل معمولی مورد بررسی قرار می‌گیرد. از زمان معرفی اولین روش عددی برای این مسائل توسط اویلر زمان زیادی می‌گذرد و تا امروز نیز روش‌های زیادی برای حل این مسائل معرفی شده اند. با این وجود هنوز هم امروزه روش‌های جدیدتری برای این مسائل معرفی می‌شوند. جان بوچر[۱] در سال ۱۹۶۶ با معرفی روش‌های خطی عمومی گام مهمی در حل معادلات دیفرانسیل معمولی برداشت. پس از آن رایت[۲] [۱۲]، بوچر [۶–۹] و جکوایز[۳] [۱۱] با گرفتن شرایط ویژه روی این روش‌ها، رده‌های مختلفی از این روش‌ها را برای مسائل خاص معادلات دیفرانسیل معمولی ساختند. بوچر و حجتی[۴] [۱۰] با معرفی تعمیمی ازروش‌های خطی عمومی، روش‌هایی با کارایی و دقت بهتر نسبت به روش‌های قبل برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی و بخصوص رده خاصی از این مسائل به نام مسائل سخت، ارائه نمودند.

در این پایان نامه ضمن معرفی و بررسی خواص اساسی روش‌های خطی عمومی و همچنین روش‌های خطی عمومی تعمیم یافته، روند ساخت روش‌های با پایداری بهتر برای حل مسائل خاص، که با در نظر گرفتن شرایط ویژه روی روش‌های خطی عمومی حاصل می‌شود، را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل اول پس از معرفی مسائل مقدار اولیه و مسائل سخت، تاریخچه مختصری از روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی بیان می‌کنیم. در فصل دوم ابتدا روش ساده اویلر را بیان کرده و سپس با یادآوری روش‌های رانگ-کوتا و چندگامی خطی، به بررسی خواص این روش‌ها به‌عنوان تعمیم‌هایی از روش اویلر می‌پردازیم. همچنین شرایط مرتبه روش رانگ-کوتا با استفاده از درختان ریشه دار بیان می‌شوند. در فصل سوم با معرفی روش‌های خطی عمومی به‌عنوان تعمیمی از روش‌های رانگ-کوتا و چندگامی خطی، خواص اساسی آنها نیز شرح داده می‌شوند. برای این روش‌ها نیز شرایط مرتبه را با استفاده از درختان ریشه دار بررسی می‌کنیم. در فصل چهارم انواع مفید و کاربردی تر روش‌های خطی عمومی مانند روش‌های انتگرال گیری چندمرحله ای ضمنی قطری و روش‌های با پایداری رانگ-کوتای ذاتی با تحمیل شرایط خاص بر روی این روش‌ها به‌دست می‌آیند. در فصل آخر نیز روش‌های خطی عمومی با مشتق دوم به‌عنوان تعمیمی از روش‌های خطی عمومی معرفی شده و خواص اساسی آن نیز بررسی می‌شود. در نهایت نیز نتیجه‌گیری نموده و پیشنهاداتی برای کارهای بیشتر ارائه می‌دهیم.

---

[۱] J.C.Butcher
[۲] W.M.Wright
[۳] Z. Jackiewicz
[۴] G. Hojjati

فصل ۱

معادلات دیفرانسیل معمولی

۱.۱ مقدمه

شکل کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی به‌صورت زیر است:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_\circ) = y_\circ. \tag{۱.۱}$$

که در آن x متغیر مستقل و در اغلب مسائل فیزیکی نشان دهنده زمان است و f تابعی به‌صورت $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ است و متغیر وابسته y جواب مسأله می‌باشد. رابطه $y'(x) = f(x, y(x))$ به این معنی است که تابعی از x که با جایگزینی y به‌وسیله $y(x)$ در $f(x, y(x))$ حاصل می‌شود، برابر مشتق $y(x)$ است. تعبیر هندسی آن در حالت $N = ۱$ چنین است که ضریب زاویه خط مماس بر $y(x)$ در نقطهٔ (x, y) روی نمودار $y(x)$ را می‌توان از $f(x, y)$ پیدا کرد.

معادله (۱.۱) که در آن f تابعی از x و y است، قالب ناخودگردان[1] معادله دیفرانسیل معمولی نامیده می‌شود. قالب خودگردان[2] معادله دیفرانسیل معمولی به‌صورت زیر است:

$$y'(x) = f(y(x)) \tag{۲.۱}$$

به جهت سادگی در اکثر روش‌های عددی از قالب خودگردان (۲.۱) استفاده می‌شود. یک معادله دیفرانسیل به شکل ناخودگردان (۱.۱) را می‌توان به راحتی به قالب خودگردان (۲.۱) تبدیل کرد. دستگاه معادلات دیفرانسیل به شکل ناخودگردان (۱.۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$y_i'(x) = f_i(x, y_۱(x), y_۲(x), ..., y_N(x)), \qquad y_i(x_\circ) = y_{\circ i}, \qquad i = ۱, ۲, ..., N$$

قرار می‌دهیم:

$$g_\circ(z_\circ(x), z_۱(x), ..., z_N(x)) = ۱,$$

$$g_i(z_\circ(x), z_۱(x), ..., z_N(x)) = f_i(x, y_۱(x), y_۲(x), ..., y_N(x)), \qquad i = ۱, ۲, ..., N$$

[1] nonautonomous
[2] autonomous

و همچنین

$$z_{\circ i}=\begin{cases} x_\circ, & i=\circ \\ y_{\circ i}, & i=۱,۲,...,N \end{cases}$$

بنابراین دستگاه معادلات دیفرانسیل به شکل خودگردان زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} z'_i(x)=g_i(z_\circ(x),z_۱(x),...,z_N(x)) \\ z_i(x_\circ)=z_{\circ i}, \qquad i=\circ,۱,...,N \end{cases}$$

که در این مسأله $g:\mathbb{R}^{N+۱}\longrightarrow\mathbb{R}^{N+۱}$. بنابراین با تبدیل شکل ناخودگردان معادله دیفرانسیل به شکل خودگردان بعد مسأله افزایش می‌یابد.

اگرچه اغلب معادلات دیفرانسیل معمولی به شکل (۱.۱) مطرح می‌شوند، اما قالب خودگردان (۲.۱) به دلیل سادگی، برای بیشتر بررسی‌های نظری ترجیح داده می‌شود. همچنین پیاده سازی روش‌های عددی (از جمله روش‌های رانگ-کوتا) برای معادلات دیفرانسیل معمولی در قالب (۲.۱) آسان‌تر است.

معادلات دیفرانسیل بخودی خود برای به‌دست آوردن یک جواب یکتا کافی نیستند. بنابراین نیاز به برخی شرایط اضافی داریم. اگر شرایط جواب معادله دیفرانسیل در یک نقطه معین (نقطه اولیه) داده شده باشد، مسأله مقدار اولیه[۱] نامیده می‌شود و مسائلی که در آنها شرایط در بیش از یک نقطه بر جواب مجهول تحمیل شده باشند، مسائل مقدار مرزی[۲] نامیده می‌شود. یک مسأله مقدار اولیه داده شده در قالب ناخودگردان به‌صورت زیر است:

$$y'(x)=f(x,y(x)), \qquad y(x_\circ)=y_\circ$$

همچنین قالب خودگردان آن نیز به‌صورت زیر می باشد:

$$y'(x)=f(y(x)), \qquad y(x_\circ)=y_\circ \tag{۳.۱}$$

معادله دیفرانسیل معمولی زیر را در نظر بگیرید:

$$y'(x)=f(x,y(x)), \qquad y(x_\circ)=y_\circ, \qquad x\in[x_\circ,x_N] \tag{۴.۱}$$

با انتگرال گیری از این رابطه در بازهٔ $[x_n\ x_{n+۱}]$ داریم:

$$\int_{x_n}^{x_{n+۱}} f(x,y(x))dx=y(x_{n+۱})-y(x_n)$$

پس شکل انتگرالی مسأله مقدار اولیه به‌صورت زیر است

$$y(x_{n+۱})=y(x_n)+\int_{x_n}^{x_{n+۱}} f(x,y(x))dx \tag{۵.۱}$$

انتگرال سمت راست می‌تواند توسط یک روش انتگرال گیری عددی تقریب زده شود و یک فرمول برای تولید جواب تقریبی معادله دیفرانسیل حاصل شود.

[۱] Initial value problem
[۲] Boundary value problem

۲.۱ وجود و یکتایی جوابها

قضیه یکتایی و وجود شرایطی را بر تابع $f(x,y)$ تحمیل می‌کند که تحت آن شرایط معادله دیفرانسیل (۴.۱) دارای یک جواب منحصر به‌فرد است. برای این منظور با بیان یک تعریف، قضیه مربوطه را تشریح می‌کنیم.

تعریف ۱.۱ *فرض کنید $D \subset R^{۲}$، گوییم تابع $f(x,y)$ نسبت به متغیر y بر مجموعهٔ D در شرط لیپ شیتز صدق می‌کند، در صورتی که عددی ثابت مانند $L > ۰$ وجود داشته باشد، به‌طوری که به ازای هر دو نقطه $(x,y_۱),(x,y_۲) \in D$ داشته باشیم:*

$$|f(x,y_۱) - f(x,y_۲)| \leq L|y_۱ - y_۲| \tag{۶.۱}$$

L ثابت لیپ شیتز برای تابع f نامیده می‌شود.

قضیه ۲.۱ *مسأله مقدار اولیهٔ (۴.۱) را در نظر بگیرید. فرض کنید:*

(الف) $f(x,y)$ در ناحیه مستطیلی

$$D = \{(x,y) : |x - x_۰| \leqslant \alpha \, , \, |y - y_۰| \leqslant \beta\}$$

پیوسته باشد،

(ب) f نسبت به متغیر y بر مجموعهٔ D در شرط لیپ شیتز صدق کند.

آنگاه یک و تنها یک جواب $y = y(x)$ برای مسأله (۴.۱) وجود دارد که در بازه

$$|x - x_۰| \leq \delta := min\Big\{\alpha, \frac{\beta}{M}\Big\}$$

تعریف می‌شود، که $M = \max\limits_{(x,y)\in D} |f(x,y)|$.

۳.۱ مسائل سخت

مسائل سخت[۱] دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی با شرایط خاص هستند که این شرایط حل این‌گونه مسائل به روش‌های متداول را دشوار می‌سازد. سختی در یک دستگاه معادلات دیفرانسیل به یک تفاوت وسیع در مقیاس‌های زمانی مؤلفه‌های بردار جواب اشاره می‌کند. این‌گونه مسائل دارای مولفه‌های جواب با نوسان‌های شدید می‌باشند. در مسائل غیر سخت طول گام را جهت دقت مسأله کنترل می‌کنند؛ روش‌های صریح برای چنین مسائلی مناسب هستند. ولی در مسائل سخت طول گام را علاوه بر در نظر گرفتن دقت، باید جهت پایداری مسأله نیز کنترل کرد. روش‌های صریح برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی محدودیت های زیادی در قبال ناحیه پایداری دارند. لذا هنگام استفاده از چنین روش‌هایی طول گام جهت برقراری پایداری بیشتر از آنچه که برای دقت لازم باشد، محدود می‌شود و باید بسیار کوچک در نظر گرفته شود که علاوه بر افزایش هزینه محاسبات، بعضی اوقات سبب افزایش خطای کلی می‌شود.

[۱]Stiff problems

معمولاً برای پایداری قابل قبول، از روش‌های ضمنی برای حل چنین مسائلی استفاده می‌شود. علت آن‌که روش‌های ضمنی خواص پایداری خوبی دارند آن است که این روش‌ها نوعی تقریب برای جواب تولید می‌کنند که می‌توانند با هر دو رفتار چندجمله‌ای و نمایی نزولی سریع که همزمان در مسائل سخت رخ می‌دهد، مطابقت کنند. مثال زیر چگونگی حل مسائل سخت را شرح می‌دهد.

مثال ۳.۱ *مسأله زیر با مقدار اولیه داده شده را در نظر بگیرید:*

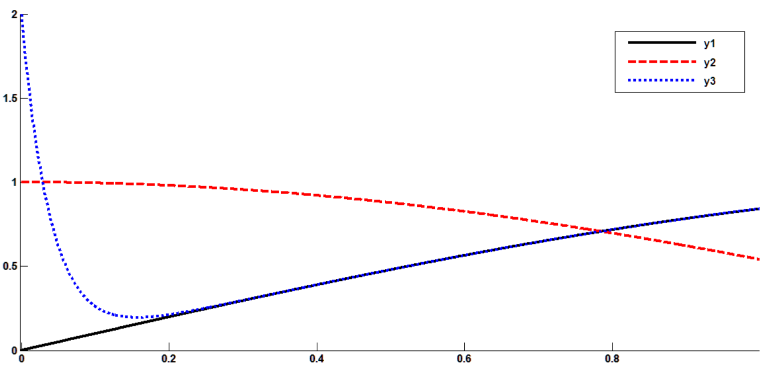
$$\begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ y_3'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(x) \\ -y_1(x) \\ -Ly_1(x) + y_2(x) + Ly_3(x) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \epsilon \end{bmatrix}$$

که L و ϵ اعدادی ثابت هستند. در حالت خاص اگر $\epsilon = 0$، آنگاه جواب مسأله به‌صورت زیراست :

$$y(x) = \begin{bmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \\ \sin(x) \end{bmatrix}$$

ولی در حالت کلی برای یک مقدار دلخواه ϵ مولفه سوم به‌صورت زیر خواهد بود :

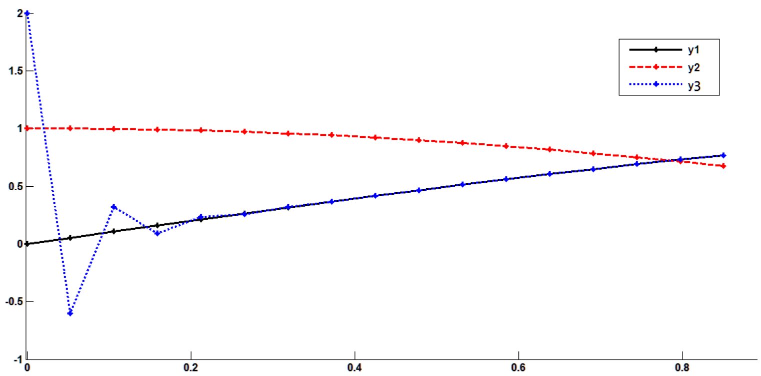
$$\sin(x) + \epsilon \exp(Lx)$$



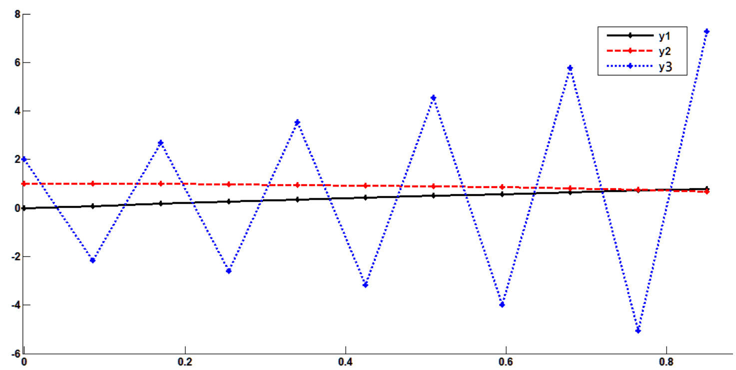
شکل ۱.۱: جواب دقیق مثال ۳.۱

این مسأله را در بازهٔ $[0, 0/85]$ در حالت خاص $L = -25$ و $\epsilon = 2$ با روشهای عددی حل می‌کنیم. بعداً در شکل ۱.۱ جواب دقیق و در شکل ۲.۱ جواب تقریبی که با استفاده از روش اویلر با $n = 16$ گام محاسبه شده، نمایش داده شده است. اگرچه به نظر می‌رسد که نتیجه قابل قبولی حاصل شده است، ولی وقتی n کمتر از ۱۰ باشد، همانطور که در شکل ۳.۱ نشان داده شده است، خطا از کنترل خارج است.

به نظر می‌رسد تقریب y_1 و y_2 حتی برای طول گام‌های بزرگ هم یک تقریب نسبتاً خوب است. علاوه براین برای طول گام‌های کمتر از ۰٫۰۸ مقادیر تقریبی y_3 برابر همان مقادیر تقریبی y_1 می‌شود. ولی برای طول



شکل ۲.۱: جواب تقریبی مثال ۳.۱ برای $L = -۲۵$ و $n = ۱۶$ با روش اویلر

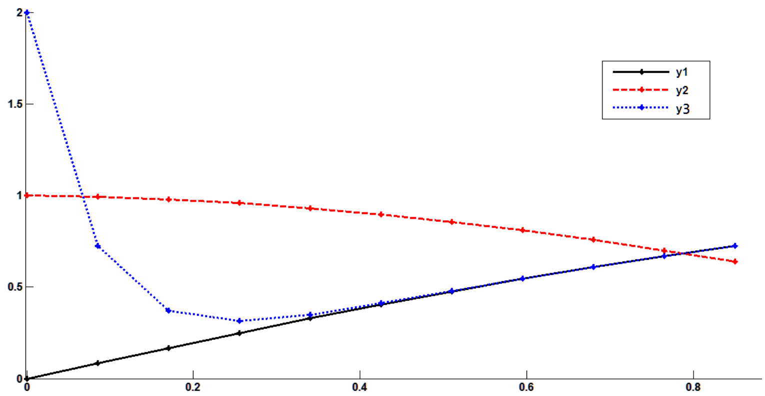


شکل ۳.۱: جواب تقریبی مثال ۳.۱ برای $L = -۲۵$ و $n = ۱۰$ با روش اویلر

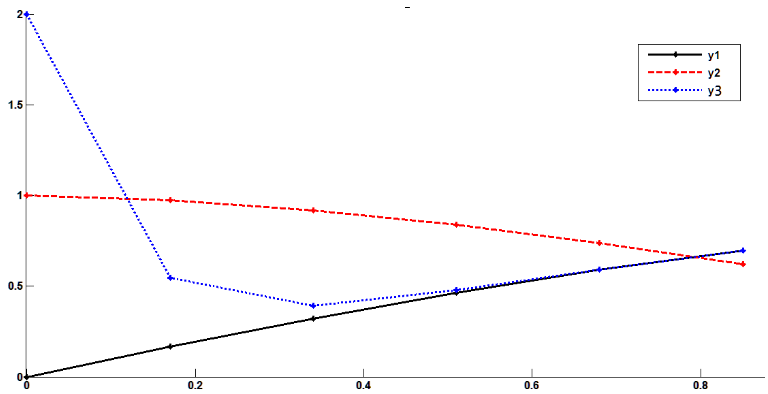
گامهای بزرگتر از ۰٫۰۸ تقریب‌های $y_۳$ خطای بسیار زیادی دارد. با بررسی تفاضل $y_۱ - y_۳$ که در معادله $y'(x) = Ly(x)$ با جواب ثابت $\exp(Lx)$ صدق می‌کند، آنچه که اتفاق می‌افتد را می‌توان بهتر درک کرد. جواب دقیق $y' = Ly$ در هر گام زمانی ضریبی از $exp(z)$ است که $z = hL$ و می‌توان این را با رفتار جواب محاسبه شده، مقایسه کرد. مطابق فرمول روش اویلر $y_n = y_{n-۱} + hf(x_{n-۱}, y_{n-۱}) = (۱ + hL)y_{n-۱} = (۱ + z)y_{n-۱}$، جواب عددی در هر گام در عامل $z + ۱$ ضرب می‌شود. در حقیقت $z + ۱$ تقریب ضعیفی از $exp(z)$ است و مشکل اصلی در مسائل سخت زمانی به‌وجود می‌آید که $z < ۰$ باشد.

در مقابله با رفتار ناپایدار روش اویلر صریح، حال رفتار روش اویلر ضمنی را بررسی می‌کنیم. در این حالت به‌جای تقریب $\exp(z) \approx ۱ + z$ از تقریب $\exp(z) \approx (۱ - z)^{-۱}$ استفاده می‌شود. نتایج حاصل از به‌کار بردن روش اویلر ضمنی با $n = ۱۰$ و $n = ۵$ در شکل‌های ۴.۱ و ۵.۱ داده شده است. همان طور که دیده می‌شود روش اویلر ضمنی برای این مسأله بهتر از روش اویلر صریح حتی با طول گام بزرگتر از آن عمل می‌کند.

برای حل مسائل سخت با روش‌های عددی با ناحیه پایداری محدود، برای پایداری جواب مجبوریم تا طول گام را بیش از اندازه کوچک در نظر بگیریم، اما با این کار خطاهای گرد کردن افزایش می‌یابد که ممکن است باعث ناپایداری جوابهای عددی شود.



شکل ۴.۱: جواب تقریبی مثال ۳.۱ برای $L=-۲۵$ و $n=۱۰$ با روش اویلر ضمنی



شکل ۵.۱: جواب تقریبی مثال ۳.۱ برای $L=-۲۵$ و $n=۵$ با روش اویلر ضمنی

اگرچه هیچ تعریف پذیرفته شده کلی از سختی یک معادله دیفرانسیل وجود ندارد، اما می‌توان تعریف تجربی مناسب زیر را برای این دسته از مسائل بیان کرد.

تعریف ۴.۱ *دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی $Y'(t)=AY(t)+\Phi(t)$، $Y(t_\circ)=Y_\circ$ که در آن A یک ماتریس ثابت $n\times n$، و $Y(t)=[Y_۱(t)\,Y_۲(t)\,\dots Y_n(t)]^T$ و $\Phi(t)$ یک تابع برداری مفروض است را سخت گوییم، هرگاه ماتریس A دارای n مقدار ویژه متمایز $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، ...، λ_n با شرایط زیر باشد:*

(الف) $Re(\lambda_j)<\circ$، $j=۱,۲,\dots,n$

(ب) $R=\dfrac{\max_j|Re(\lambda_j)|}{\min_j|Re(\lambda_j)|}\gg ۱$

R ضریب سختی مسأله نامیده می‌شود و نسبتی از اندازهٔ سختی مسأله را بیان می‌کند.

برای مسائل غیرخطی نیز تعریف مشابهی به‌صورت زیر داریم.

تعریف ۵.۱ *دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی $y'=f(t,y)$ با $y(t_\circ)=y_\circ$ را سخت گوییم، هرگاه مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین $J=\frac{\partial f}{\partial y}$ در شرایط (الف) و (ب) تعریف ۴.۱ صدق کند. البته در این حالت مقادیر ویژه ثابت نبوده و وابسته به مقدار t است، بنابراین گوییم مسأله در بازهٔ I سخت است، هرگاه برای تمام $t\in I$*

این شرایط برقرار باشند.

برای حل مسائل سخت، پایداری روش باید بدون محدودیت در طول گام اعمال شود، از اینرو برای این‌گونه مسائل نیاز به روش‌هایی با ناحیه پایداری بزرگ داریم.

البته باید در نظر داشت که تنها توجه روی مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین و محدود کردن طول گام جهت پایداری، یک نوع نگرش سطحی به مسأله خواهد بود. در ابتدا باید طول بازه انتگرال گیری را نیز در نظر داشت. اگر طول بازه انتگرال‌گیری خیلی کوچک باشد، در این‌صورت طول گام نیز باید بسیار کوچک در نظر گرفته شود اما ممکن است مسأله سخت نباشد و رفتار مولفه‌ها در زیربازه‌ها همراه با نوسان‌های شدید نباشد و به‌جای آن باید رفتار مولفه‌های جواب را در طول بازه مد نظرقرار داشت.

۴.۱ تاریخچه مختصری بر حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی

روش اویلر اولین روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی است که در سال ۱۷۶۸ توسط اویلر [۱] معرفی شد. ایده این روش بسیار ساده است. در این روش بازه انتگرال گیری به زیر بازه هایی به طول h تقسیم می‌شود. طول گام می‌تواند ثابت باشد و یا در هر گام متفاوت باشد، که منجر به روش‌های با طول گام متغیر می‌شود. روش اویلر در پایان گام n-ام جواب تقریبی را با رابطه زیر محاسبه می‌کند

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \qquad y_n \approx y(x_n).$$

با این روش در گام n-ام، مقدار تقریبی برای $y(x_{n+1})$ به‌دست می‌آید.

به‌طور کلی دو رویکرد برای افزایش دقت و مرتبه[۲] روش انتگرال گیری وجود دارد. این رویکردها در برخی موارد نیز مخالف هم هستند. اولین رویکرد برای افزایش دقت، گرفتن اطلاعات بیشتر مربوط به گام‌های قبل در محاسبه گام جاری است. این روش‌ها به‌عنوان روش‌های چندگامی شناخته می‌شوند. رویکرد دوم، استفاده از تقریب جواب در چندین نقطهٔ داخلی در طول بازه انتگرال گیری است، که این روش‌ها با عنوان روش‌های چند مرحله ای[۳] شناخته می‌شوند.

اولین تعمیم روش اویلر در سال ۱۸۸۳ توسط آدامز[۴] و بشفورت[۵] انجام شد، که اکنون با عنوان روش‌های آدامز-بشفورت معروف هستند. روش‌های آدامز-بشفورت حالت خاصی از روش‌های شناخته شده تحت عنوان روش‌های چندگامی خطی[۶] هستند که به شکل کلی زیر می‌باشند:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n-i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f(y_{n-i}). \qquad (۷.۱)$$

این روش یک روش k-گامی است و در هر گام به اطلاعات محاسبه شده در k گام قبل نیاز دارد. حالت خاص این روش با $\alpha_1 = 1$ و $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_k = 0$ همان روش آدامز-بشفورت است. تعمیم دیگر این

[۱] L. Euler
[۲] order
[۳] multistage methods
[۴] J. C. Adams
[۵] F. Bashforth
[۶] Linear multistep methods

روش توسط مولتون[۱] در حالت $\beta_\circ \neq \circ$ کامل شد، که در این حالت روش‌های با ساختار ضمنی آدامز-مولتون نتیجه می‌شود. تغییر طول گام در این روش بسیار سخت است، نردسیک[۲] در سال ۱۹۶۲ برای حل این مشکل پیشنهاداتی داد. روش‌های دیگر چندگامی خطی توسط نیستروم[۳] در سال ۱۹۲۵و میلن[۴] در سال ۱۹۲۶ به‌دست آمد. برای به‌دست آوردن یک دقت خاص، روش‌های آدامز-مولتون به اطلاعات کمتری از گام‌های قبل، نسبت به روش‌های آدامز-بشفورت نیاز دارند. در این روش y_n کاملاً وابسته به اطلاعات موجود نیست، بلکه باید یک معادله جبری حل شود تا y_n به‌دست آید.برای غلبه براین مشکل، آدامز استفاده از روش تکراری نیوتن برای محاسبه y_n را پیشنهاد نمود.

امروزه این رویکرد به‌عنوان تکنیکی برای حل مسائل سخت مورد استفاده قرار می‌گیرد. از طرف دیگر میلن در سال ۱۹۴۹ پیشنهاد داد که روش‌ها باید با استفاده از یک جفت پیشگو-اصلاحگر پیاده سازی شوند. یعنی y_n با روش آدامز-بشفورت پیشگویی شده و سپس با استفاده از روش آدامز-مولتون اصلاح گردد. دو رویکرد اصلی معمولاً با $P(EC)^NE$ و $P(EC)^N$ نشان داده می‌شوند که P بیانگر روش پیشگو، C نشان‌دهنده روش اصلاحگر ، E نشان‌دهنده محاسبه تابع در نقاط معلوم و N نشان دهنده تعداد تکرار اصلاحگر برای همگرایی است. از آنجایی که تقریب نهایی y_n تنها با استفاده از اطلاعات معلوم به‌دست می‌آید، این روش‌ها به‌طور طبیعی صریح هستند. با افزایش مرتبه روش‌های چندگامی، ناحیه پایداری این روش‌ها کاهش می‌یابد.

در سال ۱۹۵۶ دالکوئست[۵] مفهوم سازگاری، پایداری و همگرایی را معرفی کرد. او نشان داد که هر روش عددی که سازگار و پایدار باشد، همگرا است. همچنین نشان داد که چگونه ضرایب روش چندگامی را می‌توان با استفاده از چند جمله های مشخصه $\rho(z)$ و $\sigma(z)$ به‌صورت زیر مشخص کرد

$$\rho(z) = \alpha_k z^k + \alpha_{k-1} z^{k-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_\circ$$

$$\sigma(z) = \beta_k z^k + \beta_{k-1} z^{k-1} + \ldots + \beta_1 z + \beta_\circ$$

او همچنین نشان داد که مرتبه همگرایی روش‌های k-گامی خطی اگر k زوج باشد،$k+1$ و اگر فرد باشد برابر $k+2$ است.

روش‌های فرمول مشتق گیری پسرو(BDF)[۶] با قرار دادن $\beta_1 = \ldots = \beta_{k-1} = \beta_k = \circ$در فرمول کلی روش‌های چندگامی خطی در سال ۱۹۵۲ توسط کورتیس[۷] و هرش فِلدر[۸] معرفی شد. ساختار این روش‌ها همان‌طور که از نامشان پیدا است، براساس مشتقگیری عددی است و نقش اساسی در حل مسائل سخت که باید دارای ناحیه پایداری بزرگ باشند، دارند. بدلیل هزینه پیاده سازی پایین این روش‌ها، هنوز هم اکثر پیاده سازی‌های کاربردی با روش‌های BDF از مرتبه کمتر از ۵ انجام می‌شود.

اولین تعمیم روش اویلر به‌صورت چندمرحله ای، منسوب به رانگ[۹] در سال ۱۸۹۵ است. همچنین هیون[۱۰]

[۱] F. R. Moulton
[۲] A. Nordseick
[۳] E. J. Nystrom
[۴] W. E. Milne
[۵] G. Dahlquist
[۶] Backward Differentiation Formulae
[۷] C. F. Curtiss
[۸] J. O. Hirschfelder
[۹] C. Runge
[۱۰] K. Heun

برخی قواعد و مرتبه روش‌ها را در ۱۹۰۰ کامل کرد. کوتا[۱] در ۱۹۰۱ به‌طور کامل روش‌های تا مرتبه ۴ را مشخص کرد و برای روش مرتبهٔ ۵ نیز پیشنهاداتی ارائه داد. مِرسون[۲] از آنچه که اکنون با عنوان دیفرانسیل‌های مقدماتی شناخته می‌شود، برای نمایش جواب دقیق استفاده کرد، اما نتوانست ببیند که جواب‌های عددی با استفاده از دیفرانسیل‌های مقدماتی هم نمایش داده می‌شوند. در سال ۱۹۷۲ هَیرِر[۳] و وانِر[۴] نظریه جبری روش‌های رانگ کوتا را که چندی قبل توسط بوچر معرفی شده بود، توسعه دادند.

در سال ۱۹۶۴ بوچر چند روش ضمنی خاص بر پایه روش‌های گاوس[۵] و فرمول رادو[۶] و لوباتو [۷] معرفی کرد. این روش‌ها از فرضیات ساده سازی استفاده می‌کنند. فرض ساده سازی مجموعه ای از شرایط است که زمانی که برقرار باشند، تعداد شرایط مورد نیاز برای به‌دست آوردن روش از یک مرتبه خاص را کاهش می‌دهند.

روش‌های رانگ-کوتای ضمنی هزینه پیاده سازی بسیار زیادی دارند. برای کم کردن هزینه محاسبات این روش‌ها در سال ۱۹۷۷ الکساندر[۸] روش‌های رانگ-کوتای ضمنی قطری $(DIRK)$[۹] را معرفی نمود. وقتی که ماتریس A پایین مثلثی باشد، دستگاه غیر خطی می‌تواند به‌طور متوالی در هر مرحله حل شود و مجموع هزینه‌ها نیز کاهش می‌یابد.

برای به‌دست آوردن دقت بالای مراحل و جواب تقریبی و پایداری مناسب این روش‌ها نُرِست[۱۰] در سال ۱۹۷۶ روشی را اکنون با عنوان روش‌های ضمنی منفرد[۱۱]$(SIRK)$ شناخته می‌شوند، را معرفی کرد. در این حالت ماتریس A دارای یک مقدار ویژه است و شرط سبب می‌شود که مراحل و تقریب‌های خروجی از یک مرحله باشند. تحلیل خطای این روش‌ها در سال ۱۹۷۸ توسط بوراگ [۱۲] انجام شد. بوچر در سال ۱۹۷۹ نشان داد که چگونه می‌توان ماتریس A را به شکل ماتریس متعارف جردن تبدیل کرد. بوچر و کاش[۱۳] روش‌های $SIRK$ را توسعه دادند. در این روش‌ها ماتریس A متشکل از یک بلوک ضمنی منفرد و برخی مراحل اضافی قطری است. اگرچه هزینه جبری در مورد این روش مانند همان روش ضمنی است،اما مراحل اضافی قطری عملکرد روش را بهبود می‌بخشد و ثابت خطا به‌طور قابل توجهی کوچک می‌شود.

روش‌های خطی عمومی در سال ۱۹۶۶ توسط بوچر به‌عنوان یک چارچوب متحد کننده ای برای روش‌های قدیمی نظیر روش‌های رانگ-کوتا و روش‌های چندگامی خطی و همچنین تعمیمی از این روش‌ها معرفی و خواص آنها نیز بررسی شد. در سال ۱۹۹۳ بوچر رده ای از روش‌های خطی عمومی با نام روش‌های انتگرال گیری چندگامی ضمنی قطری را برای رفع مشکل روش‌های رانگ-کوتا و چندگامی خطی نظیر هزینه پیاده سازی بالای این روش‌ها، ارائه نمود، که این روش‌ها دارای کارایی های قابل توجهی برای حل مسائل گوناگون می‌باشند.

از آنجایی که روش‌های رانگ-کوتا دارای پایداری بسیار خوبی می‌باشند، نیاز داریم که روش‌های خطی عمومی دارای خاصیت *پایداری رانگ-کوتا* باشد. می‌توان این‌گونه پنداشت که ناحیه پایداری دو روش با هم

[۱] W. Kutta
[۲] R. H. Merson
[۳] E. Hairer
[۴] G. Wanner
[۵] Gauss
[۶] Radau
[۷] Lobatto
[۸] R. Alexander
[۹] Diagonally Implicit Runge-Kutta
[۱۰] S. P. Norsett
[۱۱] singly implicit methods
[۱۲] K. Burrage
[۱۳] J. R. Cash

معادل باشد. یکی از مشکلات این روش‌ها این است که به‌دست آوردن روش‌هایی با چنین پایداری نیاز به حل دستگاه‌های معادلات خطی پیچیده ای دارد. می‌توان روابطی بین ماتریسهای داخلی یافت تا پایداری رانگ-کوتای این روش‌ها را تضمین کند، که منجر به خاصیتی تحت عنوان پایداری رانگ-کوتای ذاتی می‌شود.

اخیراً نیز تعمیمی از روش‌های خطی عمومی برای به‌دست آوردن روش‌های از مرتبه بالاتر و ناحیه پایداری بزرگتر، با نام روش‌های خطی عمومی با مشتق دوم[۱] توسط بوچر و حجتی معرفی شده است. در این روش علاوه بر استفاده از مشتق اول، از مشتق مرتبه دوم نیز در محاسبات تقریب جواب عددی استفاده می‌شود.

در فصل بعد ضمن بیان روش‌های اویلر، رانگ-کوتا و روش‌های چندگامی خطی، خواص اساسی آن‌ها مانند همگرایی و پایداری را بررسی می‌کنیم.

[۱] Second derivative General Linear Method

فصل ۲

روش‌های عددی برای معادلات دیفرانسیل معمولی

۱.۲ مقدمه

مسأله مقدار اولیه به‌صورت زیر را در نظر بگیرید

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(a) = y_۰, \qquad a \leq x \leq b. \tag{۱.۲}$$

پیدا نمودن جواب تحلیلی برای این مسأله در حالت کلی مقدور نیست، اما چیزی که دور از انتظار نیست و می‌توان به کمک روش‌های عددی پیدا کرد، نقاطی مانند (x_j, y_j) است که به نقاط منحنی $y(x)$ یعنی نقاط $(x_j, y(x_j))$ نزدیک باشند. به عبارت دیگر $y(a) = y_۰$ و $y_j \approx y(x_j)$. در حقیقت مقدار تقریبی تابع $y(x)$ در نقطه x_j را با y_j نمایش می‌دهیم.

در ادامه برای پیدا کردن یک جواب تقریبی مسأله مقدار اولیه (۱.۲)، ابتدا عددی مانند N انتخاب و سپس قرار می‌دهیم $h = \frac{b-a}{N}$. نقاط گره در بازهٔ $[a\ b]$ را با رابطهٔ زیر معرفی می‌کنیم.

$$x_j = a + jh, \qquad j = ۰, ۱, ۲, ..., N.$$

اکنون برای محاسبه مقادیر تقریبی (x_j, y_j) به ارائه روش‌های عددی می‌پردازیم.

۲.۲ روش اویلر

با توجه به شکل انتگرالی مسأله مقدار اولیه(۵.۱)، جواب مسأله (۱.۲) در $x_n = x_{n-۱} + h$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$y(x_n) = y(x_{n-۱}) + \int_{x_{n-۱}}^{x_n} f(x, y(x))dx. \tag{۲.۲}$$

حال اگر انتگرال را با مجموع چپ ریمان[۱] تقریب بزنیم، خواهیم داشت

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y(x))dx \approx (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1},y_{n-1}).$$

بنابراین روش اویلر به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1},y_{n-1}). \qquad (۳.۲)$$

۱.۲.۲ مرتبهٔ همگرایی

تعاریف مربوط به همگرایی و مرتبه همگرایی روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی به‌صورت زیر است.

تعریف ۱.۲ *یک روش عددی را همگرا گوییم هرگاه برای هر مسأله مقدار اولیه که در قضیه یکتایی و وجود صدق می‌کند، وقتی $h \to 0$ داشته باشیم:*

$$\max_{0 \le n \le N} ||y(x_n) - y_n|| \to 0$$

تعریف ۲.۲ *گوییم یک روش عددی از مرتبه p است، هرگاه برای هر مساله مقدار اولیه داشته باشیم:*

$$y(x_n) - y_n = O(h^{p+1}), \qquad \forall n = 0,1,2,...,N$$

با مقایسه روش اویلر با بسط سری تیلور جواب دقیق، مرتبه روش اویلر تعیین می‌شود. اگر جواب دقیق $y(x_n) = y(x_{n-1}+h)$ در x_n را با سری تیلور حول x_{n-1} بسط دهیم، داریم

$$y(x_n) = y(x_{n-1}) + hy'(x_{n-1}) + \frac{h^2}{2!}y''(x_{n-1}) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + ... \qquad (۴.۲)$$

با کم کردن رابطه (۳.۲) از (۴.۲)نتیجه می‌شود $y(x_n) - y_n = O(h^2)$ و از آنجایی که $nO(h^2) = O(h)$ بنابراین روش اویلر از مرتبهٔ یک است.

۲.۲.۲ روش اویلر ضمنی

اگر در شکل انتگرالی مسأله مقدار اولیه (۱.۲)، انتگرال را با استفاده از مجموع ریمان راست[۲] تقریب بزنیم، خواهیم داشت

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y(x))dx \approx (x_n - x_{n-1})f(x_n,y_n). \qquad (۵.۲)$$

بنابراین روش اویلر ضمنی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_n,y_n). \qquad (۶.۲)$$

روش اویلر پسرو یک روش ضمنی است، زیرا y_n به‌طور مستقیم به‌دست نمی‌آید، بلکه با حل دستگاه معادلات جبری تعیین می‌شود.

[۱]left Riemann sum
[۲]right Riemann sum

۳.۲.۲ پایداری روش‌های اویلر صریح و ضمنی

تعریف ۳.۲ ([۱۷] Lambert) *یک روش عددی برای حل یک مسأله مقدار اولیه پایدار[۱] است اگر اختلال کوچکی در مقدار اولیه داده شده منجر به اختلال کوچکی در جواب عددی بدست آمده از روش برای مسأله شود.*

برای بررسی پایداری روش اویلر، آن را برای معادله دیفرانسیل خطی $y' = \lambda y$ (λ می‌تواند عددی مختلط باشد.) به‌کار می‌بریم، داریم

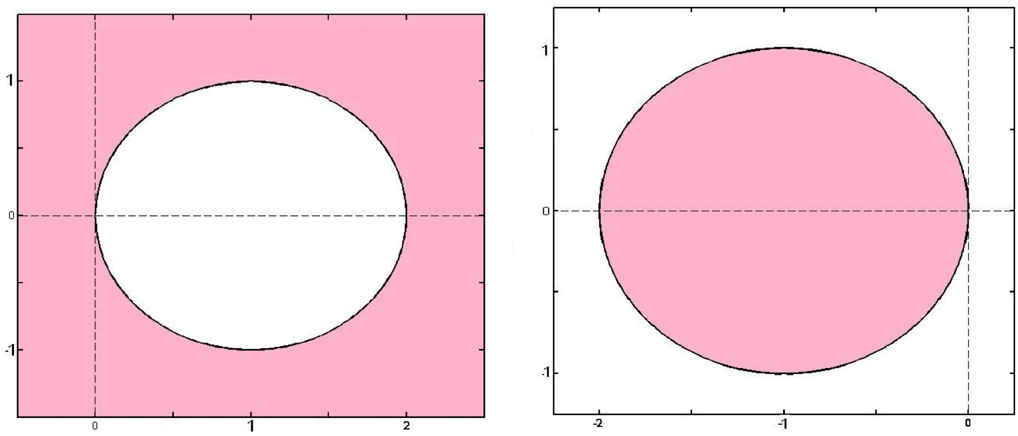
$$y_n = (۱ + h\lambda)y_{n-۱} = (۱ + h\lambda)^۲ y_{n-۲} = ... = (۱ + h\lambda)^n y_۰ .$$

قرار می‌دهیم $z = h\lambda$. جواب عددی y_n کراندار است اگر و تنها اگر $|۱+z| \leq ۱$. مجموعه $\{z : |۱+z| \leq ۱\}$ را ناحیه پایداری[۲] روش نامیم. ناحیه پایداری روش مجموعه همه $z \in \mathbb{C}$ است به‌طوری‌که روش به‌ازای آن‌ها پایدار باشد. ناحیه پایداری روش اویلر در شکل ۱.۲ (سمت راست) نشان داده شده است.

به‌طور مشابه برای بررسی پایداری روش اویلر پسرو، با به‌کار بردن این روش روی معادله دیفرانسیل خطی $y' = \lambda y$، داریم

$$y_n = y_{n-۱} + h\lambda y_n, \qquad \Rightarrow \qquad (۱ - h\lambda)y_n = y_{n-۱},$$
$$\Rightarrow \quad y_n = \frac{۱}{۱ - h\lambda} y_{n-۱} = \ldots = (\frac{۱}{۱ - h\lambda})^n y_۰ = (\frac{۱}{۱ - z})^n y_۰ .$$

در این حالت نیز برای کراندار بودن جواب باید داشته باشیم $|\frac{۱}{۱-z}| \leq ۱$ پس $|z - ۱| \geq ۱$. بنابراین ناحیه پایداری روش اویلر پسرو به‌صورت $|z - ۱| \geq ۱$ می‌باشد که در شکل ۱.۲ (سمت چپ) نشان داده شده است. در هر دو شکل قسمت هاشور خورده ناحیه پایداری آن روش است. مشاهده می‌شود که ناحیه پایداری روش اویلر صریح کراندار است و ناحیه پایداری روش اویلر ضمنی بی‌کران است.



شکل ۱.۲: ناحیه پایداری روش اویلر (سمت راست) و روش اویلر پسرو (سمت چپ)

[۱] stable
[۲] stability region