دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

روش‌های چندمقیاسی وردشی تطبیقی

استاد راهنما

دکتر علی مس‌فروش

دانشجو

هادی حسین‌پور

۱۳۹۲

تقدیم به

ساحت مقدس حضرت ولی عصر (عج)

و به

روح پاک پدرم که عالمانه به من آموخت که چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی نمایم

و به

مادرم، دریای عشق که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر

و به

همسرم، امید بودنم که نشانه لطف الهی در زندگی من است.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را به زیور عقل آراست.
با درود فراوان به روح پرفتوح پدر بزرگوارم و با سپاس بیکران به همدلی و همراهی مادر دلسوز و مهربانم که سجده ایثارش گل محبت را در وجودم پروراند.
با تقدیر و تشکر شایسته از استاد فرهیخته و فرزانه، جناب آقای دکتر **علی مس‌فروش** که همواره راهنما و راهگشای من در اتمام و اکمال این پایان‌نامه بودند.
در پایان از **همسر عزیزم** که در لحظه لحظه نگارش این پایان‌نامه، همراه و همگام من بودند، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنم.

هادی حسین پور
۱۳۹۲

تعهدنامه

اینجانب **هادی حسین‌پور** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **روش‌های چندمقیاسی وردشی تطبیقی** ، تحت راهنمایی **دکتر علی مس‌فروش** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

هادی حسین‌پور
۱۳۹۲

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

یک روش عناصر متناهی جدید به‌نام روش چندمقیاسی وردشی تطبیقی را همراه با تکنیکی منظم، برای بدست آوردن تقریبی از بخش مقیاس ظریف جواب، توسعه می‌دهیم. جواب مقیاس ظریف، با مجموع جواب‌های مسایل موضعی مجزا که به صورت عددی حل شده‌اند، تخمین زده می‌شود. برآورد خطای پسینی را در نورم انرژی نتیجه می‌گیریم که به پارامترهای مهم گسسته‌سازی وابسته است. این پارامترها عبارتند از: اندازه مش مقیاس درشت، اندازه مش مقیاس ظریف و اندازه وصله‌ها. بر پایه برآورد خطای پسین، الگوریتمی تطبیقی را ارایه می دهیم که به‌صورت خودکار این پارامترها را کنترل می‌کند. در نهایت با ارایه مثال‌های عددی مختلف، نشان می‌دهیم که این روش در عمل چگونه کار می‌کند.

کلمات کلیدی: گالرکین، دوگان، برآورد خطای پسین، تطبیق، روش چندمقیاسی وردشی، همگن‌سازی، مساله سلولی، دوره‌ای، مسایل موضعی.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه و پیش‌نیاز

۱.۱ مقدمه

امروزه مسایل چندمقیاسی، از بزرگترین چالش‌ها در ریاضیات محاسباتی هستند. این مسایل بیشتر تبدیل به دستگاه‌هایی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی با ویژگی‌های چندمقیاسی می‌شوند. در یک روش با مش معمولی، پارامترهایی مانند اندازه مش و اندازه‌ای از گام‌های زمانی [۱] وجود دارد.
برای مطالعه روش‌های چندمقیاسی، نیاز به درنظرگرفتن اندازه‌های مش روی همه مقیاس‌ها، اندازه زیردامنه‌ها برای مسایل موضعی، شرایط مرزی برای مسایل موضعی، مش‌های مختلف برای معادلات مختلف، گام‌های زمان مختلف برای معادلات مختلف و مواردی مشابه می‌باشد. هرچند که الگوریتم‌های تطبیقی بیشتر جنبه نظری دارند، اما از آن‌ها برای تخمین خطا نیز استفاده می‌شود. الگوریتم‌های تطبیقی به‌صورت تکراری عمل می‌کنند و برای بهبود جواب، از جواب‌های قبلی استفاده می‌کنند.
امروزه شاخه‌هایی از علوم مهندسی دارای محاسباتی سنگین هستند که برای جلوگیری از انجام این محاسبات پیچیده، استفاده از روش‌های چندمقیاسی کاربرد زیادی دارند.
هدف اصلی این پایان‌نامه، توسعه یک روش چندمقیاسی جدید برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی می‌باشد. برآورد و تطبیق خطا، بخش تفکیک‌ناپذیری از این روش می‌باشد.
امیدواریم که برآورد خطا و الگوریتم تطبیقی این روش، بتواند به عنوان چارچوبی برای تطبیق در مسایل چندمقیاسی مورد استفاده قرار گیرد.

[۱] Time Steps

۲.۱ تعاریف

در این بخش تعاریفی را که مورد نیاز می‌باشند، بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱. عملگر **لاپلاس** [۲] به‌صورت
$$\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$
و عملگر **گرادیان** [۳] به‌صورت
$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right),$$
تعریف می‌شود. رابطه بین این دو عملگر به‌صورت زیر می‌باشد:
$$\Delta = \nabla \cdot \nabla.$$

تعریف ۲.۲.۱. یک **تابعک خطی** [۴]، تابعی مانند L است که $L : V \to \mathbb{R}$، به‌گونه‌ای که رابطه زیر برقرار باشد:
$$L(\lambda u + \mu v) = \lambda L(u) + \mu L(v).$$

تعریف ۳.۲.۱. یک **فرم دوخطی** [۵] مانند $a(\cdot,\cdot)$ روی V، تابعی مانند $a : V \times V \to \mathbb{R}$ است که نسبت به آرگومان خود خطی است. یعنی برای هر $u, v, w \in V$ و $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ داریم:
$$a(\lambda u + \mu w, v) = \lambda a(u, v) + \mu a(w, v),$$
$$a(u, \lambda v + \mu w) = \lambda a(u, v) + \mu a(u, w).$$

تعریف ۴.۲.۱. فرم دوخطی $a(\cdot,\cdot)$ را **متقارن** [۶] می‌نامیم هرگاه
$$a(v, w) = a(w, v), \quad \forall v, w \in V,$$
باشد و آن‌را **معین مثبت** [۷] می‌گوییم هرگاه
$$a(v, v) > 0, \quad \forall v \in V,\ v \neq 0,$$
باشد.

تعریف ۵.۲.۱. فرم دوخطی $a(\cdot,\cdot)$ **کراندار** [۸] است هرگاه ثابت M به‌گونه‌ای موجود باشد که رابطه زیر برقرار باشد:
$$|a(w, v)| \leq M \|w\|_V \|v\|_V, \quad \forall v, w \in V.$$

[۲] Laplacian
[۳] Gradient
[۴] Linear Functional
[۵] Bilinear Form
[۶] Symmetric
[۷] Positive Definite
[۸] Bounded

تعریف ۶.۲.۱. فرم دوخطی $a(\cdot,\cdot)$ را **کورسیو** [۹] در V می‌نامیم هرگاه رابطه زیر برقرار باشد:
$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^{2}, \quad \forall v \in V,\ \alpha > 0.$$

تعریف ۷.۲.۱. اگر $a(\cdot,\cdot)$ یک فرم دوخطی متقارن باشد که در V کراندار و کورسیو باشد، آنگاه **نورم انرژی** [۱۰] را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:
$$\|v\|_a = a(v,v)^{\frac{1}{2}},$$

تعریف ۸.۲.۱. یک تابع **هموار** [۱۱] نامیده می‌شود هرگاه به تعداد کافی دارای مشتقات پیوسته باشد.

تعریف ۹.۲.۱. فرض می‌کنیم که $X = (x_0, \cdots, x_n)$ و $Y = (y_0, \cdots, y_n)$ دو بردار در $\mathbb{R}^n$ باشند. **ضرب داخلی** [۱۲] این دو بردار را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:
$$\langle X, Y \rangle = x_0 y_0 + \cdots + x_n y_n.$$

تعریف ۱۰.۲.۱. **ضرب داخلی بین ماتریس‌ها** را به‌صورت زیر مشخص می‌کنیم:
$$A : B = tr\left(A^T B\right) = a_{ij} b_{ij}.$$

تعریف ۱۱.۲.۱. مجموعه همه تابعک‌های خطی کراندار روی V را فضای **دوگان** [۱۳] V می‌نامیم و آن‌را با V^* نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۲.۱. فضای $L_2(\Omega)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:
$$L_2(\Omega) = \left\{ v : \left(\int_\Omega |v(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

تعریف ۱۳.۲.۱. فضای H_0^1 را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:
$$H_0^1(a,b) = \left\{ v \in L_2(a,b) : \int_a^b \left((v(x))^2 + (v'(x))^2 \right) \, dx < \infty, v(a) = v(b) = 0 \right\},$$
همچنین فضای دوگان H_0^1 را با H^{-1} نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۲.۱. فضای H^1 به‌صورت زیر تعریف می‌شود:
$$H^1 = \{ v : \|v\| + \|\nabla v\| < \infty \}.$$

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه غیرتهی دلخواه و d تابعی حقیقی بر $X \times X$ باشد به‌طوری که:

۱. به ازای هر x و y از X، $d(x,y) \geq 0$؛

۲. به ازای هر x و y از X، $d(x,y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$؛

[۹] Coercive

[۱۰] Energy Norm

[۱۱] Smooth

[۱۲] Inner Product

[۱۳] Dual

۳. به ازای هر x و y از X، $d(x,y)=d(y,x)$؛

۴. به ازای هر x، y و z از X،

$$d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y),$$

در این‌صورت، d را یک **متریک** روی X و (X,d) را یک **فضای متریک** می‌نامند.

تعریف ۱.۲.۱۶. فضای برداری شامل تمام چندجمله‌ای‌های از درجه کمتر یا مساوی q را روی بازه (a,b) با نماد $p^q(a,b)$ نمایش می‌دهیم.

توابع پایه‌ای لاگرانژ [۱۴] را با نماد $\{\lambda_i\}_{i=0}^{q}$ نشان می دهیم که از توابع $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q$ تشکیل شده‌اند. هر تابع متناظر یک نقطه گره‌ای $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ در بازه (a,b) به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

تعریف ۱.۲.۱۷. نامساوی **کوشی شوارتز** [۱۵] به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

تعریف ۱.۲.۱۸. ماتریس A را **معین مثبت** می‌نامیم هرگاه برای هر بردار غیرصفر $\varepsilon\in\mathbb{R}^d$، رابطه زیر برقرار باشد:

$$\varepsilon A\varepsilon>0.$$

تعریف ۱.۲.۱۹. ماتریس A را **به‌طور یکنواخت معین مثبت** می‌نامیم هرگاه ثابت‌های v_1 و v_2 به‌گونه‌ای که $0<v_1<v_2$، موجود باشند به‌قسمی که رابطه

$$v_1|\varepsilon|^2 \leq \varepsilon\cdot A(x)\varepsilon \leq v_2|\varepsilon|^2, \quad \forall x\in\Omega,\ \forall\varepsilon\in\mathbb{R}^d,$$

برقرار باشد.

تعریف ۱.۲.۲۰. فرض می‌کنیم که $v^+=\lim_{s\to 0^+}v(t_n+s)$ و $v^-=\lim_{s\to 0^+}v(t_n-s)$ باشد. **پرش** [۱۶] در زمان t_n را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[v_n]=v_n^+-v_n^-.$$

تعریف ۱.۲.۲۱. به ازای $r>0$، مجموعه $s(a,r)=\{x:d(x,a)<r\}$ را یک گوی باز به مرکز a و شعاع r می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۲۲. نقطه $A \in a$ را یک **نقطه درونی** می‌نامیم در صورتی‌که گوی بازی مانند $s(a,r)$ بتوان یافت که جز A باشد. مجموعه A را **باز** می‌نامیم در صورتی‌که هر نقطه آن درونی باشد.

[۱۴] Lagrange Basis Functions

[۱۵] Cauchy- Schwarz

[۱۶] Jump

تعریف ۲۳.۲.۱. فرض کنید M یک فضای متریک و $A \subseteq M$ باشد. خانواده $\mathcal{H}$ از زیرمجموعه‌های M، یک **پوشش** A نامیده می‌شود در صورتی‌که $A \subseteq \cup_{B \subseteq \mathcal{H}} B$ باشد. پوششی که اعضایش باز باشند، پوشش **باز** نامیده می‌شود.

تعریف ۲۴.۲.۱. فرض می‌کنیم که M هموار باشد و $\{u_\alpha\}$ پوشش [۱۷] بازی از M باشد.
تابع **افراز واحد** [۱۸] با پوشش $\{u_\alpha\}$، مجموعه‌ای از توابع هموار $\{\rho_\alpha\}$ می‌باشد به‌قسمی که:

۱. برای هر α رابطه زیر برقرار باشد:
$$۰ \leq \rho_\alpha \leq ۱.$$

۲. برای هر α رابطه زیر برقرار باشد:
$$supp(\rho_\alpha) \leq u_\alpha.$$

۳. هر نقطه $k \in M$ یک همسایگی داشته باشد که $supp(\rho_\alpha)$ را برای تعداد متناهی α قطع کند.

۴. برای هر $k \in M$ رابطه زیر برقرار باشد:
$$\sum_\alpha \rho_\alpha(k) = ۱.$$

تعریف ۲۵.۲.۱. فرض می‌کنیم که $p \in [۱, +\infty]$ باشد. در این‌صورت $q \in [۱, +\infty]$ را با شرط
$$\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱,$$
در نظر می‌گیریم. می‌گوییم که دنباله $\{u_n(x)\}_{n=۱}^\infty \in L_p(\Omega)$ به $u(x) \in L_q(\Omega)$ **همگرایی ضعیف** دارد و می‌نویسیم:
$$u_n(x) \rightharpoonup u(x),$$
مشروط بر این‌که رابطه زیر برقرار باشد:
$$\int_\Omega u_n(x)v(x)\, dx \to \int_\Omega u(x)v(x)\, dx, \qquad \forall v \in L_q(\Omega).$$

تعریف ۲۶.۲.۱. می‌گوییم که دنباله $\{u_n(x)\}_{n=۱}^\infty \in L_p(\Omega)$ به $u(x) \in L_q(\Omega)$ **همگرایی قوی** دارد و می‌نویسیم:
$$u_n(x) \to u(x),$$
مشروط بر این‌که رابطه زیر برقرار باشد:
$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(x) - u(x)\| = ۰.$$

تعریف ۲۷.۲.۱. ماتریس مربعی A را **دوره‌ای** [۱۹] می‌نامیم هرگاه $A^{k+۱} = A$ باشد که k عددی صحیح و مثبت است. اگر k کمترین عدد صحیح باشد، آنگاه می‌گوییم ماتریس A دوره‌ای به اندازه k دارد.

---

[۱۷] Cover

[۱۸] Partition of Unity

[۱۹] Periodic

تعریف ۲۸.۲.۱. فرض می کنیم که y یک سلول واحد باشد. به توابع با دوره یک، **توابع یک‌دوره‌ای** گفته می‌شود. فضایی از توابع هموار $H^{1}(\mathbb{R}^d)$ که یک دوره‌ای هستند را به‌صورت $H^{1}_{per}(y)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۹.۲.۱. فضای H را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H = \left\{ u \in H^{1}_{per}(y) : \int_y u dy = 0 \right\}.$$

تعریف ۳۰.۲.۱. دوگان فضای H را با H^* نمایش می‌دهیم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H^* = \left\{ u \in \left(H^{1}_{per}(y)\right)^* ; \langle u, 1\rangle_{\left(H^{1}_{per}\right)^*, H^{1}_{per}} = 0 \right\}.$$

تعریف ۳۱.۲.۱. یک فرم دوخطی روی V را که معین مثبت و متقارن باشد، یک **ضرب داخلی** روی V می‌نامیم.

تعریف ۳۲.۲.۱. فضای V را به همراه ضرب داخلی تعریف شده روی آن، **فضای ضرب داخلی** می‌نامیم.

تعریف ۳۳.۲.۱. دنباله $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ را یک **دنباله کوشی** در V می‌نامیم، هرگاه رابطه

$$\|v_i - v_j\| \to 0,$$

برقرار باشد که در آن i و j به سمت بی‌نهایت میل می‌کنند.

تعریف ۳۴.۲.۱. اگر هر دنباله کوشی در فضای ضرب داخلی V همگرا باشد، آنگاه فضای ضرب داخلی V، **کامل** [20] نامیده می‌شود.

تعریف ۳۵.۲.۱. اگر V یک فضای ضرب داخلی کامل باشد، آنرا **فضای هیلبرت** [21] می‌نامیم.

۳.۱ معادله پواسون

در این فصل فرمول‌بندی استاندارد معادله پواسون [22] را بیان می‌کنیم. در این پایان‌نامه، بیشتر معادله پواسون را بررسی می‌کنیم. برای مثال:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \Gamma, \end{cases} \tag{۱.۱}$$

که در آن f تابعی مفروض، Ω دامنه‌ای با مرز Γ و u جواب مجهول می‌باشد. مهمترین ویژگی این معادله این است که خارج از بخش‌های ناهموار از تابع بار [23] یعنی f، هموار می‌باشد. این مدل معادله در همه شاخه‌ها از علوم مهندسی مثل انتقال حرارت، مکانیک سازه و الکترومغناطیس ظاهر می‌شود.

[20] Complete

[21] Hilbert Space

[22] Poisson

[23] Load

۴.۱ روش عناصر متناهی

روش عناصر متناهی [۲۴] که در سال ۱۹۵۰ توسعه یافته بود، در سال ۱۹۶۰ برای محاسبه جواب‌های تقریبی معادلات دیفرانسیل جایگزین روش‌های تفاضل متناهی شد. در آغاز، این روش بیشتر برای مکانیک سازه مورد استفاده قرار می‌گرفت، ولی در ادامه به جنبه‌های ریاضی آن پرداخته شد. پایه ریاضی روش عناصر متناهی، ابزاری برای تحلیل برآورد خطا فراهم می‌کند که می‌تواند در بهبود جواب تقریبی مورد استفاده قرار گیرد.

۱.۴.۱ فرم ضعیف

اولین گام در فرمول‌بندی مساله به روش عناصر متناهی، تشکیل فرم ضعیف [۲۵] آن می‌باشد. به این منظور تابع آزمون [۲۶]

$$v \in V = \{v \in H^1(\Omega) : \ v = 0 \ on \ \Gamma\},$$

را در نظر گرفته، معادله (۱.۱) را در $v \in V$ ضرب کرده و روی Ω انتگرال‌گیری می‌کنیم و با استفاده از انتگرال جز به جز، فرم ضعیف به‌صورت زیر خوانده می‌شود:
$u \in V$ را به‌گونه‌ای پیدا کنید که رابطه

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega fv \, dx, \quad \forall v \in V, \tag{۲.۱}$$

برقرار باشد.
هدف روش عناصر متناهی این است که تقریبی از جواب معادله (۲.۱) را برای معادله (۱.۱) بدست آورد.
استفاده از فرم ضعیف و ابزارهایی از آنالیز تابعی [۲۷]، برآورد خطا را ممکن می‌سازد. فرض کنید که V_h فضای گسسته V شامل چندجمله‌ای‌های قطعه‌وار پیوسته [۲۸] تعریف شده روی مشی متشکل از عناصر $\mathcal{K} = \cup K$ با قطر h_k باشد.
روش عناصر متناهی به‌صورت زیر خوانده می‌شود:
$U \in V_h$ را به‌گونه‌ای بیابید که در رابطه

$$\int_\Omega \nabla U \cdot \nabla V \, dx = \int_\Omega fv \, dx, \quad \forall v \in V_h, \tag{۳.۱}$$

صدق کند.
از آن‌جا که $V_h \subset V$ ، U با u برابر نخواهد بود، اما امیدواریم که تقریب خوبی از آن باشد.

---
[۲۴] Finite Element Method
[۲۵] Weak Form
[۲۶] Test Function
[۲۷] Functional Analysis
[۲۸] Continuous Piecewise Polynomials

۲.۴.۱ برآورد خطا

دو رده برای برآورد خطای [۲۹] عناصر متناهی وجود دارد، یکی **پیشین** [۳۰] و دیگری **پسین** [۳۱].
برآورد خطای پیشین به جواب دقیق معادله یعنی u بستگی دارد. در این برآورد خطا، محاسبات و تحلیل خطا به شکل تئوری و پیش از انجام محاسبات صورت می‌گیرد.
برآورد خطای پسین وابسته به مانده است. در واقع این برآورد خطا پس از بدست آوردن جواب تقریبی یعنی U محاسبه می‌شود.
کران بالای خطا برای $e = u - U$ در برآورد پیشین به u و h و در برآورد پسین به U و h وابستگی دارد. در این پایان‌نامه، فقط برآورد پسین را در نظر می‌گیریم.
برآورد پسین معادله پواسون در بسیاری از کتاب‌ها یافت می‌شود، به [۳]، [۱۴] و [۱۲] مراجعه شود. برای مثال:

$$\|e\| \leq C\Big(\sum_{K\in\tau_h} R_K^{2}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

که در آن،

$$R_K = h_K^{2}\|\mathcal{A}u_h - f\|_K + h_K^{\frac{3}{2}}\|a[n\cdot\nabla u_h]\|_{\frac{\partial K}{\Gamma}},$$

که $\mathcal{A}$ عملگری دیفرانسیل می‌باشد. همچنین برای نمونه، برآوردی را در نیم نورم انرژی بیان می‌کنیم:

$$\|\nabla e\|^{2} \leq C\sum_{K\in\mathcal{K}} p_K^{2}, \tag{۴.۱}$$

که در آن،

$$p_K^{2} = h_K^{2}\|f + \Delta U\|_K^{2} + h_K\|[n\cdot\nabla u]\|_{\partial K}^{2},$$

که ∂K مرز K می‌باشد و $[n\cdot\nabla u]$ پرش سرتاسری مرز ∂K در مشتق نرمال n را مشخص می‌کند و C ثابت مستقل از h می‌باشد.

۳.۴.۱ الگوریتم‌های تطبیقی

الگوریتم تطبیقی فرآیندی تکراری است که مساله را به‌صورت مکرر و با تظریف [۳۲] فضای V_h حل می‌کند. برای پیاده‌سازی الگوریتم‌های تطبیقی، از خطای پسین استفاده می‌شود. برای مثال، اجرای الگوریتم تطبیقی برای معادله (۳.۱) با استفاده از (۴.۱) به‌شکل زیر صورت می‌گیرد:

۱. معادله (۳.۱) را روی مش اولیه حل می‌کنیم، (شکل سمت چپ (۱.۱) را ببینید).

۲. p_K را از معادله (۴.۱) محاسبه می‌کنیم.

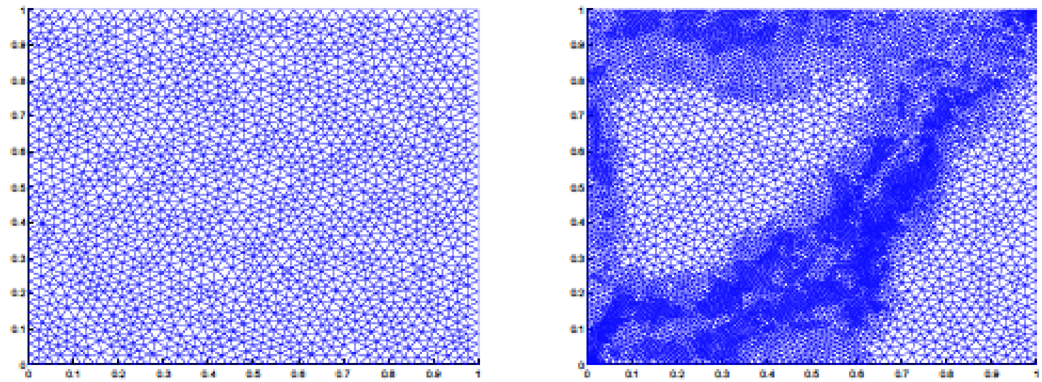
---

[۲۹] Error Estimation

[۳۰] A Priori

[۳۱] A Posteriori

[۳۲] Refine



شکل ۱.۱: شکل سمت چپ مش یکنواخت و شکل سمت راست مش تظریف‌شده به‌طور تطبیقی می‌باشد.

۳. اگر $\sum_{K\in\mathcal{K}} p_K^{۲}$ به اندازه کافی کوچک بود، متوقف می‌شویم و در غیر این‌صورت مش را بر اساس p_K تظریف می‌کنیم و به (۱) برمی‌گردیم.

نمونه‌ای از مش تطبیقی را در شکل سمت راست (۱.۱) مشاهده می‌کنید.

فصل ۲

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی

۱.۲ مقدمه

موضوع مورد بحث در این فصل، در مورد روش‌های چندمقیاسی روی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی بیضوی [۱] می‌باشد. ابتدا توضیحاتی مقدماتی را در مورد معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی بیضوی بیان می‌کنیم و سپس به معرفی مفهوم همگن‌سازی روی این معادلات می‌پردازیم.
همچنین معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی بیضوی همراه با مساله مقدار مرزی دیریکله را بررسی می‌کنیم.

۲.۲ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی بیضوی

مساله دیریکله (همگن)، به‌معنای پیدا کردن u می‌باشد که در واقع u تابع تعریف‌شده روی مجموعه باز $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ می‌باشد.

$$\begin{cases} -\nabla.(A(x)\nabla u) = f, & \forall x \in \Omega, \\ u(x) = ۰, & \forall x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{۱.۲}$$

که $A(x)$ یک ماتریس معین مثبت می‌باشد و همچنین داریم:

$$f = f\,(x) \in H^{-۱}(\Omega),$$

که $H^{-۱}$ فضای دوگان $H^۱_۰$ می‌باشد. فرض می‌کنیم که $y = \mathbb{T}^d$، یک چنبره واحد [۲] dبعدی باشد.
مساله دوره‌ای، پیدا کردن تابع یک‌دوره‌ای $u(y)$ می باشد، به‌قسمی که:

$$-\nabla_y.(A(y)\nabla_y u) = f(y), \tag{۲.۲}$$

[۱] Elliptic PDE
[۲] Unit Torus

که در آن $A(y)$، ماتریس معین مثبت دوره‌ای و $f \in H^*$ است که H^* دوگان H می‌باشد.
در تعریف زیر، گروهی از ضرایب $A(x)$ را در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۲.۲. فرض می‌کنیم که $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$، به‌قسمی که $0 < \alpha \leq \beta < \infty$.
$M(\alpha, \beta, \Omega)$ را به‌صورت مجموعه‌ای از ماتریس‌های $d \times d$ به‌نام $A \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{d\times d})$، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:
برای هر بردار $\varepsilon \in \mathbb{R}^d$ و هر $x \in \Omega$، داریم:

۱. $\langle \varepsilon, A(x)\varepsilon \rangle \geqslant \alpha|\varepsilon|^2$،

۲. $|A(x)\varepsilon| \leq \beta|\varepsilon|$.

به‌علاوه $M_{per}(\alpha, \beta, y)$، را به‌صورت مجموعه‌ای از ماتریس‌های موجود در $M(\alpha, \beta, y)$، با ضرایب yدوره‌ای تعریف می‌کنیم.
عملگرهای بیضوی در فرم زیر را بررسی می‌کنیم:

$$\mathcal{A} = -\nabla.(A\nabla) + b.\nabla + c. \tag{۳.۲}$$

عملگرهای بیضوی در اصل ماکزیمم به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\mathcal{A} = -A : \nabla\nabla + b.\nabla + c. \tag{۴.۲}$$

اگر$A \in M(\alpha, \beta, \Omega)$ باشد، آنگاه به عملگر $\mathcal{A}$ در (۳.۲) یا (۴.۲) به‌طور یکنواخت بیضوی گفته می‌شود. عملگرهای فرم (۳.۲) به فرم **واگرایی** [۳] و عملگرهای فرم (۴.۲) به فرم **غیرواگرایی** [۴] معروف هستند.

۱.۲.۲ مساله دیریکله برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی بیضوی

ابتدا تعریف دقیقی از جواب را بیان می‌کنیم. برای این منظور به معرفی فرم دو خطی نیازمندیم:

$$a[\phi, \psi] = \int_\Omega \nabla\psi^T(x)A(x)\nabla\phi(x)\, dx, \quad \forall\, \phi, \psi \in H_0^1(\Omega). \tag{۵.۲}$$

توجه داریم که:

$$a[\phi, \psi] = (A\nabla\phi, \nabla\psi).$$

برای ضرب داخلی استاندارد در $L^2(\Omega)$ از $(\cdot,\cdot)$ و برای جفت کردن [۵] بین $H_0^1(\Omega)$ و $H^{-1}(\Omega)$ از $\langle\cdot,\cdot\rangle$ استفاده می‌کنیم.
حال قضیه بسیارمهم **لکس میلگرام** [۶] را بیان می‌کنیم:

---

[۳] Divergence

[۴] Nondivergence

[۵] Pairing

[۶] Lax- Milgram

قضیه ۲.۲.۲ (لکس میلگرام). *اگر فرم دوخطی $a(\cdot,\cdot)$ در فضای هیلبرت V، کراندار و کورسیو باشد و L فرم خطی کرانداری در V باشد، آنگاه بردار یکتای $u \in V$ موجود است به‌گونه‌ای که:*

$$a(u, v) = L(u), \quad \forall v \in V. \tag{۶.۲}$$

برای دیدن اثبات این قضیه، به [۱۲] مراجعه شود.

تعریف ۳.۲.۲. $u \in H_\circ^1(\Omega)$، جواب ضعیف مساله مقدار مرزی (۱.۲) می‌باشد اگر رابطه

$$a[u, v] = \langle f, v\rangle_{H^{-1}, H_\circ^1}, \quad \forall v \in H_\circ^1(\Omega), \tag{۷.۲}$$

برقرار باشد.

به‌وسیله قضیه (۲.۲.۲)، می‌توان وجود و یکتایی کلاسی از ماتریس‌های $A(x)$ ارایه شده در تعریف (۱.۲.۲) را اثبات کرد.

نکته ۴.۲.۲. فرم ضعیف مساله (۱.۲) به‌صورت زیر است:

$u \in H_\circ^1(\Omega)$ را به‌گونه‌ای پیدا کنید که رابطه

$$a[u, v] = (f, v), \quad \forall v \in H_\circ^1(\Omega), \tag{۸.۲}$$

برقرار باشد.

قضیه ۵.۲.۲. *مساله دیریکله (۱.۲) همراه با $A \in M(\alpha, \beta, \Omega)$ و $f \in H^{-1}(\Omega)$، یک جواب ضعیف واحد $u \in H_\circ^1(\Omega)$ را دارد. به‌علاوه برآورد زیر را داریم:*

$$\|u\|_{H_\circ^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}, \tag{۹.۲}$$

برهان. ابتدا با خاصیت کورسیوی، شروع می‌کنیم. چون ماتریس A معین مثبت می‌باشد، داریم:

$$a[u, u] = \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla u\rangle \; dx \geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \alpha\|u\|^2_{H_\circ^1(\Omega)}, \tag{۱۰.۲}$$

اگر در معادله (۸.۲)، به‌جای v قرار دهیم u، آنگاه:

$$a[u, u] = \langle f, u\rangle, \tag{۱۱.۲}$$

از طرفی بنابه نامساوی کوشی شوارتز داریم:

$$a[u, u] = \langle f, u\rangle \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\|u\|_{H_\circ^1(\Omega)}, \tag{۱۲.۲}$$

با استفاده از روابط (۱۰.۲) و (۱۲.۲) داریم:

$$\alpha\|u\|^2_{H_\circ^1(\Omega)} \leq a[u, u] \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\|u\|_{H_\circ^1(\Omega)}.$$

در نهایت رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\alpha\|u\|_{H_\circ^1(\Omega)} \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \Rightarrow \|u\|_{H_\circ^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

□

اثبات این قضیه برگرفته از [۵] می‌باشد.