بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

مشخصه‌سازی جبری گروه‌های موضعاً فشرده

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی

فریبا شمسینی غیاثوند

استاد راهنما

رسول نصراصفهانی

۱۳۸۱

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی خانم فریبا شمسینی غیاثوند

تحت عنـــوان

مشخصه‌سازی جبری گروه‌های موضعاً فشرده

در تاریخ ۸۱/۱۲/۱۳ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ ـ استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر رسول نصر اصفهانی
۲ ـ استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر بیژن طائری
۳ ـ استاد داور ۱	دکتر علی رجالی
۴ ـ استاد داور ۲	دکتر فرید بهرامی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده — دکتر بیژن طائری

سپاس وقدردانی

پس از حمد و ثنای دانای هستی، خداوند یکتا، بر خود واجب می دانم که از اولین و بزرگترین معلمان معلمان زندگی‌ام، پدر و مادر عزیزم، که مرا به جان پروردند و امید رسیدن به افق های روشن را در دلم شکوفا ساختند از صمیم قلب تشکر و سپاسگزاری می نمایم

همچنین از زحمات کلیه اساتید گرانقدری که در تمام طول دوران تحصیل از محضرشان استفاده های فراوان برده ام تشکر و قدردانی می نمایم.

از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر نصر اصفهانی که در تمام مراحل انجام پایان نامه راهنما و مشوق من بودند، متشکر و سپاسگزارم.

از استاد مشاور محترمم جناب آقای دکتر طائری که در انجام این رساله از نظرات راهگشایشان استفاده نمودم قدردانی مینمایم.

از آقایان دکتر رجالی و دکتر بهرامی که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند کمال تشکر را دارم.

از دوستان عزیزم خانم ها ابدی، ابطحی، بذرافشان، جلیلی، خادملو، دشت بیاض، دشتی، رهسپار، ساریخانی، سرلک، سهیلی، سیف محدثی، کثیری، عسگری، علیزاده، مانی، منصوری، موسوی و نخعی به خاطر همدلیها و همیاریهای صمیمانه آنها در طول دوران تحصیلی کارشناسی ارشد تشکر و قدردانی می نمایم.

از سایر دوستان عزیزی که آشنائی و همراهیشان فرصتی تکرار نشدنی بود، صمیمانه سپاسگزارم و برای همه آنها آرزوی بهروزی و کامیابی دارم.

زندگي صحنه‌ي يکتاي هنرمندي ماست .

هرکسي نغمه‌ي خود خواند و از صحنه رود .

صحنه پيوسته به جاست .

خرم آن نغمه که مردم به سپارند به ياد .

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

فهرست مطالب

چکیده

فرض کنیم A و B دو جبر مختلط و $T : A \longrightarrow B$ یک نگاشت خطی باشد. گوییم T جداکننده است اگر برای هر $x, y \in A$، برابری $x\, y = 0$ نتیجه دهد $Tx\, Ty = 0$.

هدف پایان‌نامه‌ی حاضر، مشخصه سازی جبری گروه‌های موضعاً فشرده از راه مطالعه‌ی نگاشت‌های جداکننده بین جبرهایی از توابع تعریف شده روی آن‌ها می باشد.

ابتدا خواص کلی نگاشت‌های جداکننده بین جبرهای توابع پیوسته‌ی مختلط-مقدار روی فضاهای موضعاً فشرده‌ی حقیقی-فشرده و نیز نگاشت‌های محمل اختصاص یافته به آن‌ها را معرفی و بررسی می کنیم. با اثبات این که هر گروه موضعاً فشرده، حقیقی-فشرده است، مشخصه سازی‌هایی از گروه‌های آبلی موضعاً فشرده به دست می آوریم.

سپس به معرفی و بررسی خواص کلی نگاشت‌های جداکننده بین جبرهای پیچشی توابع پیوسته‌ی مختلط-مقدار با محمل فشرده روی فضاهای موضعاً فشرده و نیز نگاشت های وابسته به آن‌ها می پردازیم و با استفاده از آن، مشخصه سازی‌هایی برای گروه‌های موضعاً فشرده می یابیم. بدین منظور همریختی‌های شبه-پیچشی روی چنین جبرهایی را معرفی و بررسی می کنیم.

در پایان با معرفی و بررسی نگاشت‌های جداکننده بین جبرهای پیچشی و نیز جبرهای فوریه روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده، مشخصه سازی‌های جبری دیگری از گروه‌های آبلی موضعاً فشرده به دست می‌آوریم.

فصل اول

مقدمه

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و $C(X)$ جبر توابع پیوسته‌ی مختلط‌ـمقدار روی X مجهز به توپولوژی فشرده‌ـباز باشد. هم چنین فرض کنیم $C_b(X)$، $C_\circ(X)$ و $C_{\circ\circ}(X)$ به ترتیب زیر جبر های $C(X)$ متشکل از توابع پیوسته‌ی کراندار، توابع پیوسته‌ی صفر شونده در بی‌نهایت، و توابع پیوسته با محمل فشرده را نشان دهند.

در فصل سوم روابط توپولوژیک بین دو فضای کاملاً منظم و هاسدورف X و Y با استفاده از روابط جبری خاصی بین $C(X)$ و $C(Y)$ می‌یابیم. قبل از پرداختن به مطالب فصل مذکور، خلاصه‌ای از روند چنین مطالعاتی را بیان می‌کنیم. اولین نتیجه از این نوع، قضیه‌ی استون‌ـباناخ است. نتیجه‌ی دیگر این است که اگر یک یکریختی جبری T بین $C(X)$ و $C(Y)$ موجود باشد، آن گاه فشرده سازی‌های حقیقی X و Y همانریخت هستند؛ هم چنین در قضیه‌ی استون‌ـباناخ، T یک نگاشت ترکیبی وزن‌دار است؛ یعنی $Tf = w\ f \circ \tau$ که وزن w متعلق به $C(Y)$ و $\tau : Y \longrightarrow X$ یک نگاشت پیوسته است؛ در این جا، $|w| \equiv ۱$ هر گاه T یک طولپایی خطی و پوشا باشد و $w \equiv ۱$ هر گاه T یک یکریختی جبری باشد. در

این فصل، نگاشت‌هایی را در نظر می‌گیریم که رابطه‌ی جبری ضعیفتری را بین $C(X)$ و $C(Y)$، به نام جداکنندگی بررسی می کند. در واقع، نگاشت خطی $T : C(X) \longrightarrow C(Y)$ را جداکننده یا حافظ گسستگی نامیم هر گاه برای هر $f, g \in C(X)$، $f\,g \equiv \circ$ نتیجه دهد $Tf\,Tg \equiv \circ$.

همریختی‌های جبری، همریختی‌های مشبک، طولپایی‌های پوشا و عملگرهای ترکیبی وزندار، نگاشت‌های جداکننده هستند. نگاشت‌های حافظ گسستگی، اولین بار بین شبکه‌های برداری عمومی، توسط چند نویسنده درنظر گرفته شدند. برای مثال مراجع [۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ٦] را ببینید.

مطالعه‌ی عملگرهای حافظ گسستگی در زمینه‌ی $C(K)$ـمدول‌ها را می‌توان در [۷] دید. نگاشت‌های حافظ گسستگی بعداً در [۸] برای فضاهای توابع پیوسته‌ی حقیقی یا مختلط‌ـمقدار روی فضاهای هاسدورف فشرده با نام نگاشت‌های جداکننده در نظر گرفته شدند. هدف اصلی این دو مقاله و نیز مقالات [۹, ۱۰, ۱۱] آن است که نتایج پیوستگی خودکار را برای نگاشت‌های جداکننده، در حالتی که X و Y فشرده، حقیقی‌ـفشرده، موضعاً فشرده یا گروه آبلی موضعاً فشرده هستند، ثابت کنند. در نتیجه، روابط توپولوژیک خاصی بین فضاهای زمینه به دست می‌آید و نمایش‌هایی از نوع ترکیبی وزن‌دار برای نگاشت‌های جداکننده نتیجه می‌شود. هم چنین تحت فرض‌هایی روی پیوستگی T، نمایش‌های مشابهی، برای مثال در مقالات [۱, ۳, ۱۲]، به دست آمده است.

یادآوری این نکته مهم است که یک نگاشت جداکننده، لزوماً پیوسته نیست. در واقع، یاروز در [۱۱] ثابت کرد که اگر دو فضای فشرده‌ی X (نامتناهی) و Y مفروض باشند، آن گاه همواره یک نگاشت جداکننده‌ی غیر پیوسته از $C(X)$ به روی $C(Y)$ وجود دارد.

در بخش اول فصل سوم ثابت می کنیم که نگاشت‌های جداکننده‌ی حافظ توابع غیرصفرشونده و نگاشت‌های جداکننده‌ی دوسویی که در شرط $T(C_{\circ\circ}(X)) \subseteq C_b(Y)$ صدق می‌کنند پیوسته‌اند و به صورت یک نگاشت ترکیبی وزندار نوشته می‌شوند.

هم چنین اثر نگاشت‌های جداکننده‌ای را که یک به یک، پوشا یا دوسویی هستند بر روی فضاهای زمینه‌ی X و Y مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در بخش دوم فصل سوم، نتایج بخش اول فصل سوم را برای ارایه‌ی مشخصه سازی جبری گروه‌های آبلی موضعاً فشرده به کار می‌بریم که مشابه مشخصه سازی جبری گروه‌های آبلی فشرده در مرجع [۱۳] می‌باشد.

در فصل چهارم، گروههای موضعاً فشرده (نه لزوماً آبلی) G را برای دست یابی به یک مشخصه‌سازی جبری از آن‌ها در نظر می‌گیریم. بدین منظور، $C_{\circ\circ}(G)$ را به عنوان یک جبر هم تحت

ضرب نقطه‌ای و هم تحت ضرب پیچشی توابع در نظر می گیریم، و نگاشت‌های جداکننده روی آن‌ها را بررسی می کنیم. نشان می دهیم که نگاشت‌های خطی دوسویی مثبت دوطرفه و طولپای، جداکننده‌اند که در حالت خاص، نتیجه‌ای از ادوارد در [۹] را بهبود می‌بخشد.

در پایان فصل چهارم، اثر نگاشت‌های ترکیبی وزن‌دار پوشا یا یک‌به‌یک را روی فضای زمینه بررسی می‌کنیم.

در فصل پنجم، فرض می‌کنیم G و H گروه‌های آبلی موضعاً فشرده باشند و $\widehat{G}$ و $\widehat{H}$ به ترتیب دوگان گروهی متناظر به آن‌ها باشند. در این صورت $\widehat{G}$ و $\widehat{H}$ نیز گروه‌های آبلی موضعاً فشرده هستند. به علاوه فرض می کنیم $L^1(G)$ فضای کلیه‌ی توابع مختلط-مقدار روی G باشد که قدرمطلق آن‌ها برحسب اندازه‌ی هار چپ λ، انتگرال‌پذیر است. در این صورت $L^1(G)$ تحت ضرب پیچشی و نرم تعریف شده به صورت زیر یک جبر باناخ جابجایی است.

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int_G f(y)\, g(y^{-1}x)\, d\lambda(y) \quad (f,g\in L^1(G)),\\ \|f\|_1 &= \int_G |f(x)|\, d\lambda(x) \quad (f\in L^1(G)).\end{aligned}$$

برای هر $f\in L^1(G)$ و $\chi\in\widehat{G}$، تابع $\widehat{f}$ با تعریف

$$\widehat{f}(\chi)=\int_G f(x)\,\chi(x^{-1})\,dx$$

را تبدیل فوریه‌ی متناظر به f می‌نامیم و مجموعه‌ی کلیه‌ی توابع $\widehat{f}$ را با $A(\widehat{G})$ نمایش می‌دهیم. شایان ذکر است که $A(\widehat{G})$ یک زیرجبر جداکننده از $C_0(\widehat{G})$ است؛ یعنی برای هر $s,t\in\widehat{G}$، تابع $\widehat{f}\in A(\widehat{G})$ وجود دارد به طوری که $\widehat{f}(s)\neq 0$ و $\widehat{f}(t)=0$.

فرض کنیم $M(G)$ جبر باناخ متشکل از کلیه اندازه‌های مختلط برل منظم روی G باشد. برای هر $\mu\in M(G)$ و $\chi\in\widehat{G}$، تابع $\widehat{\mu}$ با تعریف

$$\widehat{\mu}(\chi)=\int_G \chi(x^{-1})\,d\mu(x)$$

را تبدیل فوریه-اشتیلیس متناظر به μ می‌نامیم. مجموعه‌ی کلیه توابع $\widehat{\mu}$ را با $B(\widehat{G})$ نمایش می‌دهیم.

یکریختی‌های جبری $T: L^1(G)\longrightarrow L^1(H)$ به صورت‌های مختلفی مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته‌اند. از جمله برلینگ و هلسون نشان داده‌اند که اگر $\widehat{H}$ همبند باشد و یک یکریختی جبری از $L^1(G)$ به $L^1(H)$ موجود باشد، آن گاه G و H یکریخت توپولوژیک هستند.

درفصل پنجم، نوع دیگری از یکریختی‌های خطی را بین جبرهای گروهی مطالعه می‌کنیم که مفهوم یکریختی جبری را تعمیم می‌دهند. در واقع نگاشت خطی $T : L^1(G) \longrightarrow L^1(H)$ را جداکننده می‌نامیم هر گاه برای هر $f, g \in L^1(G)$، $f * g \equiv 0$ نتیجه دهد $Tf * Tg \equiv 0$. متناظر با $T : L^1(G) \longrightarrow L^1(H)$ نگاشت خطی $\widehat{T} : A(\widehat{G}) \longrightarrow A(\widehat{H})$ با تعریف $\widehat{T}(\widehat{f}) = \widehat{T(f)}$ (تبدیل فوریه متناظر به Tf) وجود دارد. توجه کنیم که T جداکننده است اگر و تنها اگر $\widehat{T}$ جداکننده باشد؛ یعنی $\widehat{f}\,\widehat{g} \equiv 0$ نتیجه دهد $\widehat{T}(\widehat{f})\,\widehat{T}(\widehat{g}) \equiv 0$.

در ادامه‌ی این فصل نشان می‌دهیم که یک دوسویی جداکننده‌ی $T : L^1(G) \longrightarrow L^1(H)$، همواره نسبت به توپولوژی حاصل از نرم، در $L^1(G)$ پیوسته است و از آن نتیجه می‌گیریم که $\widehat{G}$ و $\widehat{H}$ همانریخت هستند. به علاوه نشان می‌دهیم که اگر نگاشت جداکننده‌ی T دوسویی باشد، آن گاه T را می‌توان به صورت ترکیبی از یک یکریختی جبری $T_1 : L^1(G) \longrightarrow L^1(H)$ و یک ضربگر $T_2 : L^1(H) \longrightarrow L^1(H)$ نوشت. هم چنین ثابت می‌کنیم که T را می‌توان به یک نگاشت جداکننده‌ی دوسویی $\bar{T} : M(G) \longrightarrow M(H)$ به‌طور یکتا گسترش داد.

در پایان، از این نتایج برای یافتن مشخصه سازهایی از گروه‌های آبلی موضعاً فشرده استفاده می‌کنیم.

فصل دوم

پیشنیازها

فصل حاضر که شامل دو بخش است به مفاهیم و نتایج مورد نیاز در فصل‌های بعد اختصاص یافته است. برای جزییات بیشتر و نیز اثبات نتایج بیان شده می توان به منابع [۱۴, ۱۵, ۱٦, ۱۷, ۱۸, ۱۹]، مراجعه کرد.

در بخش اول، برخی از مفاهیم و نتایج مربوط به جبرهای باناخ، جبرهایی ازتوابع پیوسته، فضاهای حقیقی-فشرده، و فضاهای اندازه را ارایه می کنیم.

در بخش دوم، گروه‌های موضعاً فشرده، جبرهای پیچشی گروهی و جبرهای اندازه‌ی آن را معرفی می کنیم و درادامه به بررسی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده، دوگان آن‌ها و تبدیلات فوریه می پردازیم.

۲—۱ برخی مفاهیم توپولوژیک

دراین بخش مفاهیم و نتایج مورد نیاز برای فصل‌های بعدی آورده می‌شود. در ابتدا به معرفی

مفاهیم مقدماتی جبرهای باناخ و مثال‌هایی از آن‌ها می‌پردازیم، سپس برخی مفاهیم و نتایج توپولوژیک خصوصاً در مورد فضاهای حقیقی‌ـفشرده را بیان می‌کنیم.

در پایان، فضای باناخ اندازه‌های مختلط برل منظم روی فضاهای موضعاً فشرده را معرفی می‌کنیم. برای جزییات بیشتر پیرامون مطالب مطرح شده و نیز اثبات قضایا به مراجع [۱۴, ۱۵, ۱٦, ۱۷, ۱۹]، مراجعه نمایید.

(۲ــ۱ــ۱) تعریف. منظور از یک جبر مختلط یا به طور ساده یک جبر، یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$، میدان اعداد مختلط، همراه با یک عمل ضرب $(x,y) \mapsto x\,y$ از $A \times A$ به A است به طوری که برای هر $x,y,z \in A$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

(الف) $(x\,y)z = x(y\,z)$؛

(ب) $x(y+z) = x\,y + x\,z$؛

(ج) $(x+y)z = x\,z + y\,z$؛

(د) $(\alpha x)y = \alpha(x\,y) = x(\alpha\,y)$.

زیرمجموعه‌ی B از جبر A را زیرجبر A می نامند، اگر نسبت به عمل‌های A بسته باشد؛ یعنی با عمل‌های A یک جبر تشکیل دهد.

عنصر u از جبر A را عنصر همانی A می نامند، اگر $x\,u = u\,x = x$ برای هر $x \in A$.

زیرمجموعه‌ی I از جبر A را یک ایده‌آل در A می‌نامند، اگر $x\,y, y\,x \in I$ برای هر $x \in A$ و $y \in I$.

جبر A را جابه‌جایی می نامند، اگر $x\,y = y\,x$ برای هر $x, y \in A$.

جبر A را نرم دار می نامند، اگر به عنوان یک فضای برداری، نرم دار باشد و به علاوه $\|x\,y\| \le \|x\|\,\|y\|$ برای هر $x,y \in A$. در این حالت $d(x,y) = \|x-y\|$ یک متریک d روی A تعریف می‌کند که عمل‌های جمع برداری ، ضرب اسکالری و ضرب برداری روی A نسبت به توپولوژی متریک حاصل از d (که به توپولوژی نرم معروف است) پیوسته‌اند.

جبر نرم دار A را جبر باناخ می‌نامند اگر به عنوان یک فضای برداری نرم دار باناخ باشد؛ یعنی (A,d) یک فضای متریک کامل باشد.

(۲ــ۱ــ۲) مثال. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد.

(۱) $C(X)$ مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته‌ی مختلط‌ـمقدار روی X را نشان دهد. در این صورت