دانشگاه سمنان

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی (گرایش آنالیزعددی)

یک روش عددی برای مسائل مقدار مرزی دونقطه ای برای معادلات دیفرانسیل معمولی

توسط:
هنگامه درویش متولی

استاد راهنما:
دکتر باقر کرامتی

استاد مشاور:
دکترمحمد رضا صافی

دی ۱۳۹۱

سپاسگزاری

پروردگارا! ای هستی بخش وجود، مرا بر نعمات بی‌کرانت توان شکر نیست، ذره ذره وجودم برای تو و نزدیک شدن به تو می‌تپد. الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم، نه نردبانی برای فزونی تکبر و غرور، نه حلقه‌ای برای اسارت و نه دست مایه‌ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران.

اکنون که به لطف پروردگار بزرگ موفق به اتمام این مقطع از تحصیل گشته‌ام لازم می‌دانم از کسانی که در این مسیر مرا راهنمایی نموده‌اند، تشکر نمایم.

بر خود واجب می‌دانم مراتب سپاس و قدردانی عمیق قلبی خود را به خدمت استاد فرزانه و گرانقدرم جناب آقای دکتر باقر کرامتی که در طول دوران تحصیل و ارائه پایان‌نامه از چشمه جوشان دانش و اخلاق والایشان به قدر ظرفیت محدود خویش بهره مند گشته‌ام ابراز نمایم.

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر محمدرضا صافی که مشاوره این پایان‌نامه را بر عهده داشتند کمال تشکر را دارم.

از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر نوری و جناب آقای دکتر دمیرچی که در مقام داور زحمت مطالعه پایان‌نامه را بر عهده داشتند قدردانی می‌نمایم.

از زحمات خانواده عزیزم که سربلندی امروزم را مدیون زحمات دیروز آن‌ها می‌دانم، سپاسگزارم.

چکیده

در این پایان نامه مسائل مقدار مرزی برای معادلات دیفرانسیل معمولی به طور مختصر بیان و به دو دسته خطی و غیر خطی تقسیم بندی شده، که رفتار این نوع مسائل برای وجود و عدم وجود جواب مورد بررسی قرار گرفته است. هم چنین یک رویکرد عددی برای حل مسائل مقدار مرزی دو نقطه ای از نوع خطی و غیر خطی آن ارائه شده است، که با توجه به اعمال روشهای شبه نیوتن برای حل دستگاه معادلات غیرخطی و روش تفاضل محدود برای حل مسائل مقدار مرزی دو نقطه ای ترکیبی با شرایط مرزی خطی استفاده شده است.

واژه های کلیدی:

مسائل مقدار مرزی غیرخطی ، روش تفاضل محدود ، توابع گرین ، روش نیوتن .

فهرست مطالب

فهرست جدول ها

فهرست شکل ها

پیشگفتار

نظریه معادلات دیفرانسیل نزدیک به ۳۰۰ سال است که رشد و تکامل یافته است و به مثابه ابزاری قوی برای حل مسائل گوناگون در ریاضیات، فیزیک، مهندسی شیمی و حتی در رشته های علوم انسانی چون اقتصاد و مدیریت به کار می رود. تاریخ ریاضیات نشان می دهد، به دلیل محدودیت های روش های تحلیلی، حل عددی مسا ئل ریاضی از دیر باز موردتوجه بوده است و بر حسب ضرورت و نیاز روش های متنوعی ارائه شده است. از جمله ی این روش ها می توان به روش های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل اشاره کرد. در ریاضیات محض تلاش زیادی صرف تجزیه و تحلیل معادلات دیفرانسیل ویادگیری فنون و روش های تحلیلی برای به دست آوردن جواب آنها می شود. نشان داده می شود که دسته خاصی از معادلات را می توان با روش های تحلیلی حل کرد، اما معادلات دیفرانسیل زیادی وجود دارند که نمی توان با روش های تحلیلی موجود، جواب آنها را به دست آورد. از این رو از روش های عددی برای به دست آوردن تقریبی از جواب استفاده می شود.

این پایان نامه مشتمل بر سه فصل می باشد .

در فصل اول تعاریف و مفاهیم مقدماتی مسائل مقدار اولیه در معادلات دیفرانسیل معمولی و چند روش برای حل این نوع مسائل آورده شده است .

در فصل دوم مسائل مقدار مرزی به دو دسته خطی و غیر خطی تقسیم و تشریح شده، همچنین چند روش تکراری برای برآورد تقریبی جواب در آن بیان شده است.

در فصل سوم در بخش های متفاوت به بررسی موارد زیر پرداخته شده است:

برخی از نتایج همگرایی روش تفاضل محدود آورده شده است، هم چنین یک روش عددی برای حل مسائل مقدار مرزی با شرایط مرزی خطی و غیر خطی پیشنهاد و در انتها برخی از کاربردهای مهم این روشها آورده شده است.

فصل ۱

مسائل مقدار اولیه در معادلات دیفرانسیل معمولی

۱.۱ مقدمه

نظریه معادلات دیفرانسیل از مباحث مهم در ریاضی است و بسیاری از مسائل کاربردی در علوم مختلف در قالب معادلات دیفرانسیل قرار می گیرند. به طورکلی معادلات دیفرانسیل به دو دسته معمولی و جزئی تقسیم می گردند که در این پایان نامه به نوع معمولی آن اشاره شده است.

تعریف ۱.۱. معادله دیفرانسیلی که شامل تنها یک متغیر مستقل باشد، معادله دیفرانسیل معمولی نامیده می شود.

فرم کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n بر حسب تابع y به صورت زیر می باشد:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

تعریف ۲.۱. معادله دیفرانسیلی که متغیر وابسته و مشتقات آن تنها با درجه یک ظاهر شوند، یک معادله دیفرانسیل خطی نامیده می شوند در غیر این صورت معادله دیفرانسیل غیر خطی است.

فرم کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n خطی به صورت زیر می باشد:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x)$$

در معادله خطی فوق اگر $h(x) \equiv 0$ آن گاه معادله را همگن می نامیم .

در معادلات دیفرانسیل معمولی به طور کلی دو نوع از مسائل مورد بررسی قرار می گیرند: مسائل با مقدار اولیه که روشهای استاندارد زیادی برای حل آنها وجود دارد و دیگری مسائل مقدار مرزی است. در این فصل مسائل مقدار اولیه و روشهای عددی برای حل این نوع مسائل را مورد بحث قرار می دهیم و در فصل بعد به مسائل مقدار مرزی می پردازیم:

۲.۱ نظریه مقدماتی مسائل مقدار اولیه

برای بحث در مسائل مقدار اولیه به چند تعریف و نتایجی از نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی نیاز داریم:

قضیه ۱.۲.۱. قضیه تیلور[۱] : فرض کنید تابع f دارای n مشتق پیوسته روی یک بازه باز شامل نقطه a باشد و مشتق مرتبه $(n+۱)$ ام آن نیز در بازه ای شامل نقطه a تعریف شده باشد، آنگاه برای هر x متعلق به این بازه داریم:

$$f(x)=[\sum_{k=۰}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k]+R_{n+۱}(x)$$

که در آن

$$R_{n+۱}(x)=\frac{f^{(n+۱)}(c)}{(n+۱)!}(x-a)^{n+۱}$$

و c مقداری بین a و x است.

خطای $R_{n+۱}(x)$ در سال ۱۷۹۷ توسط جوزف لاگرانژ[۲] بدست آمده است که فرمول لاگرانژ برای باقیمانده نامیده می شود.

سری نامتناهی

$$\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

همگرا به f است اگر و تنها اگر $\lim_{n\longrightarrow\infty}R_n(x)=۰$.

[۱] Taylor

[۲] Joseph Lagrange

تعریف ۳.۱. تابع $f(x,y)$ شرط لیپشیتز[۳] را نسبت به متغیر y روی $D \subset \mathbb{R}^۲$ با عدد ثابت $L > ۰$ برقرار می نماید اگر

$$\forall (x, y_۱), (x, y_۲) \in D \Longrightarrow |f(x, y_۱) - f(x, y_۲)| \leq L|y_۱ - y_۲| \qquad (۱.۱)$$

که در آن L را ثابت لیپشیتز می نامند[۲۱].

تعریف ۴.۱. مجموعه $D \subset \mathbb{R}^n$ را محدب گویند هرگاه اگر نقاط $X_۱$ و $X_۲$ متعلق به D باشند، آنگاه نقطه $((۱ - \lambda)X_۱ + \lambda X_۲)$ برای هر $۰ \leq \lambda \leq ۱$ متعلق به D باشد [۲۴].

تعریف ۵.۱. تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را محدب گوییم، اگر دامنه f مجموعه محدب باشد و برای هر $X_۱$ و $X_۲$ متعلق به دامنه f و $۰ \leq \lambda \leq ۱$ داشته باشیم [۲۴]:

$$f(\lambda X_۱ + (۱ - \lambda)X_۲) \leq \lambda f(X_۱) + (۱ - \lambda) f(X_۲)$$

معنی هندسی این نامساوی این است که پاره خطی که هر دو نقطه $(X_۱, f(X_۱))$ و $(X_۲, f(X_۲))$ را به یکدیگر متصل می کند، بالای منحنی f قرار گیرد.

قضیه ۲.۲.۱. فرض کنید $f(x,y)$ روی یک مجموعه محدب $D \subset \mathbb{R}^۲$ تعریف شده باشد اگر عدد $L > ۰$ با خاصیت $|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}| \leq L$ ، $\forall (x,y) \in D$، وجود داشته باشد، آنگاه f در شرط لیپشیتز نسبت به y روی D با ثابت لیپشیتز L صدق می کند [۲۱].

قضیه (۲.۲.۱) تنها شرایط کافی برای برقراری شرط لیپشیتز را ارائه می دهد. قضیه زیر یکی از قضایای اساسی وجود و یکتایی برای معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول است.

قضیه ۳.۲.۱. فرض کنید $D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$ و $f(x,y)$ روی D پیوسته باشد،

[۳] Lipschitz

اگر f شرط لیپشیتز را روی D نسبت به متغیر y برقرار نماید، آنگاه مسئله با مقدار اولیه

$$y^{'} = f(x,y) \qquad y(a)=\beta \qquad a \leq x \leq b$$

دارای جواب یکتائی مانند $y(x)$ در $a \leq x \leq b$ است [۲۴].

تعریف ۶.۱. مسئله مقدار اولیه

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y), \qquad a \leq t \leq b \\ y(a) = \alpha, \end{cases} \tag{۲.۱}$$

را یک مسئله خوش وضع گوییم اگر:

(۱) جواب منحصر به فردی مثل $y(t)$ برای این مسئله وجود داشته باشد،

(۲) برای هر $\varepsilon > ۰$، هر گاه $|\varepsilon_۰| < \varepsilon$ و به ازای هر $a \leq t \leq b$، $|\delta(t)| < \varepsilon$، مسئله مقدار اولیه

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = f(t,z) + \delta(t), \qquad a \leq t \leq b \\ z(a) = \alpha + \varepsilon_۰, \end{cases} \tag{۳.۱}$$

جواب منحصر به فرد $z(t)$ را داشته باشد،

(۳) ثابتی مانند $k > ۰$ با این خاصیت وجود داشته باشد که

$$\forall t \in [a,b] : \qquad |z(t) - y(t)| < k\varepsilon.$$

مسئله (۳.۱) را اغلب یک مسئله آشوب یا مختل شده وابسته به مسئله اصلی (۲.۱) می نامند. قضیه زیر شرایطی را بیان می کند که خوش وضع بودن یک مسئله مقدار اولیه را نشان می دهد.

قضیه ۴.۲.۱. فرض کنیم $D = \{(t,y) \mid a \leq t \leq b \ , \ c \leq y \leq d\}$. مسئله مقدار اولیه

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y), \qquad a \leq t \leq b \\ y(a) = \alpha, \end{cases}$$

خوش وضع است اگر f پیوسته و نسبت به متغیر y بر مجموعه D در شرط لیپشیتز صدق کند [۲۴].

تعریف ۷.۱. فرض کنید y_1 و y_2 و ... و y_n توابعی بر $I \subseteq \mathbb{R}$ باشند. منظور از رونسکین[۴] این توابع، دترمینانی به صورت زیر است [۲۳]:

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

قضیه ۵.۲.۱. فرض کنید توابع $y_1(t)$ و $y_2(t)$ و ... و $y_n(t)$ روی بازه I جوابهای معادله $L(y) = 0$ باشند، که در آن L یک عملگر دیفرانسیل خطی است، آنگاه $y_1(t)$ و $y_2(t)$ و ... و $y_n(t)$ وابسته خطی هستند اگر و تنها اگر رونسکین این توابع روی بازه I برابر با صفر باشد [۲۳].

۳.۱ روش های عددی

حال می توان به ارائه چند روش عددی برای حل مسائل مقدار اولیه پرداخت:

۱.۳.۱ روش تکرار پیکارد[۵]

معادلات دیفرانسیل بسیاری وجود دارند که نمی توان آنها را به وسیله یک روش استاندارد یا روشهای تحلیلی حل نمود. ولی می توان از روشهای عددی برای پیدا کردن جواب تقریبی این مسائل استفاده نمود. در زیر به بررسی یک روش تقریبی که به روش تکرار پیکارد موسوم است می پردازیم و جواب یک مسئله با شرایط اولیه به صورت

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (۴.۱)$$

[۴] Wronskian

[۵] Picard

را بطور تقریبی بدست می آوریم. فرض بر این است که (۴.۱) در فاصله ای شامل x_0 دارای یک جواب باشد. هم چنین فرض می کنیم تابع $y(x)$ پیوسته باشد. با انتگرالگیری از (۴.۱) داریم:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds \qquad (۵.۱)$$

برای مقادیر x نزدیک به x_0 ، مقادیر y در نزدیکی y_0 می باشد. بنابراین اولین تقریب y_1 از y با تعویض y با y_0 در سمت راست (۵.۱) بدست می آید.

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)ds \qquad (۶.۱)$$

و با جایگذاری y_1 به جای y_0 در سمت راست (۶.۱) دومین تقریب به صورت زیر خواهد بود:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))ds$$

با ادامه این عمل، $(m+1)$ امین تقریب $y_{m+1}(x)$ از $y_m(x)$ به صورت زیر بدست می آید:

$$y_{m+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_m(s))ds \qquad m = 0, 1, \ldots \qquad (۷.۱)$$

به این ترتیب یک دنباله از تقریبها بدست می آید که با شرایط خاصی به جواب معادله (۴.۱) همگرا خواهد شد. اگر دنباله $\{y_m(x)\}$ به تابع پیوسته $y(x)$ در بازه $J = [a, b]$ شامل x_0 همگرا باشد، آنگاه با حدگیری از طرفین (۷.۱) داریم [۱۱]:

$$y(x) = \lim_{m\to\infty} y_{m+1}(x) = y_0 + \lim_{m\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(s, y_m(s))ds = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$$

۲.۳.۱ روش اویلر[۶]

هدف این روش، تعیین تقریبی برای جواب مسئله مقدار اولیه خوش وضع [۲۴]

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y), & a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha, \end{cases} \tag{۸.۱}$$

است. در عمل، یک تقریب پیوسته به جواب $y(x)$ حاصل نمی شود. در عوض، تقریب هایی به y در نقاط متعدد بازه $[a,b]$ به نام نقاط شبکه ای، پدید می آیند. توزیع نقاط شبکه ای در طول بازه $[a,b]$ به طور یکسان می باشد، یعنی با فرض عدد صحیح مثبت N و نقاط $\{x_۰, x_۱, ..., x_N\}$ که در آن به ازای هر $i = ۰, ۱, ..., N$ ، $x_i = a + ih$ و $h = \dfrac{b-a}{N}$ اندازه گام شبکه است.

برای رسیدن به روش اویلر از قضیه تیلور استفاده می کنیم. فرض کنیم $y(x)$ جواب منحصر به فرد معادله (۸.۱) باشد که دو مشتق پیوسته بر $[a,b]$ دارد، بطوریکه به ازای هر $i = ۰, ۱, ..., N-۱$ نقطه ای چون ζ_i موجود است که $x_i < \zeta_i < x_{i+۱}$،

$$y(x_{i+۱}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^۲}{۲}y''(\zeta_i) \tag{۹.۱}$$

با جایگذاری $h = x_{i+۱} - x_i$ و $\theta_i = \dfrac{\zeta_i - x_i}{h}$ می توان (۹.۱) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$y(x_{i+۱}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^۲}{۲}y''(x_i + \theta_i h) \tag{۱۰.۱}$$

واضح است که در معادله (۱۰.۱) برای هر $i = ۰, ۱, ..., N-۱$، $۰ < \theta_i < ۱$ و چون $y(x)$ در (۸.۱) صدق می کند، داریم:

$$y(x_{i+۱}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^۲}{۲}y''(x_i + \theta_i h)$$

[۶] Euler

در نتیجه:

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = f(x_i, y(x_i)) + \frac{h}{2} y''(x_i + \theta_i h) \tag{۱۱.۱}$$

وقتی h به قدر کافی کوچک باشد، بنابر پیوستگی y''، جمله $\frac{h}{2} y''(x_i + \theta_i h)$ نیز کوچک بوده و

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} \approx f(x_i, y(x_i)) \tag{۱۲.۱}$$

برای هر $i = 1, 2, ..., N$ قرار می دهیم $w_i \approx y(x_i)$ و خواهیم داشت:

$$w_0 = \alpha \quad , \quad w_{i+1} = w_i + hf(x_i, w_i) \tag{۱۳.۱}$$

معادله (۱۳.۱) معادله تفاضلی روش اویلر نامیده می شود. با افزایش x_i خطا به تدریج افزایش می یابد، کنترل افزایش خطا، لازمه پایداری روش اویلر است. یک کران خطا در حالت کلی برای روش اویلر در قضیه زیر آورده شده است.

قضیه ۱.۳.۱. فرض کنید $y(x)$ جواب منحصر به فرد مسئله مقدار اولیه خوش وضع

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha, \end{cases} \tag{۱۴.۱}$$

بوده و $w_0, w_1, ..., w_N$ تقریبهای تولید شده توسط روش اویلر به ازای عدد صحیح مثبت N باشد. هر گاه f بر

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$$

در شرط لیپشیتز با ثابت L صدق کرده و ثابت M به ازای هر $x \in [a, b]$ وجود داشته باشد بطوریکه $|y''(x)| \leq M$، آنگاه به ازای هر $i = 0, 1, ..., N$،

$$|y(x_i) - w_i| \leq \frac{hM}{2L}[e^{L(x_i - a)} - 1] \tag{۱۵.۱}$$

اثبات. به [۲۴] مراجعه شود. □

در روشهای بکارگیری یک معادله تفاضلی جهت حل معادلات دیفرانسیل معمولی، نظیر روش اویلر، اولین سنجش مورد نیاز خطای برشی موضعی روش می باشد. این خطا موضعی نام دارد، چون مقدار دقت روش را در یک مرحله معین، به فرض دقیق بودن آن در مرحله قبل اندازه گیری می کند. این خطا به معادله دیفرانسیل تقریب شده، به اندازه گام و به مرحله خاص در تقریب نیز بستگی دارد. در روش اویلر، خطای برشی موضعی در مرحله i ام برای مسئله (۸.۱) به ازای هر $i = ۱, ۲, ..., N$ عبارت است از:

$$\tau_i = \frac{y_{i+۱} - y_i}{h} - f(x_i, y_i)$$

که در آن $y_i = y(x_i)$ مقدار دقیق جواب در x_i است. با در نظر گرفتن معادله (۱۱.۱) نتیجه می شود که به ازای θ_i ای که $۰ < \theta_i < ۱$،

$$\tau_i = \frac{h}{۲} y^{''}(x_i + \theta_i h)$$

اگر M کرانی برای $y^{''}(x)$ بر بازه $[a, b]$ باشد، در این صورت:

$$|\tau_i| \leq \frac{h}{۲} M$$

بنابراین خطای برشی در روش اویلر برابر $O(h)$ است.

تعریف ۸.۱. یک روش معادله تفاضلی با خطای برشی موضعی τ_i در مرحله iام را با معادله دیفرانسیلی که آن را تقریب می کند سازگار گوییم اگر

$$\lim_{h \longrightarrow ۰} \max_{۱ \leq i \leq N} |\tau_i| = ۰$$

تعریف ۹.۱. یک روش معادله تفاضلی را به معادله دیفرانسیلی که آن را تقریب می کند همگرا گوییم اگر

$$\lim_{h \longrightarrow ۰} \max_{۱ \leq i \leq N} |y_i - w_i| = ۰$$

که در آن $y_i = y(x_i)$ مقدار دقیق جواب معادله دیفرانسیل بوده و w_i تقریب حاصل از روش تفاضلی در مرحله i ام است.

۳.۳.۱ روشهای تیلور از مرتبه بالاتر

چون روش اویلر با استفاده از قضیه تیلور با $n = ۲$ برای تقریب جواب معادله دیفرانسیل بدست می آید، اولین سعی ما در بدست آوردن روشهایی با خواص همگرایی بهتر از روشهای تفاضلی، تعمیم این روش به مقادیر بزرگتر n می باشد[۲۴].

فرض کنیم جواب $y(x)$ از مسئله مقدار اولیه

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \qquad a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha, \end{cases} \tag{۱۶.۱}$$

دارای $(n+۱)$ مشتق پیوسته باشد و جواب $y(x)$ را برحسب چند جمله ای تیلور درجه n ام آن حول x_i بسط داده، به ازای θ_i ، $۰ < \theta_i < ۱$ خواهیم داشت:

$$y(x_{i+۱}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^۲}{۲}y''(x_i) + ... + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x_i) + \frac{h^{n+۱}}{(n+۱)!}y^{(n+۱)}(x_i + \theta_i h) \tag{۱۷.۱}$$

مشتق گیری متوالی از جواب، یعنی از $y(x)$، نتیجه می دهد که

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))\frac{dy}{dx} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))f(x,y(x)) \equiv f'(x,y(x)) \end{aligned}$$

$$y'''(x) = \frac{df'}{dx}(x,y(x)) \equiv f''(x,y(x))$$

و در حالت کلی

$$y^{(k)}(x) = \frac{dy^{(k-1)}}{dx} = \frac{df^{(k-2)}}{dx}(x, y(x)) \equiv f^{(k-1)}(x, y(x))$$

با جایگذاری این نتایج در معادله (۱۷.۱)، به ازای θ_i ای که $0 < \theta_i < 1$ معادله زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2} f'(x_i, y(x_i)) + ... \\ &+ \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(x_i, y(x_i)) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(x_i + \theta_i h, y(x_i + \theta_i h)) \end{aligned} \tag{۱۸.۱}$$

روش تفاضلی متناظر با معادله (۱۸.۱) با صرف نظر کردن از جمله باقیمانده شامل θ_i، روش تیلور مرتبه n نامیده می شود. به ازای هر $i = 0, 1, ..., N-1$،

$$w_0 = \alpha \quad , \quad w_{i+1} = w_i + hT^{(n)}(x_i, w_i) \tag{۱۹.۱}$$

که در آن

$$T^{(n)}(x_i, w_i) = f(x_i, w_i) + \frac{h}{2} f'(x_i, w_i) + ... + \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n-1)}(x_i, w_i)$$

با توجه به (۱۹.۱) می توان گفت روش اویلر همان روش تیلور مرتبه اول است.

اگر جواب معادله دیفرانسیل به قدر کافی خوشرفتار باشد، در این صورت روش تیلور مرتبه n دارای خطای برشی موضعی $O(h^n)$ است، این مطلب به سادگی ملاحظه می شود. با توجه به معادله (۱۸.۱)

$$\begin{aligned} y_{i+1} - y_i - hf(x_i, y_i) - \frac{h^2}{2} f'(x_i, y_i) - ... - \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(x_i, y_i) \\ = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(x_i + \theta_i h, y(x_i + \theta_i h)) \end{aligned}$$

در نتیجه خطای برشی موضعی در $(i+1)$ امین مرحله، به ازای هر $i = 0, 1, ..., N-1$، به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\tau_{i+1} &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - T^{(n)}(x_i, y_i) \\ &= \frac{h^n}{(n+1)!} f^{(n)}(x_i + \theta_i h, y(x_i + \theta_i h))\end{aligned}$$

اگر $y \in C^{n+1}[a,b]$ در نتیجه $y^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x, y(x))$ بر $[a,b]$ کراندار است، بنابراین به ازای هر $i = 1, 2, ..., N$، $\tau_i = O(h^n)$.

۴.۳.۱ روشهای رونگ - کوتا[۷]

روشهای تیلور دارای خطای برشی موضعی از مرتبه بالا هستند، همچنین لزوم محاسبه و ارزیابی مشتقهای $f(x,y)$ نقص آن است که در بسیاری از مسائل می تواند پیچیده و وقت گیر باشد، در نتیجه روشهای تیلور بندرت در عمل بکار می روند. روشهای رونگ - کوتا از خطای برشی موضعی مرتبه بالای روشهای تیلور استفاده می کند، در حالی که محاسبه و ارزیابی مشتقهای $f(x,y)$ را حذف می کند. قبل از ارائه روش، لازم است قضیه تیلور با دو متغیر را بیان کنیم[۲۴]:

قضیه ۲.۳.۱. فرض کنیم $f(x,y)$ و همه مشتقهای جزئی آن از مرتبه نابیشتر از $(n+1)$ بر

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

پیوسته باشد. همچنین، $(x_0, y_0) \in D$. به ازای هر $(x,y) \in D$، نقطه ای مانند $(\zeta, \eta) \in D$ وجود دارد بطوریکه

$$f(x,y) = p_n(x,y) + R_n(x,y)$$

[۷] Runge-Kutta