بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تفرش

دانشکده ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

حل معادلات انتگرال- دیفرانسیل با استفاده از توابع ترکیبی

استادان راهنما:

دکتر مهدی رمضانی

دکتر یداله اردوخانی

دانشجو:

اعظم کولیوند

دی ماه ۱۳۹۰

تقدیم به

مادر بزرگوارم،

مریم عزیزم

و

حامد مهربانم

پروردگارا...

آشکارا دیدمت و غریبانه عاشقت شدم

بخشنده پنداشتمت و گنهکار شدم

گرم دیدمت و در سردترین لحظه به سراغت آمدم

مرا چه دیدی که وفادار ماندی؟

سپاس‌گزاری...

خدای من، معبودم:
سپاس تو را که عطا کردی بدون چشم داشتی، گذشتی بدون پرده دری و نمایاندی راه رسیدن به کمال را هر چند که من قاصر و ناتوانم...

از خانواده عزیزم که با صبرو شکیبایی مرا در رسیدن به هدفم همراهی کردند سپاس فراوان دارم.

صمیمانه‌ترین سپاس‌گزاریم را تقدیم استادان راهنمای محترم، جناب آقای دکتر اردوخانی و آقای دکتر رمضانی می‌نمایم که بی‌شك همراهی و حمایت ایشان، تلاشم را در رسیدن به هدفی والا مقدور نمود.

اعظم کولیوند
دی ماه۱۳۹۰

چکیده

در این پایان نامه روش های عددی برای حل تقریبی چند رده از معادلات بر اساس بسط بر حسب پایه تیلر، هایبرید تیلر و هایبرید لژاندر ارائه می شود. معادلات مطرح شده معادلات انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل خطی فردهلم با شرایط اولیه و معادلات انتگرال-دیفرانسیل غیر خطی ولترا و ولترا-فردهلم با شرایط اولیه می باشند. در این روش ها، جواب تقریبی از معادله مورد نظر را به دو صورت محاسبه می کنیم.

نخست این که، جواب معادله مورد نظر را به صورت $y(x) = \sum_{n=0}^{N+m} \frac{1}{n!} \widetilde{Y}\ (x-c)^n$ تقریب می زنیم (که $\widetilde{Y}$ بردار ضرایب مجهول می باشد). با محاسبه بردار $\widetilde{Y}$ آن را به عنوان ضرایب تیلر در نظر گرفته و به جواب تقریبی از معادله مورد نظر می رسیم.

روش دیگر، پایه هایبرید تیلر می باشد. جواب معادله مورد نظر را به صورت $y(x) = Y^T\mathbf{b}(x)$ (که Y بردار ضرایب مجهول و $\mathbf{b}(x)$ بردار پایه هایبرید تیلر می باشد) تقریب می زنیم. ایده اصلی در پایه هایبرید استفاده از ماتریس عملیاتی انتگرال، ماتریس انتگرال گیری از حاصل ضرب دو بردار و ماتریس عملیاتی حاصل ضرب می باشند.

در این روش های عددی، معادله مورد نظر به یک معادله ماتریسی هم ارز با یک دستگاه از معادلات جبری که با بردار ضرایب مجهول پایه مطابقت دارد، تبدیل می کنیم. در انتها مثال های عددی ارائه می شود که کارایی و دقت روش ها را بیان می کند و نتایج حاصل از این پایه ها با دیگر روش ها مقایسه می شوند.

واژه های کلیدی: *توابع بلاک پالس، چند جمله ای های تیلر، توابع ترکیبی، معادلات انتگرال-دیفرانسیل*

فهرست مطالب

پیش گفتار

در سالهای اخیر شاهد رشد قابل توجهی در زمینه معادلات انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل هستیم. که شاخه ای از ریاضیات نوین است، و کاربرد های فراوانی در مهندسی، مکانیک، نظریه پتانسیل، الکترواستاتیک و ... دارد[۵ − ۱]. در علم ریاضیات روش های تحلیلی و عددی متعددی برای تعیین جواب رده های گوناگونی از معادلات وجود دارد. از آن جایی که حل این معادلات به صورت تحلیلی آسان نمی باشد، لذا غالبا از روش های عددی برای حل این معادلات استفاده می شود.
در سال های اخیر چند جمله ای های تیلر [۱] توجه بسیاری از محققین را به خود جلب نموده است. به طوری که ابتدا لیو [۲]و کنوال [۳] در سال (۱۹۸۹) با روش بسط تیلر حل تقریبی یک معادله انتگرال را ارائه کردند[۶]. سپس این روش توسط سزر [۴] گسترش یافت، و وی معادله انتگرال ولترا را با این روش حل کرد[۷]. در پی تلاش های خود حل تقریبی را برای یک معادله انتگرال-دیفرانسیل خطی از مرتبه ۲ را با روش چندجمله ای های تیلر ارائه کرد[۱]. در ادامه تلاش هایش، این بار برای معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا[۵]-فردهلم[۶] حل تقریبی ارائه کرد[۸]. وی با تمام تحقیقات صورت گرفته توانست معادله انتگرال-دیفرانسیل خطی ولترا-فردهلم از مرتبه بالا با ضرایب ثابت را حل کند[۱]. محمودی و مالک نژاد [۹] حل غیر خطی این نوع معادلات را ارائه کردند.
حل معادلات انتگرال ولترا-فردهلم نوع دوم با وجود تعدد روش های تحلیلی معمولا مشکل تر از معادلات دیفرانسیل می باشد. بنابراین محققین زیادی توانستند با استفاده از روش های تبدیلی متفاوت بر این مشکلات فایق آیند، به طوری که تقریب معادلات انتگرال با توابع متعامد رشد چشم گیری یافت.
موهان [۷] و داتا [۱۱] [۸] دستگاه ها را با توابع متعامد حل کردند. عبدی و ریحانی [۱۲] روش هار [۹] را برای

---

[۱] Taylor

[۲] Liu

[۳] Kanwal

[۴] Sezer

[۵] Volterra

[۶] Fredholm

[۷] Mohan

معادلات انتگرال ولترا و فردهلم ارائه دادند. بابلیان و ماسوری [۱۳] روش مستقیم را برای حل معادله انتگرال ولترای نوع اول با استفاده از ماتریس عملیاتی و توابع بلاک پالس مورد بررسی قرار دادند. حل عددی از معادلات انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل ولترا از نوع کانولوشن را با استفاده از ماتریس عملیاتی توابع متعامد قطعه ای ثابت توسط بابلیان و سلیمی [۱۴] ارائه شد.
هنگامی که تابع بلاک پالس [۱۰] با یکی از چند جمله ای ها ترکیب شود، یک تابع ترکیبی یا هایبرید آن را تولید می کند. در صورت ترکیب با چندجمله ای متعامد مانند لژاندر یک سیستم متعامد و در ترکیب با چندجمله ای نامتعامد مانند تیلر یک سیستم نامتعامد به دست می آید. هدف دیگری که در این پایان نامه دنبال می شود استفاده از توابع ترکیبی در حل چند رده از معادلات می باشد.
مالک نژاد و محمودی [۱۵] روش های عددی برای معادلات انتگرال فردهلم با توابع هایبرید تیلر و بلاک پالس را ارائه کردند. و در ادامه تلاش هایشان [۱۶] حل معادله انتگرال-دیفرانسیل خطی با روش های گالرکین [۱۱] را با توابع هایبرید ارائه کردند. هسیو [۱۲] [۱۰] روش توابع هایبرید را برای حل معادلات انتگرال ولترا و فردهلم نوع دوم مورد بررسی قرار داد. در سال ۲۰۱۱ حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل غیر خطی ولترا-فردهلم با هایبرید لژاندر [۱۳] توسط مالک نژاد و بصیرت [۱۷] مطرح شد.
ایده کاربرد توابع ترکیبی در تمام روش های عددی برای حل معادلات انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل استفاده از ماتریس عملیاتی انتگرال، ماتریس انتگرال گیری از حاصل ضرب دو بردار و ماتریس عملیاتی حاصل ضرب می باشد. برای دو پایه مدنظر به تفضیل در فصل سوم به آن پرداخته ایم.
بعد از ارائه روش های عددی برای حل تقریبی یک معادلات انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل با شرایط مرزی، بسته به نوع معادلات که خطی یا غیر خطی باشد، به ترتیب به یک دستگاه خطی یا غیر خطی می رسیم.
مطالعه خطا مطلبی اساسی در آنالیز عددی است. بیشتر روش های عددی جواب هایی به دست می دهند که فقط تقریبی از جواب درست مورد نظرند و درک و در صورت امکان، توانایی برآورد یا کراندار کردن خطای حاصل حائز اهمیت است. منابع خطا بسیار گسترده است. اما روی صحبت ما در مورد منابع خطا نیست.
با توجه به این که امروزه ارائه حل تقریبی برای معادلات رشد چشم گیری داشته است، اما همین حل تقریبی خود از جنبه خطا و دقت مورد توجه خاصی قرار دارد. و از میان تعدد راهها برای تقریب معادلات، تقریبی مطلوب تر است که علاوه بر محاسبات کمتر از دقت بیشتری هم برخوردار باشد[۱۸]. پایان نامه مشتمل بر ۴ فصل می‌باشد که عمده مطالب آن برگرفته از مقاله‌های مالک نژاد و محمودی [۹, ۱۷] و یالسین باس

[۸] Datta

[۹] Haar

[۱۰] Block-Pulse

[۱۱] Galerkin

[۱۲] Hsiao

[۱۳] Legendre

[۱۴] و سزر [۱] می‌باشد.

مروری بر فصل ها

• فصل اول شامل مفاهیم، تعاریف و قضایای مهم از آنالیز عددی و آنالیز حقیقی می باشد. که در فصل های بعدی مورد نیازند.

•فصل دوم شامل معرفی معادلات انتگرال خطی ولترا و فردهلم، معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا و فردهلم، معادلات انتگرال غیر خطی ولترا و فردهلم و معادلات انتگرال و معادلات انتگرال-دیفرانسیل آمیخته ولترا و فردهلم می باشد. ویژگی های هریک تا حدودی بیان می شود. هسته معادلات انتگرال از نظر جدایی پذیر بودن بررسی می شود. مطالبی درباره جواب این معادلات بیان می شود. برخی از روش های تحلیلی برای حل معادلات مورد بررسی قرار می گیرد.

•در فصل سوم به معرفی سیستم های متعامد و توابع ترکیبی می پردازیم. ابتدا توابع بلاک پالس و چند جمله ای های لژاندر را معرفی و ویژگی های آنها را بیان می کنیم. در ادامه فصل توابع ترکیبی را معرفی می کنیم. توابع ترکیبی مورد بررسی ما در این پایان نامه، یک پایه آن توابع بلاک پالس و پایه دیگر آن یک چند جمله ای می باشد، که توابع ترکیبی را هایبرید می نامیم. هایبرید لژاندر و هایبرید تیلر را بررسی می کنیم که به ترتیب نمونه هایی از یک سیستم های متعامد و نا متعامد است. برای سیستم های متعامد و توابع ترکیبی معرفی شده ماتریس عملیاتی انتگرال، ماتریس عملیاتی حاصل ضرب و انتگرال گیری از حاصل ضرب دو بردار را به دست می آوریم. و با ارائه مثال هایی درک سیستم های متعامد و توابع ترکیبی ملموس تر خواهد شد.

• در فصل چهارم، که فصل پایانی می باشد، در ابتدا روش های حل عددی چند رده از معادلات را با پایه تیلر و هایبرید تیلر مورد بررسی قرار می دهیم. نتایج مثال های عددی حل شده با هم مقایسه می شوند. و دقت روش ها را با ارائه جدول محاسبات و در برخی موارد با رسم نمودار مورد بررسی قرار می گیرند.

[۱۴] Yalcinbas

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل برخی تعاریف و قضایای مهم از آنالیز عددی [۱۸]و آنالیز حقیقی [۱۹, ۲۰]را بیان میکنیم که برای درک بهتر مفاهیم موجود در فصلهای بعدی مورد استفاده قرار میگیرد.

۱.۱ مفاهیم پایه در آنالیز حقیقی و آنالیز عددی

تعریف۱.۱.۱. یک فضای برداری (خطی) متشکل است از:

۱. یک میدان F از اسکالرها،

۲. یک گروه آبلی $(V,+)$ به نام بردارها،

۳. یک نگاشت $\sigma : F \times V \to V$ با ضابطه $\sigma(\alpha,x) = \alpha x$ به نام ضرب اسکالر که در اصول موضوعه زیر صدق می کند.

i. $\forall \alpha \in F, \forall x,y \in V;\ \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y,$

ii. $\forall \alpha,\beta \in F, \forall x \in V;\ (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x,$

iii. $\forall \alpha,\beta \in F, \forall x \in V;\ (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x),$

iv. $\forall x \in V;\ 1.x = x.$

در تعریف بالا V را یک فضای برداری روی میدان F می نامیم. عمل جمع در گروه آبلی $(V,+)$ را جمع برداری می نامیم. اگر $F = R$ آن گاه F را فضای برداری حقیقی و اگر $F = C$ آن گاه F را فضای برداری مختلط می گوییم.

مثال ۱.۱.۱.

۰۱ هر میدان یک فضای برداری روی خودش می باشد.

۰۲ مجموعه ماتریس های $m \times n$ روی میدان F یک فضای برداری روی میدان F هستند.

۰۳ فضای توابع چند جمله ای روی میدان F را که با نماد $F[x]$ نشان می دهیم، یک فضای برداری روی آن میدان تشکیل می دهند. فرض کنیم:

$$V = \left\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n | a_i \in F, 0 \leq i \leq n, n \in N\right\}. \qquad (1.1)$$

برای دو بردار $f(x), g(x)$ و $c \in F$. فرض کنید $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ و $m \geq n$. در این صورت تعریف می کنیم:

$$h(x) = f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i + \sum_{i=n+1}^{m} b_i x^i,$$
$$cf(x) = \sum_{i=0}^{n} c a_i x^i. \qquad (2.1)$$

با توجه به تعریف فضای برداری خطی، V تحت عمل جمع و ضرب تعریف شده یک فضای برداری روی F می باشد و با $F[x]$ یا $P[F]$ نمایش می دهیم. این موارد مثال هایی از فضای برداری هستند.

تعریف۲.۱.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان Fباشد، زیر مجموعه W از V را یک زیر فضای V می نامیم هر گاه W خودش با اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر روی V، یک فضای برداری روی F باشد.

تعریف۳.۱.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان Fباشد، $B \subseteq V$ را یک پایه برای Vگوییم هرگاه:

۱. مجموعه B مستقل خطی باشد.

۲. مجموعه B فضای V را تولید کند.

فضاهای برداری تعمیم فضای بردارهای صفحه و فضا می باشند. در واقع فضاهای برداری خواصی دارند که فضای بردارهای صفحه و فضا دارند.مثلا جمع بردارهای صفحه و فضا شرکت پذیر است، جمع در فضای برداری نیز چنین است. جمع بردارهایش دارای عضو بی اثر است و عمل جمع در این فضا دارای عضو بی اثر است. و بلاخره تمام خواص جمع بردارهای صفحه و فضا و ضرب اسکالر در بردار در فضاهای برداری نیز برقرارند. اما با مفاهیم پذیرفته شده در فضاهای برداری، مفاهیمی مانند فاصله دو نقطه یا طول دو بردار و زاویه بین آنها قابل بیان نمی باشد. به همین خاطر فضای دیگری را معرفی کنیم که فضای ضرب داخلی نام دارد. یکی از مواردی که در مسائل خطی مورد مطالعه قرار می گیرد،فضای ضرب داخلی است. فضای ضرب داخلی، فضایی است که، نرم را از طریق ضرب داخلی تعریف کرد، و با توجه به ویژگی تعامد، دو عضو را در هم ضرب کرد. ضرب داخلی همان ضرب اسکالر معمولی یا ضرب نقطه

ای در فضای $R^۲$ یا $R^۳$ است. در زیر به معرفی آن و ارایه مثال هایی می پردازیم.

تعریف۴.۱.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد $(F = R)$ و$\|\cdot\| : V \to R$ که در روابط زیر صدق کند را یک فضای برداری نرم دار می نامیم. به طوری که:

i. $\forall\, x \in V; x = ۰ \Leftrightarrow \|x\| = ۰, \quad \|x\| \geq ۰,$

ii. $\forall\, x \in V,\ \forall \alpha \in F;\ \|\alpha\, x\| = |\alpha|\ \|x\|,$

iii. $\forall\, x,\ y \in V;\ \|x + y\| \leq \|x\|\ \|y\|.$

مثال ۲.۱.۱ روی یک فضای برداری نرم های متعددی می توان تعریف کرد. در زیر چند مثال از نرم روی R^n را می آوریم.

i. $x = (x_۱, \cdots, x_n) \quad \|x\|_۱ = \sum_{i=۱}^{n} |x_i|,$

ii. $\|x\|_۲ = \left(\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^۲ \right)^{\frac{۱}{۲}},$

iii. $۱ \leq P < \infty \quad , \|x\|_P = \left(\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^P \right)^{\frac{۱}{P}},$

iv. $\|x\|_\infty = max\ \{|x_۱|,\ |x_۲|,\ \cdots, |x_n|\}.$

اگر V یک فضای نرم دار باشد و برای هر $x, y \in V$ داشته باشیم $d(x, y) = \|x - y\|$ آن گاه (V, d) را یک فضای متری القا شده به وسیله نرم گویند. بنابراین هر فضای نرم دار یک فضای متری است.

تعریف۵.۱.۱. دنباله $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ را در فضای برداری نرم دار Vهمگرا به x گوییم $(x_n \to x)$ هرگاه:

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = ۰ \tag{۳.۱}$$

تعریف۶.۱.۱. دنباله $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ را در فضای برداری نرم دار V دنباله کشی [1] گوییم، هرگاه:

$$\forall \epsilon > ۰,\ \exists N,\ \forall m, n, (m, n > N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon). \tag{۴.۱}$$

تعریف۷.۱.۱. فضای متری (V, d) را کامل گوییم هر گاه هر دنباله کشی در V همگرا باشد.

تعریف۸.۱.۱. فضای نرم دار را یک فضای باناخ [2] گوییم هر گاه فضای متری با متر متعارف (متری که به وسیله نرم القا می شود)، یک فضای متری کامل باشد.

[1] Cauchy

[2] Banach

تعریف۹.۱.۱. فرض کنیم X یک مجموعه غیر تهی باشد. خانواده M از زیر مجموعه های X را یک جبر گوییم هر گاه:

۰۱ اجتماع هر دو عضو M در M باشد (تحت عمل اجتماع بسته باشد)،

۰۲ متمم هر عضو M در M باشد.

تعریف۱۰.۱.۱. جبر M را یک σ-جبر گوییم هر گاه تحت اجتماع شمارا بسته باشد. یعنی اگر $\{m_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq M$ آن گاه $m = \bigcup_{i=1}^{\infty} m_i \in M$.

تعریف۱۱.۱.۱. اگر X یک مجموعه غیر خالی باشد و M یک σ-جبر روی X باشد، زوج (X, M) را یک فضای اندازه پذیر گوییم.

تعریف۱۲.۱.۱. فرض کنیم $0 < p < \infty$ ، در این صورت مجموعه تمام توابع اندازه پذیری مانند f که $|f(t)|^p$ انتگرال پذیر باشد، را فضای $L^p(X)$ گوییم. به عبارت دیگر:

$$L^p(X) = \left\{ f | f : X \to C, \int_X |f(t)|^p dt \ < \infty \right\}. \tag{۵.۱}$$

به آسانی می توان نشان داد که L^p یک فضای برداری است. به ازای هر $p \geq 1$ و $f \in L^p$ تعریف می کنیم:

$$\|f\|_p = \left\{ \int_X |f(t)|^p dt \ < \infty \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{۶.۱}$$

و عدد $\|f\|_p$ را L^p-نرم f گوییم.

تعریف۱۳.۱.۱. فضای خطی مختلط (حقیقی) را یک فضای ضرب داخلی گوییم هر گاه یک تابع مختلط (حقیقی) روی $X * X$ که آن را با نماد $\langle , \rangle$ نشان می دهیم. به طوری که برای هر $\forall x, y, z \in X$ و هر $\alpha \in K$ داشته باشیم:

i. $\langle \alpha\, x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle,$

ii. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle,$

iii. $\langle x, y \rangle = \langle \overline{y, x} \rangle,$

iv. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0, \langle x, x \rangle \geq 0.$

آن گاه $\langle x, y \rangle$ ضرب داخلی x و y نامیده می شود.

اگر $K = R$باشد، آنگاه Vیک فضای ضرب داخلی حقیقی و اگر $K = C$، آنگاه X یک فضای ضرب داخلی مختلط است. در مواردی که فضای ضرب داخلی حقیقی است، ضرب داخلی متقارن است:

$$\forall x, y \in X; \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle. \tag{۷.۱}$$

تعریف۱.۱.۱۴. اگر $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله ای در فضای نرم دار X باشد. سری $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ در X همگرا به x است هر گاه دنباله $S_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$ همگرا به x باشد. و سری $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ را مطلقا همگرا گوییم هر گاه $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$ همگرا باشد.

قضیه ۱.۱.۱. شرط لازم و کافی برای آن که فضای نرم دار X کامل باشد، آن است که هر سری در این فضا مطلقا همگرا باشد.

قضیه ۲.۱.۱. (ریز-فیشر [۳]) فضای L^p، $(1 \leq p \leq \infty)$ کامل است.

فضای L^p به ازای $(1 \leq p \leq \infty)$ یک فضای نرم دار کامل است پس L^p یک فضای کامل باناخ است.

مثال ۳.۱.۱. فضای L^p، به ازای $p = 2$ یک فضای باناخ است، داریم:

$$L^2(X) = \left\{ f | f : X \to C, \int_X |f(t)|^2 dt \ < \infty \right\}, \tag{۱.۸}$$

با نرم

$$\|f\|_2 = \left\{ \int_X |f(t)|^2 dt \ < \infty \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{۱.۹}$$

تعریف۱.۱.۱۵. فرض کنیم H فضای باناخ باشد. هر گاه یک ضرب داخلی مانند $\langle .,. \rangle$ این روی این فضا به صورت H $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, x \in H$ تعریف شود، فضای باناخ H را یک فضای هیلبرت [۴] گوییم.

مثال ۴.۱.۱. فضای $X = L^2[a, b]$ به فرم زیر تعریف می شود:

$$L^2[a, b] = \left\{ f | f : [a, b] \to C, \int_a^b |f|^2 dt \ < \infty \right\}. \tag{۱.۱۰}$$

یعنی f اندازه پذیر و انتگرال متناهی دارد. تابع ضرب داخلی را روی این فضا به صورت زیر معرفی می کنیم:

$$\forall f, \ g \in L^2[a, b], \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx. \tag{۱.۱۱}$$

تابع معرفی شده بالا، تابع ضرب داخلی است.

تعریف۱.۱.۱۶. فرض کنیم عضو x از یک فضای ضرب داخلی X بر عضو y از این فضا عمود است هر گاه $\langle x, y \rangle = 0$. و آن را با نماد $x \perp y$ نمایش می دهیم.

تعریف۱.۱.۱۷. فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی باشد. $A \subset X$ را متعامد گوییم هر گاه $\forall x, y \in$

[۳] Riesz-Fischer

[۴] Hilbert

:A

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} 0 \ , & x \neq y \\ \\ \alpha \ , & x = y \end{cases} \qquad (۱۲.۱)$$

اگر برای هر $x \in A$ داشته باشیم $\|x\| = 1$، مجموعه A را متعامد یکه یا نرمال گوییم.

قضیه ۳.۱.۱. اگر A یک زیر مجموعه متعامد یکه از فضای هیلبرت H باشد، آن گاه شرایط زیر معادل هستند:

۱. به ازای هر $y \in X$ داریم: $\|y\|^2 = \sum_{x\in A}|\langle x, y\rangle|^2$ (اتحاد پارسوال [5]).

۲. مجموعه A کامل است.

۳. مجموعه A یک پایه متعامد یکه برای H است.

با توجه به قضیه قبل اگر A یک زیر مجموعه متعامد یکه کامل از فضای هیلبرت H باشد، آن گاه هر عضو $y \in H$ را می توان به صورت سری فوریه [6] $\sum_{x\in A}|\langle x, y\rangle|x$ بسط داد که سری فوریه مذکور همگرا به y است.

تعریف ۱۸.۱.۱. تابع $w(x)$ را بر بازه $[a, b]$ تابع وزن گوییم هر گاه:

۱. تابع $w(x)$ بر بازه (a, b) انتگرال پذیر باشد.

۲. تابع $w(x)$ بر بازه (a, b) نامنفی باشد.

۳. تابع $w(x)$ بر هیچ زیر بازه $[a, b]$ صفر نشود.

تابع ضرب داخلی نسبت به تابع وزن $w(x)$ را در $L^2[a, b]$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\langle f, g\rangle_{w(x)} = \int_a^b w(x)f(x)\overline{g(x)}dx. \qquad (۱۳.۱)$$

۲.۱ معادلات انتگرال

در این بخش تعاریف اولیه از معادلات انتگرال را ارائه می دهیم [۲۱].

تعریف ۱.۲.۱. یک معادله انتگرال معادله ای است که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال قرار دارد.

---

[5] Paresval

[6] Fourieh

۱.۲.۱ تقسیم بندی معادلات انتگرال

تعریف۱.۲.۲. معادله انتگرال فردهلم، که در آن حدود انتگرال گیری به ترتیب اعداد ثابت a وb هستند به صورت زیر تعریف می شود:

$$\phi(x)\ y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\ y(t)\ dt \quad a \leq x,t \leq b \tag{۱.۱۴}$$

که در آن $K(x,t)$ هسته و تابع $f(x)$ و پارامتر λ معلومند و $y(x)$ تابع مجهول است که باید تعیین شود.

تعریف۱.۲.۳. معادله انتگرال ولترا، که در آن حدود انتگرال گیری به صورت تابعی از x ظاهر می شود، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\phi(x)\ y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\ y(t)\ dt \tag{۱.۱۵}$$

که در آن $K(x,t)$ هسته و تابع $f(x)$ و پارامتر λ معلومند و $y(x)$تابع مجهول است که باید تعیین شود.

تذکر. به معادلات انتگرال (۱۰۹ ۱) و (۱ ۰ ۲۰) در حالتی که:

۱. $\phi(x) = 0$، یعنی تابع مجهول در بیرون از علامت انتگرال ظاهر نشده باشد به ترتیب معادله انتگرال فردهلم نوع اول و معادله انتگرال ولترای نوع اول گوییم و در حالتی که $\phi(x) = 1$ این معادلات را به ترتیب معادله انتگرال فردهلم نوع دوم و معادله انتگرال ولترای نوع دوم می گوییم.

۲. تابع مجهول زیر علامت انتگرال به صورت خطی ظاهر شود، معادلات انتگرال خطی ودر غیر این صورت، معادلات انتگرال غیر خطی گوییم. شکل کلی معادلات انتگرال خطی و غیر خطی به ترتیب به فرم زیر است:

$$\begin{aligned} \phi(x)\ y(x) &= f(x) + \lambda \int_\Gamma K(x,t)\ y(t)\ dt, \\ \phi(x)\ y(x) &= f(x) + \lambda \int_\Gamma K(x,t)\ F(y(t))\ dt. \end{aligned} \tag{۱.۱۶}$$

که در آن $K(x,t)$ هسته معادله انتگرال، Γ دامنه انتگرال گیری و $F(y(x))$ برحسب $y(x)$ غیر خطی است.
قابل ذکر است که معادله (۱ ۰ ۲۰) را می توان به عنوان یک حالت خاص (۱۰۹ ۱) در نظر گرفت به طوری که هسته $K(x,t)$ برای $t > x$ و $x \in [a,b]$ صفر فرض شود.

۳. $f(x) \equiv 0$ معادله را همگن و در غیر این صورت غیر همگن گوییم.

قضیه ۱.۲.۲ قضیه فردهلم متناوب: معادله انتگرال فردهلم غیر همگن (۱۰۹ ۱) فقط و فقط یک جواب دارد اگر و تنها اگر جواب معادله انتگرال فردهلم همگن

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\ y(t)\ dt \tag{۱.۱۷}$$

جواب بدیهی $y(x) = 0$ باشد.
جواب معادلات انتگرال به عنوان نمایش جواب معادلات دیفرانسیل نیز به کار می روند. به طوری که اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر به صورت یک مسأله مقدار مرزی باشد آن گاه معادله انتگرالی که ظاهر می شود از نوع فردهلم خواهد شد و اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر در قالب یک مسأله مقدار اولیه باشد، آن گاه معادله حاصل یک معادله انتگرال ولترا خواهد بود.
دسته دیگر از معادلات انتگرالی که به هر دو دسته از معادلات انتگرال ولترا و فردهلم مربوط می شود معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا و فردهلم می باشند. این نوع معادلات ابتدا در اوایل سال ۱۹۰۰ توسط ولترا معرفی شدند. ولترا در حال مطالعه پدیده رشد جمعیت و بخصوص تأثیر وراثت بود که در تحقیق خود با این گونه معادلات مواجه شد و نام مذکور را برای آنها انتخاب کرد. دانشمندان و محققین در پژوهش خود در کاربرد علوم در مواردی نظیر انتقال گرما، پدیده انتشار و پخش نوترون و غیره به حل این معادلات نیاز پیدا می کنند.

تعریف۱.۲.۴. معادله انتگرال-دیفرانسیل، معادله ای است که در آن عملگر مشتق و انتگرال با هم در یک معادله حضور دارند. تابع مجهول $y(x)$ و حداقل یکی از مشتق هایش نظیر $y'(x)$ یا $y''(x)$ و یا... در خارج و همچنین در زیر علامت انتگرال قرار دارند.
فرم های استاندارد زیر را به ترتیب برای معادله انتگرال-دیفرانسیل فردهلم و معادله انتگرال-دیفرانسیل ولترا فرض می کنیم.

$$y^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, y(t)\, dt \quad y^{(k)}(a) = b_k,\ 0 \le k \le (n-1),$$
$$y^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\, y(t)\, dt \quad y^{(k)}(a) = b_k,\ 0 \le k \le (n-1). \tag{۱.۱۸}$$

البته $y^{(n)}(x)$ مشتق nام تابع $y(x)$ نسبت به x را نشان می دهد و b_kها ثابت هایی هستند که شرایط اولیه را مشخص می کنند.

تعریف۱.۲.۵. اگر در معادله انتگرال

$$\phi(x)\, y(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)\, y(t)\, dt. \tag{۱.۱۹}$$

حد پایین، حد بالا یا هر دو حد انتگرال گیری نامتناهی باشند، این معادله را معادله انتگرال منفرد گوییم. به علاوه اگر هسته این معادله در یک یا چند نقطه از دامنه انتگرال گیری نامتناهی یا تعریف نشده باشد باز هم این معادله را معادله انتگرال منفرد می نامیم. برای مثال معادله انتگرال

$$y(x) = 1 - 2\sqrt{x} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}\, y(t)\, dt. \tag{۱.۲۰}$$