دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

عنوان

روش برنامه ریزی آرمانی فازی در حل مسائل برنامه ریزی دوسطحی کسری–خطی

نگارش

اکرم بقال نژاد

استاد راهنما

دکتر محمدرضا صافی

استاد مشاور

دکتر باقر کرامتی

مهرماه ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

قدردانی

سپاس خدایی را که اول است بی آن که قبل از او اولی باشد و آخر است بدون این که پس از او آخری باشد.

الهی ای که در برابر احسان به بندگانت پاداشی نخواهی و از بخشش هایت پشیمان نگردی و ای که بندگانت را قبل از عمل نیک پاداش دهی، نعمتت بی سابقه و بخششت از روی تفضل و عقوبتت عین عدالت و مقدراتت به سود ماست، اگر عطا کنی آن را به منت آلوده نسازی و اگر منع کنی از روی ستمگری نیست. (صحیفه سجادیه)

در آغاز، پروردگار را سپاسگزارم که نعمت تفکر، تعقل و معرفت را به بندگان خود ارزانی داشت و جهانی را خلق کرد که هر آن چه بیشتر بدانی، بیشتر حیران و درمانده می شوی.

اکنون که به یاری خداوند این پایان نامه به پایان رسیده، مراتب سپاس و تقدیر بی پایان خویش را از پدر و مادر دلسوز و فداکارم که در مدت تحصیل همواره حامی و مشوق من بوده اند اعلام می دارم.
از زحمات بی دریغ استاد ارجمندم **جناب آقای دکتر محمدرضا صافی** که افتخار شاگردی ایشان برایم از هر مقام و درجه ای گرانبهاتر است و در طول این دو سال با تعهد و خلوص نیت تجربه سال ها تحقیق و تفحص علمی شان را در اختیار اینجانب قرار دادند و همچنین با راهنمایی های دلسوزانه خویش همواره مایه قوت و آرامش من بودند کمال تشکر و قدردانی را دارم و سرافرازی روزافزون ایشان را از خداوند متعال خواستارم.
همچنین از استاد فرهیخته **جناب آقای دکتر باقر کرامتی** که از کلاس درس ایشان بهره‌مند بوده‌ام و در زمینه مشاوره این رساله از راهنمایی‌های بی‌دریغشان بهره برده ام سپاسگزارم و عزت و عافیت ایشان را از خداوند متعال خواستارم. همچنین از **جناب آقای دکتر مجید سلیمانی دامنه** که داوری این پایان‌نامه را به عهده داشتند تقدیر و تشکر می‌نمایم.
با سپاس بی دریغ خدمت خانواده ام که مرا صمیمانه و مشفقانه یاری داده اند و با تشکر خالصانه خدمت همه کسانی که به نوعی مرا در به انجام رساندن این پایان نامه یاری نموده اند.

تقدیم به :

ماه و خورشید زندگانی ام

پدر و مادر عزیزم

آنان که سپیدموی گشتند تا سپیدروی گردم...

آنان که وجودشان برایم هم مهر و امید است و نگاهشان،

گرمی کلامشان و روشنی رویشان سرمایه های زندگانی ام،

هستند. در برابر وجود گرامیشان زانوی ادب بر زمین می نهم

و با دلی مملو از محبت و خضوع بر دستانشان بوسه می زنم.

چکیده

در این پایان نامه روشی برای حل مسائل برنامه ریزی دوسطحی کسری—خطی در یک سازمان سلسله مراتبی، با استفاده از روش برنامه‌ریزی آرمانی فازی مطرح شده است. با به کارگیری این روش، به یک جواب رضایت‌بخش برای مسأله دوسطحی کسری—خطی دست می‌یابیم.

در این روش با مشخص کردن جواب‌های بهین خصوصی برای توابع هدف در هر سطح، سطوح آرمانی فازی برای اهداف در همه سطوح و نیز برای متغیرهای تصمیم تحت کنترل تصمیم‌گیرنده سطح بالا، تعیین می‌گردند. سپس با در نظرگرفتن حدود مجاز انحراف برای هر یک از سطوح آرمانی، توابع عضویت متناظرشان تعریف می‌شوند. آن گاه روش برنامه‌ریزی آرمانی فازی برای دستیابی به بالاترین درجه عضویت هر یک از آرمان‌های فازی، توسط مینیمم کردن متغیرهای انحرافی منفی، به کار برده می‌شود.

در این جا با مقایسه نتایج حاصل از روش فازی با روش برنامه‌ریزی آرمانی فازی نتیجه می‌گیریم که روش برنامه ریزی آرمانی فازی جواب‌های بهتری را نسبت به روش فازی دیگر ارائه می‌دهد.

کلیدواژه:

برنامه‌ریزی دو سطحی، برنامه‌ریزی کسری—خطی، برنامه‌ریزی فازی، برنامه‌ریزی آرمانی، برنامه ریزی چندهدفه.

فهرست مندرجات

[1] Compromise Solution

پیش‌گفتار

برنامه‌ریزی چندسطحی [۱] ابزاری قوی برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرمتمرکز[۲] در یک ساختار سلسله مراتبی، می‌باشد. در این نوع برنامه‌ریزی، چندین تصمیم گیرنده در سطوح مختلف قرار دارند و هر کدام تنها تعدادی از متغیرهای تصمیم را مشخص می‌کنند. در واقع هنگامی این مسائل مطرح می‌شوند که تصمیم‌گیرنده سطح اول، قادر به اتخاذ تصمیم در مورد تمام متغیرها نیست یا به عبارت دیگر، اختیار تعیین تمام متغیرهای تصمیم را ندارد و مسأله تصمیم‌گیری غیرمتمرکز بدین صورت مطرح می‌شود.
توانایی برنامه‌ریزی چندسطحی برای بیان مسائل غیرمتمرکز سبب شده، کاربردهای فراوانی در زمینه‌های مختلف، از جمله سیاست‌گذاری‌های دولتی، طراحی شبکه‌های حمل و نقل، مسائل اقتصاد و ... داشته باشد.
بعضی از مهم‌ترین روش های حل مسائل چند سطحی موجود، جستجوی نقطه رأسی[۸] و روش مبتنی بر شرایط بهینگی کروش—کان—تاکر[۲۸] [۳] می باشند. الگوریتم های طراحی شده برای حل مسائل دوسطحی عمدتاً شامل طرح های شمارشی، جایگزینی مسئله سطح پایین با شرایط K.K.T نظیرش و استفاده از روش های گرادیان یا جریمه می‌باشد. در این رساله مسئله دو سطحی کسری—خطی که ناحیه تشکیل شده توسط قیود آن یک چند وجهی کران دار می باشد، مورد بررسی قرار می گیرد. جواب بهینه چنین مسئله ای در یکی از نقاط رأسی چند وجهی کران دار مذکور رخ می دهد [۱۰]. با توجه به این موضوع می توان با امتحان کردن کلیه نقاط رأسی چند وجهی الگوریتمی به دست آورد که جواب بهینه را در تعداد متناهی تکرار به دست می آورد، هر چند این تکنیک به خاطر تعداد زیاد نقاط رأسی چند وجهی به جز برای مسائل ساده، کارایی ندارد. کالوته و گاله [۴] در سال ۲۰۰۴، روشی به نام الگوریتم $Kth-Best$ برای حل مسئله دوسطحی کسری—خطی پیشنهاد دادند که یک طرح شمارشی متفاوت برای حل مسئله ارائه می دهد [۸].

---
[۱] Multi Level Programming
[۲] Decenteralize Programming
[۳] Karush-Kuhn-Tucker Condition
[۴] Calvete, Gale

همچنین ساویتا میشرا [۱] در سال ۲۰۰۷، یک روش دیگر معروف به روش وزن دهی [۲] برای حل مسئله دو سطحی کسری—خطی ارائه داد که مسئله دو سطحی کسری—خطی را با یافتن وزن های مناسب به یک مسئله بهینه سازی اسکالر تبدیل کرده و حل می کند [۲۹]. هر دو روش مذکور از لحاظ زمان محاسبات و دقت جواب از کارایی نسبتاً پایینی برخوردارند.

برای غلبه بر این مشکلات، استفاده از برنامه ریزی فازی برای حل مسائل چند سطحی، مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفت [۴۰، ۴۲]. دراین رساله، روش برنامه ریزی آرمانی فازی [۳] برای حل مسائل دو سطحی کسری—خطی مطرح شده در مقاله [۳۷]، شرح داده می شود. با به کار گیری این روش به یک جواب رضایت بخش [۴] برای مسأله دو سطحی دست می یابیم.

برای فرمول بندی مدل برنامه‌ریزی آرمانی فازی متناظر با مسائل برنامه ریزی دوسطحی، نخست با مشخص کردن جواب‌های بهین خصوصی برای هر یک از توابع هدف، سطوح آرمانی فازی برای اهداف در هر سطح و نیز برای متغیرهای تصمیم تحت کنترل تصمیم گیرنده سطح بالا تعیین می‌گردند. سپس با در نظر گرفتن حدود مجاز انحراف برای هر یک از سطوح آرمانی، توابع عضویت متناظرشان تعیین می گردند. لذا هر چه درجه عضویت متناظر با یک آرمان فازی بیشتر باشد به معنای دستیابی بیشتر به آن آرمان است. بنابر این روش برنامه ریزی آرمانی فازی برای دستیابی به بالاترین درجه عضویت هر یک از آرمان های فازی توسط مینیمم کردن متغیر های انحرافی منفی به کار برده می شود. اگر جواب به دست آمده از این روش مورد رضایت همه تصمیم گیرنده ها واقع گردد، به این جواب یک جواب رضایت بخش گفته می شود. در غیر این صورت، تصمیم گیرنده سطح بالا باید حدود مجاز انحراف جدیدی را برای متغیرهای تصمیم تحت کنترلش فراهم آورد تا این که یک جواب رضایت بخش برای همه تصمیم گیرنده‌ها حاصل شود. این پایان نامه به صورت زیر تنظیم شده است:

- در فصل اول، به معرفی نظریه مجموعه‌های فازی و مفاهیم اساسی مرتبط با آن می‌پردازیم.
- در فصل دوم، برنامه‌ریزی کسری—خطی، تصمیم‌گیری فازی و برنامه‌ریزی کسری—خطی فازی مورد بررسی قرار گرفته است.
- فصل سوم، به معرفی برنامه‌ریزی آرمانی در حالت قطعی و نیز برنامه‌ریزی آرمانی فازی، می‌پردازد.
- فصل چهارم، شامل معرفی فرم کلی مسائل برنامه‌ریزی دوسطحی و نیز مسائل برنامه‌ریزی دوسطحی غیرمتمرکز می‌باشد. در این فصل ساده‌ترین مسائل چند سطحی یعنی مسائل برنامه ریزی دوسطحی

[۱] Savita Mishra
[۲] Weighted
[۳] Fuzzy Goal Programming
[۴] Compromise Solution

کسری—خطی مورد بررسی قرار می گیرند و دو روش حل متداول این دسته از مسائل که یکی بر پایه شمارش رئوس و دیگری بر شرایط بهینگی کروش—کان—تاکر استوار است، شرح داده می شوند. هم چنین، به اثبات این که جواب بهینه مسئله دوسطحی شبه مقعر در یکی از نقاط رأسی چندوجهی رخ می دهد، می پردازیم.

- در فصل پنجم، روش برنامه‌ریزی آرمانی فازی برای حل مسائل دوسطحی، توضیح داده می شود. هم چنین، در این فصل، پیش از شرح این روش، روش برنامه ریزی فازی برای حل مسائل دو سطحی آورده شده است و نتایج حاصل از این روش با روش برنامه ریزی آرمانی فازی، مقایسه می گردد.

فصل ۱

نظریه مجموعه‌های فازی

۱—۱ مجموعه‌های کلاسیک و معرفی مجموعه‌های فازی

در نظریه کلاسیک، یک مجموعه گردایه ای از اشیاء معین و متمایز است که این اشیاء، عناصر نام دارند و گوییم عضوهای مجموعه می باشند. در مورد مجموعه‌های کلاسیک می توانیم به طور قطع بگوییم که هر عنصر عضو مجموعه هست یا نه. فرض کنید X مجموعه‌ی مرجع و A یک مجموعه کلاسیک (معمولی) در X باشد. راه های مختلفی برای نمایش این مجموعه وجود دارد که اولین نحوه نمایش، فهرست عناصر آن مجموعه است:

$$A = \{x_۱, x_۲, \dots, x_n\}$$

دومین نحوه نمایش، تعریف خصوصیات عناصر مجموعه می باشد:

$$A = \{x \in X| \ \ P(x)\}$$

که در آن، $P(x)$ یک گزاره نما است و بیانگر این است که x خاصیت P را داشته باشد و سومین نحوه نمایش مجموعه، استفاده از تابع مشخصه است:

$$\chi_A : X \longrightarrow \{۰, ۱\} \qquad \chi_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases}$$

تابع مشخصه، عناصر مجموعه مرجع X را به دو مقدار صفر و یک، تصویر می کند. به این ترتیب، مجموعه A را می توان به صورت $A = \{(x, \chi_A(x))|x \in X\}$ هم نمایش داد. همان طور که ملاحظه می شود در مجموعه های کلاسیک یک عنصر یا عضو مجموعه مورد نظر هست یا نیست، یعنی از این دو حالت خارج نیست. با توجه به مطالب فوق، مجموعه های کلاسیک برای مفاهیمی مناسبند که به طور قطعی و مشخص قابل تعریف هستند، در حالی که مفاهیمی وجود دارند که نمی توان به طور قطعی و مشخص برای آن ها حد و مرزی

مشخص کرد و بر اساس آن مجموعه کلاسیک را تشکیل داد. به عبارت دیگر، P یک خاصیت خوش تعریف در X نیست و دارای ابهام است. به عنوان مثال:

- مجموعه افراد مسن
- مجموعه اعداد حقیقی نزدیک به صفر
- مجموعه اعداد صحیح مثبت خیلی کمتر از صد
- مجموعه اتومبیل های با مصرف سوخت متوسط

و بسیاری موارد دیگر که در دنیای واقعی وجود دارند. این موارد نشان می دهند که بعضی مجموعه ها دامنه روشن و مشخصی ندارند. در حالی که مجموعه های کلاسیک یک ویژگی تعریف شده و مشخص را دارا بودند. برای حل این مشکل، نظریه مجموعه های فازی ارائه گردید. نظریه مجموعه های فازی در سال ۱۹٦۵، توسط دکتر لطفی عسکر زاده، ابداع شد و در مدت کوتاهی در اکثر شاخه های علوم به ویژه علوم کاربردی و مهندسی، گسترش یافت. نظریه مجموعه های فازی، نظریه ای کارا در شرایط عدم اطمینان و شرایط نادقیق (مبهم) می باشد. این نظریه می تواند بسیاری از مفاهیم و متغیرهایی را که نادقیق هستند، صورت بندی (مدل) ریاضی بخشد و زمینه را برای استدلال ، استنتاج، کنترل و تصمیم گیری در شرایط عدم اطمینان، نادقیق فراهم آورد. مفاهیمی مانند زیبایی، بلند قد بودن، تقریباً کم و ... در نظریه مجموعه‌های کلاسیک قابل استفاده نیستند ولی می توان آن ها را در نظریه مجموعه های فازی به زبان ریاضی در آوریم.

تعریف ۱-۱-۱ مجموعه فازی: فرض کنید X یک مجموعه قطعی [1] باشد، زیر مجموعه فازی $\tilde{A}$ از مجموعه X، مجموعه ای از زوج‌های مرتب به صورت زیر است:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) |\ \ x \in X\}$$

که در آن، $\mu_{\tilde{A}} : X \longrightarrow [0, 1]$ تابع عضویت و $\mu_{\tilde{A}}(x)$ درجه عضویت x در $\tilde{A}$ نامیده می شود.

۱-۲ عملیات در مجموعه‌های فازی

در این بخش، عملیات اساسی مکمل [2] ، اشتراک و اجتماع بر روی مجموعه های فازی معرفی می شوند[۴۹].

تعریف ۱-۲-۱ مجموعه فازی تهی: یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ تهی است اگر درجه عضویت همه عناصرش صفر باشد یعنی $\forall x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) = 0$.

[1] Crisp
[2] Complement

تعریف ۱–۲–۲ معادل بودن مجموعه‌های فازی: دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ معادل هستند اگر و تنها اگر $\forall x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$.

تعریف ۱–۲–۳ زیر مجموعه بودن: $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ اگر و تنها اگر $\forall x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$.

تعریف ۱–۲–۴ متمم مجموعه فازی: متمم مجموعه فازی $\tilde{A}$، مجموعه فازی $\tilde{A}^c$ در X است که تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \quad , \quad \forall x \in X.$$

تعریف ۱–۲–۵ اشتراک مجموعه‌های فازی: اشتراک دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$، مجموعه فازی $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ در X است که تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}.$$

تعریف ۱–۲–٦ اجتماع مجموعه‌های فازی: اجتماع دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$، مجموعه فازی $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ در X است که تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}.$$

به دلیل خاصیت شرکت پذیری عملگرهای min و max، تعاریف اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی را می توان به هر تعداد متناهی از مجموعه های فازی، تعمیم داد. علاوه بر عملگر های تعریف شده در بالا، تعدادی عملگر دیگر نیز بر مجموعه های فازی تعریف شده اند [۴۹]. هم چنین، دو خاصیت زیر برای مجموعه های فازی صادق نیستند:

$$\begin{cases} A \cup A^c = X \\ A \cap A^c = \emptyset \end{cases}$$

۱–۲–۱ مفاهیم اساسی مرتبط با مجموعه های فازی

تعریف ۱–۲–۷ تکیه گاه[۱] یک مجموعه فازی: تکیه گاه مجموعه فازی $\tilde{A}$ در X، یک مجموعه غیر فازی است و شامل تمام عضوهایی از X می باشد که دارای درجه عضویت مثبت هستند و به صورت زیر تعریف می شود:

$$Supp(\tilde{A}) = \{\, x \in X |\; \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0 \}.$$

[۱] Support

از تعریف فوق، نتیجه می شود که اگر تکیه گاه یک مجموعه فازی تهی باشد، آن مجموعه فازی تهی می باشد.

تعریف ۱−۲−۸ ارتفاع[۱] یک مجموعه فازی: ارتفاع یک مجموعه فازی برابر حداکثر درجه عضویت عناصر آن مجموعه است. یعنی

$$h(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \{\mu_{\tilde{A}}(x)\}.$$

تعریف ۱−۲−۹ مجموعه فازی نرمال[۲] : مجموعه فازی $\tilde{A}$، نرمال است اگر ارتفاع آن برابر یک باشد. یعنی $h(\tilde{A}) = ۱$. در غیر این صورت، مجموعه فازی زیر نرمال نامیده می شود.

تعریف ۱−۲−۱۰ α−برش[۳] در مجموعه های فازی: α−برش یک مجموعه فازی $\tilde{A}$، یک مجموعه غیر فازی A_α است که شامل تمام عضوهایی از X می باشد که مقادیر عضویتی بزرگتر یا مساوی α دارند. یعنی

$$A_\alpha = \{\ x \in X |\ \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (۰, ۱]$$

α−برش ها توصیفی از مجموعه های فازی با استفاده از مجموعه های قطعی ارائه می دهند و دارای ویژگی های زیر هستند:

۱) خانواده $\{A_\alpha |\ \alpha \in (۰, ۱]\}$ یکنواست یعنی: $A_\beta \subseteq A_\alpha \Longrightarrow ۰ < \alpha \leq \beta \leq ۱$.

۲) $A_\alpha \subseteq B_\alpha, \quad \forall \alpha \in (۰, ۱]$ اگر و فقط اگر $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$.

۳) $(\tilde{A} \cap \tilde{B})_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha, \quad (\tilde{A} \cup \tilde{B})_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$.

۱−۲−۲ مجموعه‌های فازی محدب

هنگامی که مجموعه مرجع X، فضای n بعدی R^n باشد، مفهوم تحدب را می توان به مجموعه های فازی تعمیم داد.

تعریف ۱−۲−۱۱ مجموعه فازی محدب[۴] : یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ در R^n محدب است اگر α− برش های آن (A_α) به ازای هر $\alpha \in (۰, ۱]$، یک مجموعه محدب باشد.

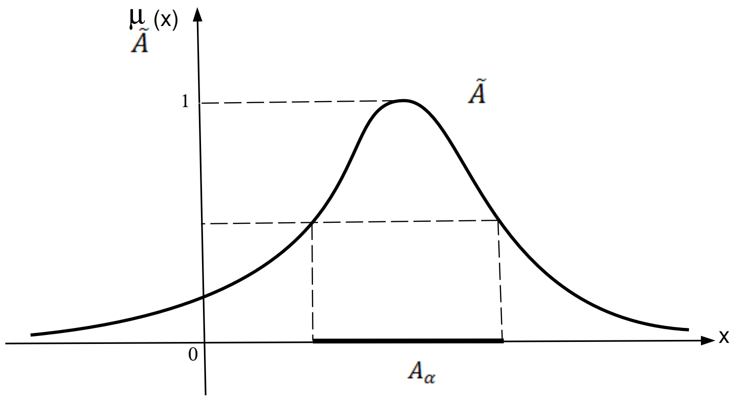
[۱] Height
[۲] Normal
[۳] α - cut
[۴] Convex Fuzzy Set

قضیه زیر تعریف معادلی برای یک مجموعه فازی محدب ارائه می دهد.

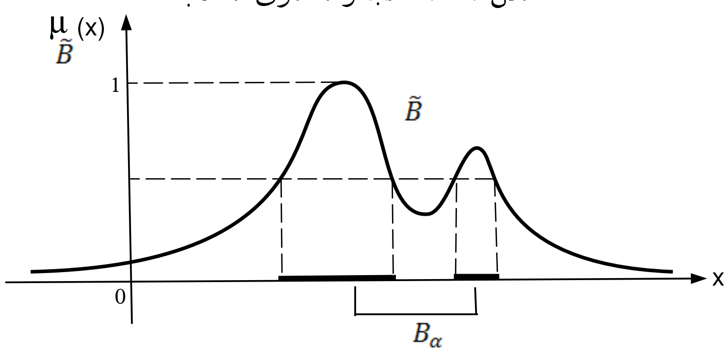
قضیه ۱—۲—۱۲ یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ در R^n، یک مجموعه فازی محدب است اگر و فقط اگر

$$\forall x_۱, x_۲ \in R^n,\ \circ \leq \lambda \leq ۱:\ \mu_{\tilde{A}}(\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲) \geq \min\{\ \mu_{\tilde{A}}(x_۱), \mu_{\tilde{A}}(x_۲)\}.$$

اثبات: به مرجع [۴۹] مراجعه شود. □



شکل ۱—۱: مجموعه فازی محدب



شکل ۱—۲: مجموعه فازی نامحدب

۱—۲—۳ اصل تجزیه و اصل گسترش

α— برش های یک مجموعه فازی تشکیل خانواده‌ای از مجموعه های قطعی می دهند که می توانند برای نمایش یک مجموعه فازی داده شده $\tilde{A}$ در X، استفاده شود. این مطلب در قالب قضیه زیر خلاصه شده است.

قضیه ۱—۲—۱۳ فرض کنید $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی در X، با تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x)$ باشد و هم چنین A_α، α— برش مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\chi_{A_\alpha}(x)$ تابع مشخصه مجموعه قطعی A_α، $\alpha \in (\circ, ۱]$ باشد آن گاه

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \sup_{\alpha \in (0,1]} (\alpha \wedge \chi_{A_\alpha(x)}), \quad x \in X.$$

اثبات: به مرجع [۴۹] مراجعه شود. □

نتیجه ۱–۲–۱۴ اصل تجزیه [۱] : هر مجموعه فازی $\tilde{A}$ در X می تواند بر حسب $\alpha-$ برش های مربوط به خود به صورت زیر نمایش داده شود:

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} (\alpha A_\alpha)$$

یکی از مفاهیم اساسی نظریه مجموعه های فازی اصل گسترش است که می تواند برای تعمیم مفاهیم ریاضی قطعی به مجموعه های فازی به کار گرفته شود. این اصل به ویژه در تعمیم عملگرهای جبری و تعریف این عملگرها برای اعداد فازی مفید است. یک تابع معمولی $f: X \longrightarrow Y$ را در نظر بگیرید. این تابع به هر $x \in X$ عددی مانند $y \in Y$ را نسبت می دهد. حال می خواهیم تابع f را به گونه ای گسترش دهیم که به جای این که بر یک نقطه از X عمل کند، بر یک زیر مجموعه فازی از آن عمل کند. آنچه مهم است تعریف مقدار حاصل از عمل f بر یک زیر مجموعه فازی از X مانند $\tilde{A}$ است. مسلماً انتظار داریم که $f(\tilde{A})$ دیگر یک نقطه از Y نباشد بلکه یک زیر مجموعه فازی از Y مانند $\tilde{B}$ باشد. اصل گسترش روش این تعمیم را بیان می کند.

تعریف ۱–۲–۱۵ اصل گسترش [۲] : فرض کنید $f: X \longrightarrow Y$ یک تابع و $\tilde{A}$ زیرمجموعه ای فازی از X باشد، در این صورت $f(\tilde{A}) = \tilde{B}$ یک زیرمجموعه فازی از Y خواهد بود به طوری که:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x,\ y=f(x)} \{\mu_{\tilde{A}}(x)\} & f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset \\ 0 & f^{-1}(\{y\}) = \emptyset \end{cases}$$

۱–۳ اعداد فازی

در بسیاری از مواقع لازم است از اطلاعات نادقیق عددی استفاده کنیم، جمله هایی مانند «حدود یک»، «نزدیک سه» و ... اغلب به کار می روند. مجموعه های فازی که روی اعداد حقیقی تعریف می شوند از اهمیت بالایی برخوردارند. تابع عضویت این نوع مجموعه های فازی به صورت زیر می باشد:

$$\mu: \Re \longrightarrow [0,1]$$

[۱] Decomposition Principle
[۲] Extension Principle

این نوع از مجموعه های فازی مفهوم کمی داشته و تحت شرایط خاصی می توانند به عنوان اعداد فازی یا بازه های فازی مطرح شوند. اعداد و بازه های فازی در مدل سازی و تحلیل کنترل فازی، تصمیم گیری فازی، استدلال تقریبی، بهینه سازی و آمار و احتمالات تقریبی نقش بسیار مهمی ایفا می کنند.

تعریف ۱–۳–۱ فرض کنید $\widetilde{A}$ یک مجموعه فازی در $\Re$ باشد. $\tilde{A}$ یک عدد فازی نامیده می شود اگر

۱) نرمال باشد.

۲) $\forall\alpha \in (0, 1]$ ، A_α بازه‌ای بسته باشد.

۳) تکیه گاه $\tilde{A}$ کراندار باشد.

شرایط بازه بسته بودن A_α ها و کران دار بودن تکیه گاه اجازه تعریف عملیات حسابی معنی داری را برای اعداد فازی به ما خواهد داد.

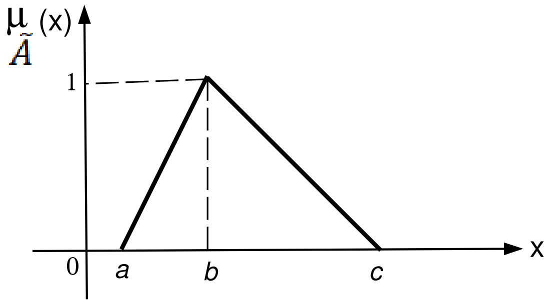
۱–۳–۱ انواع اعداد فازی

تعریف ۱–۳–۲ عدد فازی مثلثی[۱] : یک عدد فازی مثلثی $\widetilde{A}$، یک مجموعه فازی در $\Re$ با تابع عضویت زیر است:

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}\,(x; a, b, c) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\[2ex] \dfrac{c-x}{c-b} & b \leq x \leq c \\[2ex] 0 & x > c \quad or \quad x < a \end{cases}$$

شکل (۱–۲) عدد فازی مثلثی را نمایش می دهد.

[۱] Triangular Fuzzy Number

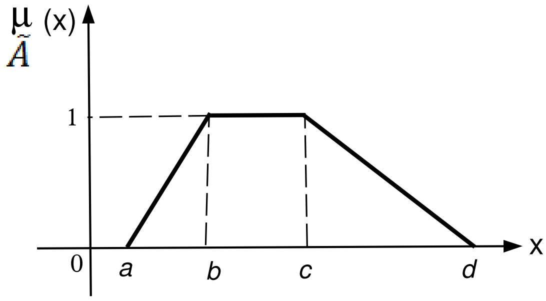


شکل ۱—۲: عدد فازی مثلثی

تعریف ۱—۳—۳ عدد فازی ذوزنقه ای [۱] : یک عدد فازی ذوزنقه ای $\tilde{A}$، یک مجموعه فازی در $\Re$ با تابع عضویت زیر است:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x; a, b, c, d) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ ۱ & b \leq x \leq c \\ \dfrac{d-x}{d-c} & c < x \leq d \\ ۰ & x > d \quad or \quad x < a \end{cases}$$

شکل (۱—۳) عدد فازی ذوزنقه ای را نمایش می دهد.



شکل ۱—۳: عدد فازی ذوزنقه ای

[۱] Trapezoid Fuzzy Number