١٤٩٣٥٩

دانشگاه شهید بهشتی
دانشکدهٔ علوم ریاضی
گروه آمار

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

عنوان:

فرایندهای نقطه‌ای مارکوفی و کاربردهای آن

نگارش:
فرزانه صفوی‌منش

استاد راهنما:
دکتر محمدقاسم وحیدی اصل

استادان مشاور:
دکتر رضا اخوان
دکتر امیرتیمور پاینده

شهریور ۱۳۸۹

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
پژوهشگاه علوم و فناوری اطلاعات ایران
مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران
IRANDOC

۱۳۸۹/۱۰/۲۰

۱۴۹۳۵۹

کلیهٔ حقوق اعم از چاپ و تکثیر، نسخه‌برداری، ترجمه، اقتباس و ... از این پایان‌نامه برای دانشگاه شهید بهشتی محفوظ است.

نقل مطالب با ذکر مأخذ آزاد است.

تاریخ .....
شماره .....
پیوست .....

دانشگاه شهید بهشتی

صورتجلسه دفاع از پایان نامه دانشجویان دوره کارشناسی ارشد

ان ۱۳۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین

ن ۲۹۹۰۱

بازگشت به مجوز دفاع شماره ۷۷۰/۷۶۱۳/د مورخ ۸۹/۶/۱۳ جلسه هیات داوران ارزیابی پایان نامه خانم فرزانه صفوی‌منش شماره شناسنامه ۱۲۲۳۶ صادره از تهران متولد ۱۳۶۳ دانشجوی آمار ریاضی دوره کارشناسی ارشد آمار ریاضی

با عنوان

فرآیندهای نقطه‌ای مارکوفی و کاربردهای آن

به راهنمایی

دکتر محمد قاسم وحیدی اصل

طبق دعوت قبلی در تاریخ ۸۹/۶/۱۳ تشکیل گردید و براساس رای هیات داوری و با عنایت به ماده آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمره ۱۵ و درجه عالی مورد تصویب قرار گرفت.

	نام استاد	مرتبه علمی	نام دانشگاه
۱)	استاد راهنما: دکتر محمد قاسم وحیدی اصل	استاد	شهید بهشتی
۲)	استاد مشاور: دکتر رضا احوان	استادیار	
۳)	استاد مشاور: دکتر امیر تیمور پاینده	استادیار	
۴)	داور: دکتر محمدرضا فقیهی	استادیار	
۵)	داور: دکتر فیروزه ریواز	استادیار	
۶)	نماینده تحصیلات تکمیلی		

تقدیم به

پدر و مادرم

که نگاه روشنشان همواره پشتوانهٔ اراده‌ام است؛

خواهرم

که نعمت وجودش اقبال بی‌نظیر زندگی من است؛

و همهٔ نیکوسرشتانی که امید بودنشان در این کارزار آب و حباب،

بهانهٔ زندگی آدمیست...

چکیده

نظر به اهمیت مدل‌بندی الگوهای نقطه‌ای دارای برهم‌کنش میان نقاط تشکیل‌دهندهٔ آن‌ها، در این پایان‌نامه به معرفی ردهٔ انعطاف‌پذیری از مدل‌های فضایی موجود، موسوم به مدل‌های فرایند نقطه‌ای مارکوفی، می‌پردازیم. پس از معرفی انواع مدل‌های مارکوفی همچون اشتراوس، سخت‌مغز و ...، به معرفی الگوریتم‌های شبیه‌سازی این فرایندها و نیز روش‌های آزمودن نیکویی برازش مدل و تحلیل مانده‌ها پرداخته‌ایم.

در فصل پایانی نیز با توجه به اهمیت تاریخی استفاده از این مدل‌ها در جنگل‌داری، به بررسی الگوی پراکنش فضایی درختان در مراحل مختلف تحولی جنگل در توده‌های دست‌نخوردهٔ راش در منطقهٔ کلاردشت ایران پرداخته‌ایم. داده‌های مورد استفاده، برگرفته از یک طرح پژوهشی است که در مؤسسهٔ تحقیقات جنگل‌ها و مراتع ایران انجام شده و برای اولین بار در ایران به بررسی الگوی پراکنش درختان در مراحل تحولی جنگل پرداخته است. از آنجا که الگوی پراکنش درختان قطور یا بسیار بلند در جنگل‌ها از اهمیت زیست‌محیطی بسیاری برخوردار است، توجه خود را به مدل‌بندی الگوی پراکنش درختان با قطرdbh بیشتر از ۶۰ سانتی‌متر معطوف نموده و نتیجه گرفته‌ایم که مدل‌های اشتراوس و پواسون، هر یک از منظری خاص، بهترین برازش را نشان می‌دهند. از آنجا که قطر هر یک از درختان را نیز در دست داشتیم، با رده‌بندی درختان برحسب قطر آن‌ها به برازش مدل‌های نشاندار به آن‌ها پرداختیم و این نتیجه حاصل شد که در هر مرحله نیروی برهم‌کنش میان درختان کم‌قطر و قطور از نوع دافعه ست و مدل اشتراوس بهتر از دیگر مدل‌ها به آن‌ها می‌برازد.

واژه‌های کلیدی: *فرایندهای نقطه‌ای مارکوفی، قضیهٔ همرزلی - کلیفورد، اشتراوس، الگوهای منظم، الگوریتم متروپولیس- هیستینگس، تابع پتانسیل جفتی، توزیع پالم، تابع شدت شرطی، درختان راش، جنگل‌های کلاردشت ایران، مراحل تحولی جنگل.*

پیشگفتار

هنگامی که از ناپلئون پرسیدند که آیا ترجیح می‌دهید فرماندهان ارتش شما شجاع باشند یا زیرک، پاسخ داد: «هیچ‌کدام؛ من فرماندهان خوش‌شانس را ترجیح می‌دهم.»

گزاف نیست اگر آشنایی خود با دنیای آمار و از آن دریچه، فرایندهای تصادفی را بر عهدهٔ اقبال نهم که صباحی چند بر مدار تقدیر ما گردید و پای اندیشه بدین راه گشود؛ ورنه، ساربان تدبیر را چنان قدرتی نبود که خود چنین برگزیند.

زین پس، همه، «رفتن» است و در این گذار، درنگ بر سر حوادث، جز دمیدن بر آتش این شوق نیست. روزگار به هر نشیب که افتد، مباد که تسلیم یأس شویم که «زیستن»، زیباترین پاسخ به آزمونِ «بودن» است.

******

این پایان‌نامه مشتمل بر ۴ فصل است. در دو فصل نخست، به معرفی فرایندهای نقطه‌ای و فرایندهای نقطه‌ای مارکوفی پرداخته، پس از ارائهٔ روش‌های شبیه‌سازی این‌گونه فرایندها و استنباط آماری دربارهٔ آن‌ها در فصل سوم، فصل پایانی را به معرفی کاربرد این رده از فرایندها در بوم‌شناسی جنگل‌های ایران اختصاص داده‌ایم؛ هرچند که در فصل‌های پیشین نیز، به فراخور موضوع و موقعیت، مثال‌های دیگری را ذکر نموده‌ایم. بررسی مذکور، طی یک طرح پژوهشی در مؤسسهٔ تحقیقات مراتع و جنگل‌های ایران انجام شده و از آن رو حائز اهمیت است که اولاً برای نخستین بار در ایران است که الگوی پراکنش فضایی گونه‌ای از درختان در مراحل تحولی آن بررسی می‌شود و ثانیاً برای نخستین بار مدلی فضایی برای استفاده‌های آتی پژوهشگران ارائه می‌شود.

بر خود لازم می‌دانم مراتب سپاس خود را از استاد بزرگوار، **جناب آقای دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل**، که عهده‌دار راهبری من در این پایان‌نامه بودند، اعلام دارم. بی‌شک، واژه‌ها چونان همیشه در وصف نیکوصفتان ناتوانند و درک و نگاه من از آن‌ها ناتوان‌تر، که ظرفِ جهل، پیمانهٔ ظرایف نیست. لحظه لحظهٔ حضور در محضرشان، هماره احترام و محبتی شگرف در من برمی‌انگیزد؛ چونان که فرزندی را پدرش؛ چه، پدرانه به من می‌آموزند.

همچنین مراتب قدردانی خود را از گروه محترم آمار برای موافقت با صدور مجوز همکاری اینجانب با مؤسسهٔ تحقیقات جنگل‌ها و مراتع کشور و نیز جناب آقای دکتر عصاره، رئیس محترم مؤسسه، برای موافقت با این درخواست اعلام می‌دارم. بی‌شک، راهنمایی‌های بی‌دریغ **جناب آقای دکتر رضا اخوان**، که به حق مشاوری راستین بودند و مشتاقانه الفبای جنگل را به من آموختند، راهگشای اینجانب در آگاهی از کاربرد روش‌های قدرتمند آماری در تحقیقات جنگل و نگارش فصل پایانی بود که خالصانه از ایشان سپاسگزاری می‌کنم. عجیب آنکه، آشنایی من با بخش تحقیقات جنگل مؤسسه، به لطف و راهنمایی مردی از تبار کویر و با روحی به همان شگفتی و عظمت، **جناب آقای محمد درویش**، عضو محترم هیئت علمی بخش تحقیقات بیابان مؤسسه، محقق شد که انصاف نیست اقبال آشنایی با ایشان را نادیده انگارم و سپاس صمیمانهٔ خود را از بزرگواری ایشان اعلام ندارم.

از جناب آقای دکتر امیرتیمور پاینده برای بررسی نهایی پایان‌نامه و نیز جناب آقای دکتر محمدرضا فقیهی و سرکار خانم دکتر فیروزه ریواز که داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشتند نیز سپاسگزارم.

امید است نقش این قلم بر این چند برگ، یادگاری استوار و مؤثر بر کتاب آمار ایران باشد.

فرزانه صفوی منش [1]

تهران، دانشگاه شهید بهشتی

مرداد ۱۳۸۹

[1] f_safavimanesh@yahoo.com

فهرست مطالب

فهرست مطالب ت

فهرست اشکال ح

۱ فرایندهای نقطه‌ای ۱

۱.۱ فرایندهای نقطه‌ای ۱

۲.۱ برخی انواع فرایندهای نقطه‌ای ۴

۱.۲.۱ فرایندهای نقطه‌ای فضایی ۴

۲.۲.۱ فرایندهای نقطه‌ای پواسون ۶

۳.۲.۱ فرایندهای نقطه‌ای ساده ۸

۴.۲.۱ فرایندهای نقطه‌ای متناهی ۸

۵.۲.۱ فرایندهای نقطه‌ای مانا ۹

۶.۲.۱ فرایندهای نقطه‌ای همسانگرد ۹

۷.۲.۱ فرایندهای نقطه‌ای جنبش‌ناوردا ۹

۸.۲.۱ فرایندهای نقطه‌ای نشاندار ۹

۹.۲.۱ فرایندهای نقطه‌ای چندمتغیره ۱۱

۳.۱ توزیع احتمال یک فرایند نقطه‌ای ۱۱

۱.۳.۱ روش‌های یافتن توزیع یک فرایند نقطه‌ای ۱۲
۴.۱ اندازه‌های گشتاوری ۱۵
۱.۴.۱ اندازهٔ شدت مرتبهٔ اول ۱۶
۲.۴.۱ اندازه‌های گشتاوری مراتب بالا ۱۶
۵.۱ شرطی‌سازی درونی و بیرونی ۱۷
۱.۵.۱ توزیع پالم و شرطی‌سازی درونی ۱۷
۲.۵.۱ شدت شرطی پاپانجلو و شرطی‌سازی بیرونی ۱۸
۶.۱ آماره‌های خلاصه برای فرایندهای نقطه‌ای ۲۰
۱.۶.۱ تابع K ۲۰
۲.۶.۱ تابع L ۲۴
۷.۱ روش‌های ساختن فرایندهای نقطه‌ای ۲۴
۱.۷.۱ نگاشتن ۲۴
۲.۷.۱ تنک‌سازی ۲۵
۳.۷.۱ برهم‌نهی ۲۶
۴.۷.۱ خوشه‌بندی ۲۷

۲ از زنجیرهای مارکوف تا فرایندهای نقطه‌ای مارکوفی **۲۹**
۱.۲ زنجیرهای مارکوف ۲۹
۲.۲ فرایندهای نقطه‌ای مارکوفی ۳۰
۳.۲ انواع فرایندهای نقطه‌ای مارکوفی ۳۳
۱.۳.۲ فرایندهای نقطه‌ای مارکوفی پتانسیل جفتی ۳۳
۲.۳.۲ مدلی برای تصادفی‌بودن کامل فضایی ۳۵
۳.۳.۲ فرایندهای نقطه‌ای مارکوفی اشتراوس و نرم‌مغز ۳۶

۴.۳.۲ فرایندهای نقطه‌ای مارکوفی سخت‌مغز ۳۹
۵.۳.۲ فرایندهای نقطه‌ای مارکوفی منعی دنباله‌ای ساده ۳۹
۶.۳.۲ فرایندهای برهم‌کنشی ناحیه‌ای ۳۹
۷.۳.۲ فرایندهای نقطه‌ای مارکوفی همگن و ناهمگن ۴۰
۸.۳.۲ فرایندهای نقطه‌ای مارکوفی نشاندار ۴۳
۹.۳.۲ فرایندهای نقطه‌ای مارکوفی نزدیک‌ترین همسایه ۴۴

۳ شبیه‌سازی فرایندهای نقطه‌ای مارکوفی و برآورد پارامترها **۴۶**

۱.۳ مقدمه ۴۶
۲.۳ چگالی نرمال‌نشده و تابع نرمال‌ساز ۴۶
۳.۳ روش‌های شبیه‌سازی فرایندهای نقطه‌ای مارکوفی ۴۷
۱.۳.۳ الگوریتم متروپولیس - هیستینگس و شبیه‌سازی شرطی ۴۸
۲.۳.۳ فرایندهای تولد و مرگ فضایی و شبیه‌سازی غیر شرطی ۵۲
۳.۳.۳ شبیه‌سازی دقیق ۵۵
۴.۳.۳ استفاده از متغیر کمکی در شبیه‌سازی توزیع پسین ۵۶
۴.۳ برآورد پارامترهای مدل ۵۹
۱.۴.۳ روش ماکسیمم درستنمایی ۶۰
۲.۴.۳ روش ماکسیمم شبه‌درستنمایی ۶۱
۳.۴.۳ روش نیمرخ درستنمایی ۶۲
۵.۳ آزمودن نیکویی برازش مدل ۶۲
۱.۵.۳ آزمون پوشش ۶۴
۶.۳ تحلیل مانده‌ها ۶۴
۱.۶.۳ نمودارهای متغیرهای پنهانی ۶۵

۴ بررسی الگوی پراکنش درختان راش کلاردشت ۶۷

۱.۴ مقدمه ۶۷

۲.۴ پیشینهٔ بررسی الگوهای فضایی درختان ۶۸

۱.۲.۴ پیشینهٔ مطالعه در جهان ۶۹

۲.۲.۴ پیشینهٔ مطالعه در ایران ۶۹

۳.۴ الگوی پراکنش درختان در مراحل تحولی جنگل در توده‌های دست‌نخوردهٔ راش کلاردشت ۷۰

۱.۳.۴ روش نمونه‌برداری ۷۱

۲.۳.۴ درختان قطور و مدل مارکوفی ۷۵

۳.۳.۴ برازش مدل به داده‌ها ۷۶

۴.۳.۴ برازش مدل نشاندار ۸۰

۴.۴ بحث و نتیجه‌گیری ۸۳

واژه‌نامه ۸۵

نام‌نامه ۸۹

مراجع ۹۳

نمایه ۱۰۱

فهرست اشکال

۱.۱ نمونه‌ای از انواع الگوهای نقطه‌ای (گوریاد و دیگران، ۱۹۹۷) ۶

۲.۱ الگوی نقطه‌ای دهانهٔ آتشفشان‌ها در منطقه‌ای از اوگاندا (مارتینز و مارتینز) ۶

۳.۱ الگوی نقطه‌ای نشاندار شبیه‌سازی شده ۱۰

۴.۱ برآوردهای تابع K ریپلی انواع الگوهای نقطه‌ای شبیه‌سازی‌شده. نمودار بالا سمت چپ: الگوی خوشه‌ای، بالا سمت راست: تصادفی، نمودار پایین: تا فاصله‌ای مشخص، الگوی منظم و از آن به بعد تصادفی. ۲۳

۵.۱ نگاشتن (بدلی، ۲۰۰۴) ۲۵

۶.۱ تنک‌سازی (بدلی، ۲۰۰۴) ۲۶

۷.۱ برهم‌نهی (بدلی، ۲۰۰۴) ۲۷

۸.۱ خوشه‌بندی (بدلی، ۲۰۰۴) ۲۷

۱.۲ تحققی از یک فرایند اشتراوس شبیه‌سازی‌شده با پارامترهای $\gamma = ۰/۲$، $\beta = ۰/۵$، $r = ۱/۵$. ۳۷

۱.۴ موقعیت سه منطقهٔ نمونه‌گیری شده از هر مرحلهٔ تحولی نسبت به یکدیگر. پلات سمت راست بالا: مرحلهٔ اوج، پلات سمت راست پایین: مرحلهٔ تخریب، پلات سمت چپ: مرحلهٔ اولیه. ۷۲

۲.۴ الگوی پراکنش درختان در هر یک از مراحل اولیه، اوج و تخریب ۷۳

۳.۴ برآورد توابع K ریپلی الگوی نقطه‌ای هر یک از مراحل تکوینی ۷۴
۴.۴ الگوی نقطه‌ای درختان با قطر بیش از ۶۰ سانتی‌متر در مرحلهٔ تخریب و برآورد تابع K ۷۶
۵.۴ برآوردهای تابع K مدل‌های کاندیدای مدل برتر ۷۷
۶.۴ رفتار مانده‌های مدل‌های کاندیدای مدل برتر ۷۸
۷.۴ برآورد تابع‌های L مدل‌های برازش‌یافته به الگوی پراکنش درختان بسیار بلند در جنگل‌های آمازون (نیف و دیگران، ۲۰۰۵) ۷۹
۸.۴ فراوانی درخت‌ها بر حسب قطر ۸۱
۹.۴ الگوی پراکنش درختان قطور و درختان کم‌قطر در مرحلهٔ اوج. درختان قطور با مثلث و درختان کم‌قطر با دایره مشخص شده‌اند. ۸۲
۱۰.۴ برآورد تابع K ریپلی پس از برازش مدل اشتراوس به الگوی نقطه‌ای درختان کم‌قطر و درختان قطور مرحلهٔ اوج ۸۳

فصل ۱
فرایندهای نقطه‌ای

۱.۱ فرایندهای نقطه‌ای

هدف عمدهٔ فرایندهای نقطه‌ای مطالعه و تحلیل ساختار الگوهایی است که پدیده‌هایی تصادفی در فضاهای چندبعدی به وجود می‌آورند. به عنوان چند مثال از چنین ساختارهایی می‌توان از موقعیت درختان در یک جنگل، مکان چاه‌های نفت، موقعیت ناقلین یک بیماری در یک شهر، و موقعیت کهکشان‌ها در جهان خلقت نام برد. درختان، چاه‌های نفت، بیماران و کهکشان‌ها در این مثال‌ها همان پدیده‌هایی هستند که مدل‌بندی الگوی حاصل از توزیع تصادفی آن‌ها مورد نظر است.

تنوع داده‌های مورد مطالعه در شاخه‌های مختلف علمی، لزوم گسترش پایاپای ابزارهای مدل‌بندی و تحلیل آن‌ها را هر روز بیش از پیش آشکار می‌سازد. با رشد فناوری، روش‌های گردآوری داده‌های مورد مطالعه در فرایندهای نقطه‌ای نیز علاوه بر گسترده‌شدن، ساده‌تر و قابل فهم‌تر شده و به تبع ابداع روش‌های خودکار در گردآوری داده‌های مورد نیاز، امکان مطالعهٔ مجموعه‌داده‌هایی به‌مراتب بزرگ‌تر از مجموعه‌داده‌های پیشین فراهم شده است؛ تا جایی که امروزه، علاوه بر زمینه‌های کلاسیک کاربرد فرایندهای نقطه‌ای، همچون باستان‌شناسی و جنگلداری، زمینه‌های دیگری مانند پزشکی، نجوم، علم مواد، و مهندسی ارتباطات نیز به قلمروی کاربردی فرایندهای نقطه‌ای افزوده شده‌اند.

پالم، ریاضیدان سوئدی، در سال ۱۹۴۳ برای اولین بار اصطلاح «فرایندهای نقطه‌ای» [۱] را در یکی

[۱] Punktprozesse

از مقاله‌های خود [۲] به‌کار برد؛ گرچه، مطالعهٔ این‌گونه فرایندها از مدت‌ها پیش‌تر آغاز شده بود(لُوِن و تیچ، ۲۰۰۵). علاقه‌مندان به مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ پیشینهٔ فرایندهای نقطه‌ای می‌توانند به دیلی و ورجونز ((۱۹۸۸)، (۲۰۰۳)، (۲۰۰۸)) مراجعه کنند. همچنین به‌منظور آشنایی با مثال‌های بیشتری از این‌گونه فرایندها و نیز کاربرد آن‌ها در مدل‌بندی الگوهایی که به‌وفور در طبیعت یافت می‌شوند، ایلیان و دیگران (۲۰۰۸) منبع بسیار مناسبی است.

در ادامه، پیش از ارائهٔ تعریفی از فرایندهای نقطه‌ای، به بیان برخی مفاهیم مورد نیاز برای درک کامل تعریف مذکور می‌پردازیم. لازم به ذکر است در این پایان‌نامه همواره فضای احتمال $(\Omega, \Im, P)$ را، که فرایند تصادفی مورد نظر بر روی آن تعریف می‌شود، درنظرمی‌گیریم.

برخی مصادیق فرایندهای نقطه‌ای را به صورت مجموعه‌ای متناهی از نقاط به شکل

$$\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}, n = 0, 1, \ldots$$

در یک فضا مانند $\mathcal{X}$ در نظر گرفته و به آن یک پیکربندی می‌گوییم (ون‌لیشاوت، ۲۰۰۰). بدیهی است که پیکربندی‌های متناهی، «موضعاً متناهی» نیز هستند؛ بدین‌معنا که در هر مجموعهٔ بورل کراندار A، $A \subseteq \mathcal{X}$، حداکثر تعدادی متناهی از نقاط $\mathbf{x}$ قرار می‌گیرند. به بیانی دقیق‌تر، اگر $\mathbf{x}_A = \mathbf{x} \cap A$، تحدید پیکربندی $\mathbf{x}$ روی مجموعهٔ بورل کراندار A باشد، در این صورت، $N(\mathbf{x}_A) < \infty$، که در آن $N(\mathbf{x}_A)$ تعداد نقاط موجود در $\mathbf{x}_A$ است (مولر و واگه‌پترسن، ۲۰۰۴). خانوادهٔ همهٔ پیکربندی‌های موضعاً متناهی از فضای $\mathcal{X}$ را با $N^{lf} = N_{\mathcal{X}}^{lf}$ نمایش می‌دهیم.

بنابراین، هدف ما از به‌کارگیری فرایندهای نقطه‌ای، مدل‌بندی سازوکار تصادفی نهفته در داده‌هایی است که به عنوان یک پیکربندی تصادفی از پدیده‌ها در فضای $\mathcal{X}$ در نظر گرفته می‌شوند. به عبارت دیگر، بر خلاف استنباط آماری کلاسیک که بر اساس مدل‌بندی داده‌ها به عنوان تحققی از یک «بردار تصادفی» در فضای اقلیدسی R^d بنا می‌شود، فرایندهای نقطه‌ای به مدل‌بندی آن دسته از پدیده‌های تصادفی می‌پردازند که تحققی از یک بردار تصادفی نیستند و، در عوض، یک پیکربندی از نقاط در

[۲] ترجمهٔ این مقاله به زبان انگلیسی در سال ۱۹۸۸ تحت عنوان Intensity Variations in Telephone Traffic در جلد ۱۰ مجلهٔ North-Holland Studies in Telecommunications به چاپ رسیده است.

ناحیه‌ای معین از فضا هستند (ایلیان و دیگران، ۲۰۰۸). لازم به ذکر است برخی از ابزارهای پایه‌ای آمار کلاسیک همچون روش‌های نمونه‌گیری، تحلیل اکتشافی داده‌ها، برآورد پارامترها، برازش مدل، و آزمون فرض‌ها در تحلیل فرایندهای نقطه‌ای نیز همچنان کاربرد دارند.

یک فضای توپولوژیک را تفکیک‌پذیر می‌نامند، هر گاه شامل یک زیرمجموعهٔ چگال شمارا باشد؛ به‌عبارت دیگر، دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از عناصر فضا موجود باشد به قسمی که هر زیرمجموعهٔ باز ناتهی فضا شامل حداقل یک عنصر از این دنباله باشد. بدیهی است که هر فضای توپولوژیک منتهی‌شمارا، تفکیک‌پذیر است (رودین، ۱۹۷۶). فضای $n-$ بعدی اقلیدسی نیز مشهورترین مثال از فضاهای ناشمارای تفکیک‌پذیر است .

فضای متریک کامل نیز فضایی است که هر دنبالهٔ کوشی در آن همگرا به حدی باشد (رودین، ۱۹۷۶). فضای L^p و فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^d$ از جملهٔ نمونه‌های فضاهای کامل هستند.

تعریف ۱.۱. (دیلی و ورجونز، ۱۹۹۸) **نگاشت اندازه‌پذیر.** *نگاشت f از فضای اندازه‌پذیر $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1)$ به فضای اندازه‌پذیر $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2)$ را اندازه‌پذیر گویند، اگر و فقط اگر به ازای هر مجموعهٔ A، $A \in \mathfrak{F}_2$، $f^{-1}(A) \in \mathfrak{F}_1$.*

پس از این مقدمات به ارائهٔ تعریف دیلی و ورجونز (۱۹۸۸) از فرایندهای نقطه‌ای می‌پردازیم.

تعریف ۲.۱. فرایندهای نقطه‌ای. *فرض کنید $(\mathcal{X}, d)$ یک فضای متریک کامل تفکیک‌پذیر باشد. یک فرایند نقطه‌ای روی $\mathcal{X}$ نگاشتی مانند X از فضای احتمال $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ به N^{lf} است، هرگاه برای هر مجموعهٔ بورل کراندار A، $A \subseteq \mathcal{X}$، تعداد عناصر $\mathcal{X}$ که در A قرار می‌گیرند، یعنی $N(A) = N_X(A)$، یک متغیر تصادفی (متناهی) باشد.*

به‌بیان دیگر، فرایند نقطه‌ای X یک پیکربندی تصادفی است به‌طوری که به‌ازای هر مجموعهٔ بورل کراندار A، $A \subseteq \mathcal{X}$، تعداد نقاط موجود در A، یک متغیر تصادفی است. همچنین فرایند نقطه‌ای، به عنوان یک عنصر تصادفی، مقادیرش را در فضای اندازه‌پذیر $(N^{lf}, \aleph^{lf})$ می‌گیرد که در آن $\aleph^{lf}$ کوچکترین $\sigma-$ میدانی است که به‌ازای هر مجموعهٔ بورل کراندار A، $A \subseteq \mathcal{X}$، نگاشت $\mathbf{x} \mapsto N_{\mathbf{x}}(A)$ اندازه‌پذیر باشد.

لازم به ذکر است تعاریف دیگری نیز از فرایندهای نقطه‌ای ارائه شده است. تعاریفی بر مبنای اندازه‌های شمارشی تصادفی و نیز مجموعه‌های تصادفی از جملهٔ آن‌هاست که در اینجا از ذکر آن‌ها خودداری می‌کنیم. علاقه‌مندان به آشنایی با منابع موجود در این زمینه، می‌توانند به ون‌لیشاوت (۲۰۰۰) مراجعه کنند.

۲.۱ برخی انواع فرایندهای نقطه‌ای

در این قسمت به معرفی برخی از انواع فرایندهای نقطه‌ای می‌پردازیم.

۱.۲.۱ فرایندهای نقطه‌ای فضایی

تاکنون فرایندهای نقطه‌ای را بر روی یک فضای متریک کامل تفکیک‌پذیر دلخواه تعریف کردیم. همان‌طور که می‌دانیم فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^d$ نیز یک فضای متریک کامل تفکیک‌پذیر است. از آنجا که در کاربردها اغلب با این فضا سر و کار داریم، فرایندهای نقطه‌ای تعریف‌شده در این فضا، تحت عنوان «فرایندهای نقطه‌ای فضایی»، در طول سال‌ها به‌تفصیل مورد مطالعه واقع شده‌اند. وجه تسمیهٔ این‌گونه فرایندها، به ارتباط «نحوهٔ وابستگی پیشامدها به یکدیگر» با «وضعیت قرارگرفتن آن‌ها در فضا» بازمی‌گردد.

برای اجتناب از هر گونه سر در گمی و اشتباه، همواره اگر قصد اشاره به عضوی از کل فضا را داشته باشیم از آن با عنوان «نقطه» یاد می‌کنیم و در صورتی که منظور ما یکی از اعضای تحقق فرایند باشد، عنوان «پیشامد» را به‌کار می‌بریم. به عنوان مثال، در مطالعهٔ پراکنش گونه‌ای از درختان در یک جنگل، هر درخت یک «پیشامد» است که در «نقطه»‌ای از فضا تحقق یافته است. بدیهی است ممکن است در نقاطی از فضا هیچ درختی مشاهده نشود که در این صورت گوییم هیچ «پیشامدی» در آن «نقطه» رخ نداده است.

داده‌های فضایی

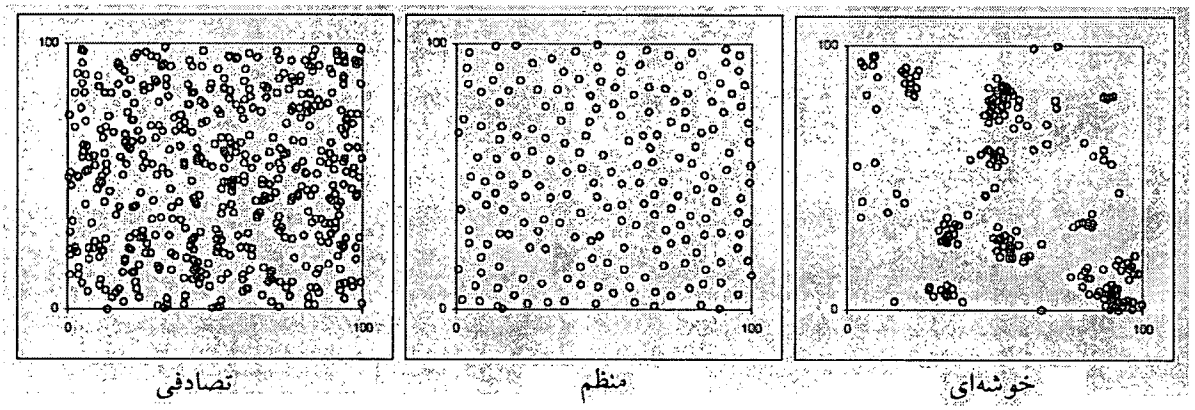
در حالت کلی، داده‌های فضایی را به صورت تحقق‌هایی از فرایند یا میدان تصادفی $\{X(t); t \in D\}$ در نظر می‌گیریم که در آن D مجموعه‌ای در $\mathbb{R}^d$ است (کِرِسی، ۱۹۹۳). اهمیت این نوع داده‌ها تا جایی است که امروزه شاخه‌ای از آمار، تحت عنوان «آمار فضایی» متولد شده است که به مطالعه و تحلیل چنین داده‌هایی می‌پردازد. این داده‌ها را در سه ردهٔ کلی «داده‌های زمین آماری»، «داده‌های مشبکه» و «الگوهای نقطه‌ای» مورد مطالعه قرار می‌دهند. در این پایان‌نامه، توجه خود را تنها به بررسی ساختار الگوهای نقطه‌ای که یکی از مهمترین انواع داده‌های فضایی هستند معطوف می‌داریم. بدین‌معنا که هر جا سخن از یک فرایند نقطه‌ای فضایی می‌رود، هر تحقق آن یک الگوی نقطه‌ای خواهد بود.

الگوهای نقطه‌ای

در حالت کلی، الگوهای نقطه‌ای را بنابر نحوهٔ قرار گرفتن پیشامدها در فضا و میزان وابستگی آن‌ها به یکدیگر به سه ردهٔ زیر تقسیم می‌کنند:

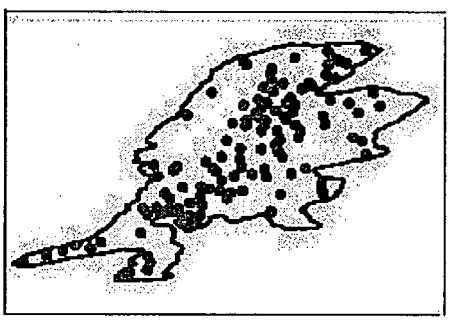
- تصادفی کامل فضایی
- منظم (که در نوشتگان تحقیقات جنگل "یکنواخت" نیز نامیده می‌شود)
- خوشه‌ای (که تحت عنوان‌های انبوهشی یا کپه‌ای نیز شناخته می‌شوند.)

الگوهای نقطه‌ای تصادفی کامل فضایی، الگوهایی حاصل از پراکنش پیشامدهایی هستند که هیچ‌گونه ساختاری در آن‌ها مشاهده نمی‌شود. در مقابل، دو ردهٔ دیگر، هر یک، نوعی از ساختارهای پراکنش پیشامدها را تشریح می‌کنند. بدین‌ترتیب که الگوهای نقطه‌ای خوشه‌ای اغلب مبیّن ساختار پراکنش پیشامدهایی هستند که تمایل به تجمع در ناحیه یا ناحیه‌هایی از فضا دارند؛ حال آنکه الگوهای نقطه‌ای منظم، حاصل از پراکنش منظم‌تر پیشامدها هستند. در شکل ۱.۱ نمونه‌ای از هر یک از این الگوهای نقطه‌ای را خواهید یافت.



شکل ۱.۱: نمونه‌ای از انواع الگوهای نقطه‌ای (گوریاد و دیگران، ۱۹۹۷)

به عنوان مثالی دیگر، شکل ۲.۱ الگوی پراکنش فضایی ۱۲۰ دهانهٔ آتشفشان در غرب اوگاندا را نشان می‌دهد که هر نقطه در آن نشان‌دهندهٔ مکان یک دهانه است (مارتینز و مارتینز، ۲۰۰۲).



شکل ۲.۱: الگوی نقطه‌ای دهانهٔ آتشفشان‌ها در منطقه‌ای از اوگاندا (مارتینز و مارتینز)

شایان ذکر است فرایندهای نقطه‌ای مارکوفی، که در این پایان‌نامه به آن‌ها پرداخته می‌شود، ابزاری مناسب برای مدل‌بندی انواع خاصی از الگوهای نقطه‌ای «منظم» هستند.

۲.۲.۱ فرایندهای نقطه‌ای پواسون

فرایندهای نقطه‌ای پواسون یکی از مهمترین انواع فرایندهای نقطه‌ای هستند. اهمیت آن‌ها از آن جهت است که این‌گونه فرایندها یکی از متداول‌ترین مدل‌های شمارش و اندازه‌های شمارشی محسوب می‌شوند و، علاوه بر آن، بسیاری دیگر از فرایندهای نقطه‌ای را می‌توان بر اساس آن تعریف کرد. این فرایند