وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
دانشکده‌ی علوم پایه
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

جهت اخذ درجه‌ی کارشناسی ارشد

رشته‌ی ریاضی کاربردی

عنوان:

حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری با روش تبدیل دیفرانسیل تعمیم‌یافته

استاد راهنما:

دکتر علی خانی

استاد مشاور:

پروفسور محمد جهانشاهی

پژوهشگر:

مهدیه بادامچی ممقانی

شهریور /۱۳۹۳
تبریز/ ایران

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

دو وجود گران قدر، ارزشمندترین سرمایه های زندگیم

پدر و مادر عزیزم

که همواره مدیون محبت هایشان بوده و هستم ...

و همه ی کسانی که نیک می اندیشند و عقل و منطق را پیشه ی خود نموده و جز رضای الهی هدفی ندارند و لحظه ای بعد انسانی و وجدانی خود را فراموش نمی کنند و انسان را با همه ی تفاوت هایش ارج می نهند.

سپاس گزاری

در ابتدا خدای مهربان را شاکرم که در مرحله‌ای دیگر از تحصیل لطف خود را چون همیشه به من ارزانی داشت. او که همیشه در کنارم، مانند دستی یاری‌گر و چراغی روشن‌گر، قوت قلب و راهنمای راهم بود و همواره یاور من در فراز و نشیب زندگی بوده است تا با پای محکم و با اعتماد و توکل گام بردارم، به امید آن‌که توفیق یابم جز خدمت به خلق نکوشم.
اینک در انتهای این راه، بر حسب وظیفه و از باب "من لم یشکر المخلوق، لم یشکر الخالق " از پدر و مادر عزیزم، که در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاوری بی‌چشم‌داشت بوده‌اند و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و گوهر سخنشان، آرامش‌بخش ذهنم و نگاه مهربانشان، قوت قلبم بوده سپاس گزارم.
از خواهران مهربانم و برادران عزیزم و خانواده‌های محترمشان که گرمای امیدبخش وجودشان در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبانم بودند، نهایت سپاس و قدردانی را دارم.
از استاد ارجمند، جناب آقای دکتر علی خانی که با حسن خلق و فروتنی راهنمای بنده در تکمیل پایان‌نامه بودند، صمیمانه تشکر می‌کنم.
از اساتید ارجمند، جناب آقای پروفسور محمد جهانشاهی که زحمت مطالعه و مشاوره‌ی پایان‌نامه و جناب آقای دکتر مجتبی رنجبر که زحمت داوری پایان‌نامه را تقبل فرمودند، نهایت سپاس و قدردانی را دارم. همچنین از جناب آقای داود نظری بخاطر قبول زحمت مطالعه‌ی پایان‌نامه کمال تشکر را دارم.
بر خود لازم می‌دانم تا از کلیه‌ی اساتید و معلمانی که در دوران تحصیل از محضرشان کسب فیض نموده و افتخار شاگردیشان را داشته‌ام، تشکر نمایم.

مهدیه بادامچی ممقانی
شهریور ۱۳۹۳
تبریز، ایران

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان‌نامه، روش تبدیل دیفرانسیل تعمیم‌یافته برای به‌دست آوردن جواب‌های تحلیلی-تقریبی معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری ارائه شده است. این روش یک جواب تحلیلی به شکل یک سری توانی نامتناهی با مؤلفه‌هایی که به آسانی محاسبه می‌شوند تعیین می‌کند. با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل تعمیم‌یافته ($GDTM$) می‌توانیم جواب معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری خطی و غیر خطی را با خطای ناچیز نسبت به جواب دقیق به‌دست آوریم. این روش یک ابزار امیدبخش برای حل بسیاری از معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری خطی و غیر خطی می‌باشد. همچنین مثال‌هایی برای نشان دادن کارایی و دقت روش پیشنهادی ارائه شده است.

واژه های کلیدی: معادله‌ی دیفرانسیل کسری، روش تبدیل دیفرانسیل، محاسبات کسری، رابطه‌ی تیلور تعمیم‌یافته، مشتق کسری کاپوتو.

پیشگفتار

در این پایان‌نامه که بر اساس مراجع [۸، ۱۰، ۱۵، ۱۷، ۲۷] تنظیم شده است، حل معادلات انتگرال- دیفرانسیل کسری با روش تبدیل دیفرانسیل تعمیم‌یافته را بررسی کرده‌ایم.

معادلات انتگرال یکی از ابزارهای مهم در ریاضیات کاربردی و محض است. این نوع معادلات در مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های غیرخطی، پدیده‌های فیزیکی و علوم مهندسی ظاهر می‌شوند. اکثر پدیده‌های فیزیکی و مسائل مهندسی مانند دینامیک سیالات، مکانیک کوانتومی، انتقال حرارت، رشد جمعیت و وراثت، مطالعه‌ی رفتار راکتورهای هسته‌ای ، انتقال بیماری و ... را می‌توان از طریق مدل‌سازی ریاضی آن‌ها درک کرد. در واقع بعد از بیان فیزیکی این مسائل می‌توان مدل ریاضی آن‌را بیان کرد که با توجه به نوع تحلیل به کار رفته و همچنین فرایند مورد مطالعه، معادلات حاصل به شکل معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات انتگرال یا معادلات انتگرال- دیفرانسیل می‌باشد.

حال فرض کنید یک سیستم فیزیکی با استفاده از معادلات انتگرال و معادلات انتگرال- دیفرانسیل مدل‌سازی شده باشد. به‌دست آوردن جواب تحلیلی این معادلات اگر ممکن باشد، خیلی دشوار و پیچیده است. با گسترش و پیشرفت کامپیوترها و به‌وجود آمدن زبان‌های برنامه‌نویسی، روش‌های عددی که تقریبی برای جواب این نوع معادلات به‌دست می‌آورند، اهمیت ویژه‌ای پیدا کردند. از این‌رو مطالعات قابل توجه و زیادی برای حل معادلات انتگرال و انتگرال- دیفرانسیل یک بعدی انجام شده است.

همچنین در سال‌های اخیر استفاده از محاسبات کسری به‌طور گسترده‌ای در علوم مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. از این‌رو حل معادلات شامل انتگرال و مشتق کسری از اهمیت خاصی برخوردار است و افراد بسیاری را برای به‌دست آوردن روشی سریع و کارا به تکاپو واداشته است.

روش تبدیل دیفرانسیل نیز یک روش تحلیلی- تقریبی بر اساس سری تیلور می‌باشد. این روش نیز کارایی خود را در حل معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات انتگرال و معادلات انتگرال- دیفرانسیل نشان داده است.

این پایان‌نامه شامل چهار فصل می‌باشد.
در فصل اول، مفاهیم اولیه و مقدماتی معادلات انتگرال بیان شده است.
در فصل دوم، محاسبات کسری معرفی شده است.
در فصل سوم، روش تبدیل دیفرانسیل و روش تبدیل دیفرانسیل تعمیم‌یافته و قضایای مربوط به آنها بیان شده است.
در فصل چهارم، حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری با روش تبدیل دیفرانسیل تعمیم‌یافته به همراه چند مثال عددی برای بررسی دقت و کارایی روش بیان شده است.

فصل ۱

مفاهیم وتعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل مفاهیم اولیه و مقدماتی معادلات انتگرال را بیان خواهیم کرد.

۲.۱ تاریخچه

نظریه‌ای وجود دارد که اولین پیدایش معادلات انتگرال به کارهای پژوهشی لاپلاس[۱] در سال ۱۷۸۲ برمی‌گردد. وی تبدیل انتگرال

$$\int_{\circ}^{\infty} \mathrm{e}^{-sx} f(x)\, dx$$

را به ازای $s > \circ$ را در حل معادلات انتگرال تفاضلی و معادلات دیفرانسیل به‌کار برد.

در جریان تکامل و پیشرفت ریاضیات در سال ۱۸۱۱، فوریه[۲]، فیزیک‌دان و ریاضی‌دان فرانسوی با استفاده از سری‌های مثلثاتی در حل مسئله‌ی انتقال گرما به نتایجی در رابطه با معادلات انتگرال دست یافت. در سال ۱۸۲۰ فوریه روی نظریه‌ی حرارت کار کرد و تبدیلات فوریه را مطرح کرد، که پیدا کردن معکوس تبدیلات فوریه به حل معادلات انتگرال منجر شد، وی در کتاب معروفش، نظریه‌ی تحلیلی گرما، مسئله‌ی معکوس معادله‌ی

$$f(x) = (۲\pi)^{-\frac{۱}{۲}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-itx) g(t)\, dt$$

[۱] Laplace

[۲] Fourier

را با فرض معلوم بودن f و جست‌وجوی مجهول g در نظر گرفت و جواب

$$g(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) f(t)\, dt$$

که به‌عنوان تبدیل معکوس فوریه شناخته شده است را معرفی کرد. البته می‌توان f را به‌عنوان معکوس عملگر انتگرال فوریه در نظر گرفت. این تعبیر بعدها در انتهای قرن نوزدهم توسط ولترا به‌کار برده شد. با توجه به این‌که فوریه در سال‌های ۱۷۶۳ – ۱۸۳۰ رابطه‌ای که امروزه به‌عنوان تبدیل فوریه می‌شناسیم را به‌دست آورد، عده‌ای وی را آغازگر نظریه‌ی معادلات انتگرال می‌دانند.

آبل[۳]، ریاضی‌دان نروژی در رساله‌اش در سال‌های ۱۸۲۳ – ۱۸۲۶ برای حل معادلات دیفرانسیل از معادله‌ی انتگرال

$$f(x) = \int_a^t (x-s)^{-\alpha} y(s)\, ds, \qquad 0 < \alpha < 1$$

استفاده کرد، که در آن $f(x)$ یک تابع پیوسته و معلوم می‌باشد و در شرط $f(a) = 0$ صدق می‌کند و همچنین $y(s)$ تابع مجهول است. در همان سال پواسن[۴] در نظریه‌ی مغناطیسی خود نوعی معادله‌ی انتگرال به‌صورت

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t) y(x)\, dx$$

را مطرح نمود و آن‌را با بسط $y(x)$ به یک سری توانی با پارامتر λ حل کرد.

در سال ۱۸۲۳، لیوویل[۵] بدون آگاهی از کار آبل معادله‌ی انتگرالی به نام خودش معرفی کرد. وی در سال ۱۸۳۷ رابطه‌ی بین معادله‌ی دیفرانسیل و معادله‌ی انتگرال را مطرح کرد و نشان داد که جواب خصوصی یک معادله‌ی دیفرانسیل معین به‌وسیله‌ی یک معادله‌ی انتگرال تعیین می‌شود.

در سال ۱۸۷۰، نیومن[۶] جواب مسئله‌ی دیریکله[۷] را به صورت جواب یک معادله‌ی انتگرال معادل نشان داد و مسئله‌ی دیریکله را به یک معادله‌ی انتگرال تبدیل کرد، که اصطلاحاً به آن معادله‌ی انتگرال با شرایط مرزی می‌گویند.

در سال ۱۸۶۰، روشه[۸]، در سال ۱۸۸۴، سوناین[۹] و در سال ۱۸۸۸، بویس–ریموند[۱۰] برای حل

[۳] Abel

[۴] Poisson

[۵] Liouville

[۶] Neumann

[۷] Direclet

[۸] Rouche

[۹] Sonine

[۱۰] Bois-Reymond

معادلات انتگرال گوناگون، به‌ویژه معادلات آبل تلاش کردند. عنوان "معادلات انتگرال" اولین بار توسط بویس-ریموند به‌کار برده شده است.

سال ۱۸۹۵ شروع جدیدی در نظریه‌ی معادلات انتگرال به‌واسطه‌ی ریاضی‌دان ایتالیایی ولترا[۱۱] رقم خورد. وی معادلات کلی‌تری به‌صورت

$$\int_{\circ}^{x} k(x,s)f(s)\,ds = g(x)$$

یا

$$f(x) + \int_{\circ}^{x} k(x,s)f(s)\,ds = g(x)$$

را در نظر گرفت، که هدف او اثبات وجود معکوس یک عملگر انتگرال بود، یعنی ولترا مسئله‌ی حل معادله‌ی انتگرال را معادل با یافتن معکوس یک عملگر انتگرال معین قرار داده بود.

در حدود سال‌های ۱۹۰۰ – ۱۹۰۳ ریاضی‌دان مشهور سوئدی به‌نام فردهلم[۱۲] در اثبات وجود جواب مسئله‌ی دیریکله از معادلات انتگرال استفاده کرد.

سال‌ها پس از فردهلم و ولترا بحث اصلی مطالعه‌ی معادلات انتگرال بر سر پیشرفت و توسعه‌ی آن از دیدگاه آنالیز تابعی بود. معادلات انتگرال به‌عنوان یک مبحث مهم در ریاضیات کاربردی ادامه یافت، تا این‌که برونر[۱۳] و واندرهاون[۱۴] در سال ۱۹۸۶ و پس از آن هک‌بوش[۱۵] در سال ۱۹۹۵ و نهایتا اتکینسون[۱۶] نیز در همان سال کتاب‌هایی در مورد نظریه‌ی عمومی معادلات انتگرال و رفتار عددی این‌گونه معادلات منتشر کردند.

[۱۱] Volterra

[۱۲] Fredholm

[۱۳] Bruner

[۱۴] Vander Hauwen

[۱۵] Hackbusch

[۱۶] Atkinson

۳.۱ معادلات انتگرال

تعریف ۱.۱. معادله‌ی انتگرال معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $y(x)$ زیر علامت انتگرال قرار داشته باشد. به بیان دیگر، هر معادله‌ای به‌صورت

$$\phi(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)y(t)\,dt \tag{۱.۱}$$

را یک معادله‌ی انتگرال می‌گویند.

در معادله‌ی(۱.۱)، $k(x,t)$ هسته ی معادله‌ی انتگرال نامیده می‌شود و $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال هستند. باید توجه کرد که هسته‌ی معادله‌ی انتگرال و پارامتر λ و توابع $\alpha(x)$، $\beta(x)$ و $f(x)$ معلوم هستند. هدف ما تعیین تابع مجهول $y(x)$ است که در (۱.۱) صدق کند.

۴.۱ دسته‌بندی معادلات انتگرال

دو رده‌ی مهم از معادلات انتگرال، معادلات انتگرال فردهلم و ولترا هستند.

۱.۴.۱ معادلات انتگرال فردهلم

ساختار کلی یک معادله‌ی انتگرال خطی فردهلم نوع دوم که در آن حد پایین و حد بالای انتگرال‌گیری به‌ترتیب اعداد ثابت a و b هستند به‌صورت

$$\phi(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} k(x,t)y(t)\,dt, \quad x \in [a,b] \tag{۲.۱}$$

می‌باشد. در این معادله λ، a و b مقادیری معلوم هستند و تابع $k(x,t)$ به‌عنوان هسته‌ی معادله‌ی انتگرال و تابع $f(x)$ توابعی معلوم هستند.

اگر $\phi(x) = ۰$، معادله‌ی انتگرال به معادله‌ی انتگرال خطی فردهلم نوع اول تبدیل می‌شود. اگر $f(x) = ۰$، معادله‌ی انتگرال را همگن و در غیر این‌صورت آن‌را غیرهمگن می‌گویند.

اگر عبارت داخل انتگرال به‌جای $k(x,t)y(t)$، عبارتی نظیر $k(x,t)F(y(t))$ یا $k(x,t,y(t))$ باشد، معادله‌ی انتگرال (۲.۱) به معادله‌ی انتگرال غیر خطی فردهلم تبدیل می‌شود.

در صورتی‌که عبارت داخل انتگرال به‌صورت $k(x,t)F(y(t))$ باشد، آن‌گاه معادله‌ی انتگرال غیر خطی فردهلم از نوع هامرشتاین[۱۷] و اگر عبارت داخل انتگرال به‌صورت $k(x,t,y(t))$ باشد، آن‌گاه معادله‌ی انتگرال غیر خطی فردهلم از نوع اوریسون[۱۸] می‌باشد.

۲.۴.۱ معادلات انتگرال ولترا

ساختار کلی یک معادله‌ی انتگرال خطی ولترای نوع دوم که در آن حداقل یکی از حدود انتگرال‌گیری متغیر بوده و معمولا حد بالای انتگرال به‌عنوان متغیر انتخاب می‌شود، به‌صورت

$$\phi(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)y(t)\,dt, \qquad x \in [a,b] \tag{۳.۱}$$

می‌باشد. در این معادله λ و a مقادیری معلوم هستند و تابع $k(x,t)$ به‌عنوان هسته‌ی معادله‌ی انتگرال و تابع $f(x)$ توابعی معلوم هستند.

در این حالت نیز اگر $\phi(x) = ۰$، معادله‌ی انتگرال به معادله‌ی انتگرال خطی ولترای نوع اول تبدیل می‌شود و اگر $f(x) = ۰$، معادله‌ی انتگرال را همگن و در غیر این‌صورت آن‌را غیرهمگن می‌گویند. اگر عبارت داخل انتگرال به‌جای $k(x,t)y(t)$، عبارتی نظیر $k(x,t)F(y(t))$ یا $k(x,t,y(t))$ باشد، معادله‌ی انتگرال (۳.۱) به معادله‌ی انتگرال غیر خطی ولترا تبدیل می‌شود. در صورتی‌که عبارت داخل انتگرال به‌صورت $k(x,t)F(y(t))$ باشد، آن‌گاه معادله‌ی انتگرال غیر خطی ولترا از نوع هامرشتاین و اگر عبارت داخل انتگرال به‌صورت $k(x,t,y(t))$ باشد، آن‌گاه معادله‌ی انتگرال غیر خطی ولترا از نوع اوریسون می‌باشد.

باید توجه کرد که رابطه‌ی (۳.۱) را می‌توان به‌عنوان یک حالت خاص از معادلات انتگرال فردهلم در نظر گرفت، بطوری‌که هسته‌ی $k(x,t)$ برای $t > x$ و $x \in [a,b]$ صفر فرض شود، یعنی

$$k(x,t) = \begin{cases} \tilde{k}(x,t), & a \le t \le x, \\ ۰, & x < t \le b, \end{cases}$$

که در آن $\tilde{k}(x,t)$ موجود در ضابطه‌ی اول همان هسته‌ی معادله‌ی انتگرال ولترا است.

---

[۱۷] Hammerstein

[۱۸] Urysohn

مثال‌هایی از انواع معادلات انتگرال

معادله‌ی انتگرال فردهلم نوع دوم خطی $y(x)+\int_{0}^{1}\sin(x+t)y(t)\,dt=\cos(t)$

معادله‌ی انتگرال فردهلم نوع اول خطی $\int_{0}^{1}\frac{1}{x-t}y(t)\,dt=x$

معادله‌ی انتگرال ولترای نوع دوم خطی $y(x)+\int_{0}^{x}e^{x-t}y(t)\,dt=x$

معادله‌ی انتگرال ولترای نوع اول خطی $\int_{0}^{x}e^{x-t}y(t)\,dt=x$

معادله‌ی انتگرال ولترای نوع دوم غیر خطی از نوع هامرشتاین $y(x)+\int_{0}^{x}\sin(x+t)y^{2}(t)\,dt=x$

معادله‌ی انتگرال فردهلم نوع دوم غیر خطی از نوع اوریسون $y(x)+\int_{0}^{1}\sin(x+ty(t))\,dt=1$

۵.۱ ارتباط بین معادله‌ی دیفرانسیل و معادله‌ی انتگرال

ارتباط تنگاتنگی بین معادلات انتگرال و مسائل مقدار اولیه و مسائل مقدار مرزی وجود دارد و این ارتباط نقطه‌ی عطفی برای آن‌دسته از معادلات دیفرانسیل که حل آن‌ها از روش معمول مشکل است می‌باشد و با تبدیل به معادله‌ی انتگرال می‌توان آن‌ها را حل کرد. همچنین در مواردی که با حل عددی یک مسئله روبرو هستیم، تبدیل معادله‌ی دیفرانسیل به یک معادله‌ی انتگرال باصرفه‌تر است، چون در آنالیز عددی خطای دیفرانسیل‌گیری به‌صورت صعودی افزایش می‌یابد، ولی با صرف‌نظر کردن از جزئیات، خطای انتگرال گیری عددی به سمت یک مقدار مشخص میل می‌کند.

معادله‌ی دیفرانسیل از نوع مسائل مقدار مرزی را می‌توانیم به معادله‌ی انتگرال فردهلم و معادله‌ی دیفرانسیل از نوع مسائل مقدار اولیه را می‌توانیم به معادله‌ی انتگرال ولترا تبدیل کنیم.

به‌عنوان مثال مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی ناهمگن

$$y''(x)+y(x)=\cos(x),$$
$$y(0)=0,\ y'(0)=1$$

به معادله‌ی انتگرال ولترای خطی ناهمگن نوع دوم

$$y(x)+\int_{0}^{x}(x-t)y(t)dt=\cos(x)-x$$

تبدیل می‌شود.

یا به‌عنوان مثال دیگر، مسئله‌ی مقدار مرزی

$$y''(x) + y(x) = x, \quad ۰ < x < ۱,$$
$$y(۰) = ۱,\ y(۱) = ۰$$

به معادله‌ی انتگرال فردهلم خطی ناهمگن نوع دوم به‌صورت

$$y(x) - \int_{۰}^{۱} k(x,t)y(t)\,dt = ۲x - ۱$$

تبدیل می‌شود که در آن هسته‌ی $k(x,t)$ عبارت است از:

$$k(x,t) = \begin{cases} t(۱-x), & ۰ \le t \le x, \\ x(۱-t), & x \le t \le ۱. \end{cases}$$

۶.۱ معادلات انتگرال-دیفرانسیل

در اوایل سال ۱۹۰۰ ولترا نوع جدیدی از معادلات که در مطالعه‌ی پدیده‌ی رشد جمعیت و تأثیر وراثت با آن مواجه شده بود را معرفی کرد که به معادلات انتگرال-دیفرانسیل معروف شدند. این نوع معادلات در مواردی نظیر انتقال حرارت، پدیده‌ی انتشار، پخش نوترون، فیزیک، زیست‌شناسی و علوم مهندسی کاربرد فراوانی دارند.

تعریف ۲.۱. اگر یک معادله‌ی انتگرال شامل مشتقاتی از تابع مجهول نیز باشد، آن‌را معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل می‌گویند.

معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل غیر خطی ولترا به‌صورت

$$Dy(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)F(y(t))dt, \quad x \in [a,b] \qquad (۴.۱)$$

با شرایط

$$\sum_{j=۰}^{m-۱} (a_{ij}y^{(j)}(a) + c_{ij}y^{(j)}(b)) = d_i, \quad i = ۰, ۱, ..., m-۱$$

می‌باشد، که در آن D عملگر دیفرانسیل از مرتبه‌ی m با ضرایب $p_i(x)$، $i = ۰, ۱, ..., m$ می‌باشد و توابع $f(x)$ و $k(x,t)$ توابعی معلوم هستند و پارامتر λ نیز عددی معلوم می‌باشد.

در رابطه‌ی (۴.۱)، اگر $F(y(t)) = y(t)$، معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل را خطی می‌گویند. همچنین اگر کران بالای انتگرال به‌جای x عدد ثابت b، آن‌را معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل فردهلم می‌گویند.

هرگاه عملگر D، عملگر همانی باشد، آن‌گاه معادله‌ی (۴.۱) به صورت

$$y(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t)F(y(t))\,dt$$

نوشته می‌شود، که یک معادله‌ی انتگرال است.

یکی از مواردی که معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل ولترا ظاهر می‌شود در تبدیل یک معادله‌ی انتگرال به معادله‌ی دیفرانسیل است.

به‌عنوان مثال، با مشتق‌گیری از معادله‌ی انتگرال

$$y(x) - \int_۰^x (t-x)y(t)\,dt = x^۲ + \frac{۱}{۱۲}x^۴$$

معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل

$$y'(x) + \int_۰^x y(t)\,dt = ۲x + \frac{۱}{۳}x^۳,$$
$$y(۰) = ۰$$

نتیجه می‌شود، با مشتق‌گیری مجدد از رابطه‌ی فوق، معادله‌ی دیفرانسیل

$$y''(x) + y(x) = ۲ + x^۲,$$
$$y(۰) = ۰,\ y'(۰) = ۰$$

نتیجه خواهد شد.

مثال‌هایی از انواع معادلات انتگرال-دیفرانسیل

معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل ولترای غیر خطی مرتبه‌ی اول

$$y'(x) + y(x) + ۲\int_{۰}^{x} xt\mathrm{e}^{-y^{۲}(t)}\,dt = ۱,\quad x \in [۰, ۱],$$
$$y(۰) = ۰.$$

معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل ولترای غیر خطی مرتبه‌ی چهارم

$$y^{(۴)}(x) - \int_{۰}^{x} \mathrm{e}^{-t}y^{۲}(t)\,dt = ۱,\quad x \in [۰, ۱],$$
$$y(۰) = ۱,\ y'(۰) = ۱,$$
$$y(۱) = \mathrm{e},\ y'(۱) = \mathrm{e}.$$

معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل فردهلم خطی مرتبه‌ی دوم

$$y''(x) - \int_{۰}^{۱} xty'(t)\,dt = \mathrm{e}^{x} - x,\quad x \in [۰, ۱],$$
$$y(۰) = ۱,\ y'(۰) = ۱.$$

معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل فردهلم خطی مرتبه‌ی اول

$$y'(x) + \int_{۰}^{۱} \mathrm{e}^{x-t}y(t)\,dt = x,\quad x \in [۰, ۱],$$
$$y(۰) = ۰.$$

فصل ۲

محاسبات کسری

۱.۲ مقدمه

محاسبات کسری شاخه‌ای از ریاضیات است که کاربردهای فراوانی در علوم و مهندسی دارد و به معنای محاسبه‌ی کسرها نمی‌باشد. محاسبات کسری در واقع تعمیمی از دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه‌ی صحیح به یک مرتبه‌ی دلخواه حقیقی یا مختلط می‌باشد و به‌دلیل کاربردهای زیاد در اکثر زمینه‌ها مانند فیزیک، شیمی و مهندسی افراد زیادی را به خود جذب کرده است. تحقیقات با مجموعه‌ای از کاربردها در شاخه‌های مختلف در [۱۳، ۲۶، ۲۷] وجود دارد.

موضوع محاسبات کسری با این‌که از لحاظ پایه‌ای یک موضوع قدیمی بوده و پیشینه‌ی آن به حدود ۳۰۰ سال قبل برمی‌گردد، اما تا چند دهه‌ی اخیر به‌دلیل عدم برقراری ارتباط با فیزیک یا به عبارتی، نبود مفاهیم فیزیکی و مسائل کاربردی، رشد چندانی نکرده است و تنها از لحاظ تئوری محض توسعه داده شده است و فقط قابل توجه ریاضی‌دانان بوده است، اما در چند دهه‌ی اخیر این موضوع رشد چشم‌گیری داشته است و بسیاری از پدیده‌های طبیعی مانند رشد جمعیت و ترافیک با استفاده از محاسبات کسری مدل‌بندی شده است. همچنین کاربرد مهم و اساسی مشتق و انتگرال کسری را می‌توان در نظریه‌ی کنترل سیستم‌های دینامیکی مشاهده نمود، حتی امروزه می‌توان کاربرد این موضوع را در علوم پزشکی نیز مشاهده کرد.