دانشگاه تربیت معلم

دانشکده‌ی علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)

عنوان

همگرایی هم مکانی اسپلاین برای معادلات انتگرال ولترای نوع دوم

تدوین

سیده نجمه وفایی

استاد راهنما

دکتر شهنام جوادی

مهر ۱۳۹۰

تقدیر و تشکر

از همه‌ی کسانی که در به ثمر رساندن این پایان نامه سهیم بودند، تشکر می‌کنم. از جناب آقای دکتر شهنام جوادی که با راهنمایی‌های مفید و ارزنده و دقت نظر خود یاریم کردند، کمال تشکر را دارم. بی‌شک بدون کمک ایشان انجام این کار میسر نبود.

از داوران داخلی و خارجی محترم جناب آقای دکتر سعیدیان و جناب آقای دکتر شاهرضایی به دلیل مطالعه، داوری و ارایه‌ی پیشنهادات مفید خود، که سبب بهبود کیفیت مطالب شدند، تشکر و قدردانی می‌کنم.

این فرصت را غنیمت شمرده و از زحمات جناب آقای پروفسور بابلیان، استاد بزرگ وگران‌قدرم تشکر و قدردانی می‌نمایم. همچنین از جناب آقای دکتر صنعت پور، که از راهنمایی‌های مفید و سودمند ایشان، استفاده کردم، ممنون و متشکرم. از سرکار خانم گلزاری هم که زحمت تایپ این کار را به عهده داشتند، تشکر می‌کنم.

در آخر از همسر عزیزم که با همکاری، دل‌گرمی و و پشتیبانی خود در این مدت، مرا همراهی کردند، بی‌نهایت سپاس‌گزارم.

تقدیم به مادر عزیزم ، تنها انگیزه‌ی هستی

چکیده

تخمین هایی برای تصویرهای درونیاب گام به گام ارایه کرده‌ایم. وابستگی شعاع طیفی ماتریس تبدیل این تخمین‌ها به ما کمک می‌کند تا همگرایی نقطه وار این تصویرگرها را به عملگر همانی پیدا کنیم. این کار با به کارگیری قضایای همگرایی اصلی برای معادلات عملگر موجب می‌شود تا همگرایی روش هم مکانی برای معادلات انتگرال ولترای نوع دوم در فضای توابع پیوسته و یا چند بار مشتق‌پذیر را به دست آوریم. همچنین پایداری عددی روش هم مکانی اسپلاین برای این دسته از معادلات انتگرال بررسی شده و شرایط کافی برای پایداری عددی به دست آمده است و کاربردهایی در مورد انواع عملی اسپلاین ها بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی: معادلات انتگرال ولترا، روش هم مکانی اسپلاین، عملگرهای درونیاب اسپلاین، پایداری، همگرایی منظم، مرتبه همگرایی داده شده

رده‌بندی موضوعی ریاضی ۲۰۱۰: 45D05، 65D07، 65L20، 65R20.

مقدمه

در این پایان‌نامه روش هم مکانی را برای حل معادلات انتگرال ولترای نوع دوم به کار می‌بریم. برای همین به کمک مقالات دانشجویان و اساتید دانشگاه تارتو روش هم مکانی اسپلاین گام به گام را شرح و مساله همگرایی را برای آن بررسی می‌کنیم. در فصل یک به بیان تعاریف و مفاهیم مورد نیاز برای این روش می‌پردازیم. مفاهیمی چون فشردگی، منظم بودن و پایداری مربوط به همگرایی عملگرها تعریف شده است.

آقای دکتر اوجا در [18] به بررسی پایداری روش پرداخته و شرایط کافی برای آن را بیان کرده است.به کمک این مقاله در فصل ۲ روش هم مکانی گام به گام را شرح داده‌ایم و یک معادله آزمون برای آن مثال زده‌ایم. آقای کانگرو در [13] همگرایی روش را دنبال کرده که به کمک آن در فصل۳ همگرایی روش را بررسی خواهیم کرد. سپس عملگرهای درونیاب اسپلاین را به طورکامل تعریف و یک قضیه برای همگرایی این عملگرها به عملگر همانی آورده‌ایم.

این قضیه در واقع همگرایی جواب تقریبی (که به صورت چندجمله‌ای قطعه‌ای است) را به جواب دقیق مورد نظر بررسی می‌کند.

با توجه به شرایط هم‌مکانی و هموارک که در قالب یک دستگاه معادلات می‌آید می‌توان ضرایب بسط چندجمله‌ای تقریبی دلخواه را در هر زیربازه به دست آورد. با استفاده از عملگرهای درونیاب در معادلات انتگرال ولترای نوع دوم جواب تقریبی را از روش هم مکانی مذکور به طورگام به گام به دست می‌آوریم. اصطلاح گام به گام به معنای به دست آوردن جواب تقریبی روی هر زیربازه با توجه به زیربازه قبلی است که با پیش روی روی زیربازه‌ها جواب تقریبی را درکل بازه به صورت چندجمله‌ای قطعه‌ای به دست می‌آوریم.

شرایطی که برای شعاع طیفی ماتریس به وجود آمده از شرایط هم مکانی و هموارک روی هر زیربازه اعمال می‌کنیم همگرایی یا واگرایی روش را مشخص می‌کند. در فصل ۳، قضایای همگرایی اصلی راکه در [18,19] و [5] آمده است، بیان کرده و با استفاده از عملگرهای درونیاب اسپلاین معرفی شده روی معادلات انتگرال ولترای نوع دوم شرایط مورد نیاز برای استفاده از قضایای همگرایی کلی را برقرار می‌سازیم و مطابق قضایای همگرایی اصلی مساله همگرایی جواب تقریبی به جواب اصلی را بررسی می‌کنیم.

در آخر با معرفی انواع اسپلاین، همگرایی روش هم مکانی اسپلاین را برای آنها بررسی کرده و سرعت همگرایی آنها را با هم مقایسه می‌نماییم.

نجمه وفایی

شهریور ۱۳۹۰

فهرست مطالب

فصل اول

پیش نیازها

۱.۱ فضای متریک

تعریف ۱.۱.۱.

یک متریک (یا فاصله) روی مجموعه ناتهی X تابعی مانند $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ است که در سه ویژگی زیر صدق می‌کند؛

الف) به ازای هر $x, y \in X$ داریم $d(x,y) \geq ۰$ و $d(x,y) = ۰ \iff x = y$؛

ب) به ازای هر $x, y \in X$، $d(x,y) = d(y,x)$؛

ج) به ازای هر $x, y, z \in X$، $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (نامساوی مثلثی)

در این صورت جفت مرتب (X, d) را یک فضای متریک می‌نامیم.

مثال ۲.۱.۱.

مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ مجهز به فاصله $d(x,y) = |x - y|$ که در آن $x, y \in \mathbb{R}$ یک فضای متریک تشکیل می‌دهد.

مثال ۳.۱.۱.

فضای $\mathbb{R}^n$ مجهز به فاصله $d(x,y) = (\sum (x_i - y_i)^۲)^{\frac{۱}{۲}}$ که در آن $x = (x_۱, \cdots, x_n)$ و $y = (y_۱, \cdots, y_n)$ متعلق به $\mathbb{R}^n$ هستند، یک فضای متریک است. این فاصله، فاصله‌ی اقلیدسی و فضای به وجود آمده با آن، فضای اقلیدسی نام دارد.

۲.۱ فضای نرم‌دار

تعریف ۱.۲.۱.

یک نرم $\|\cdot\|$، تابعی از فضای برداری V به $\mathbb{R}$ با خواص زیر است؛

۱) برای هر $v \in v$، $\|v\| \geq 0$ و $\|v\| = 0 \iff v = 0$؛

۲) برای هر $v \in V$ و $\alpha \in \mathbb{R}$، $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$؛

۳) برای هر $u, v \in V$، $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (نامساوی مثلثی).

در این صورت جفت مرتب $(V, \|\cdot\|)$ یک فضای نرم‌دار است.

مثال ۲.۲.۱.

برای $x = (x_1, \cdots, x_d)^T$ فرمول $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{d} (x_i)^2)^{\frac{1}{2}}$ یک نرم در $\mathbb{R}^d$ تعریف می‌کند که نرم اقلیدسی نام دارد.

مثال ۳.۲.۱.

(به طور کلی برای $1 \leq p \leq \infty$) فرمول‌های $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ برای هر $1 \leq p < \infty$ و $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$ نرم‌هایی در فضای $\mathbb{R}^d$ تعریف می‌کنند که نرم $\|\cdot\|_\infty$، نرم ماکسیمم یا نرم نامتناهی نامیده می‌شود.

۳.۱ فضاهای L^p

تعریف ۱.۳.۱.

فضای برداری مانند L، متشکل از تمامی توابع حقیقی که قلمرو آنها مجموعه‌ای ناتهی مانند X است یک فضای تابعی است، برای مثال؛

فضای برداری $\mathbb{R}^X$ متشکل از همه‌ی توابع حقیقی بر مجموعه‌ای مانند X؛

فضای برداری $B(X)$ متشکل از همه‌ی توابع حقیقی کران‌دار بر X؛

فضای برداری $C(X)$ متشکل از همه‌ی توابع حقیقی پیوسته بر X؛

و فضای برداری $C_b(X)$ متشکل از همه‌ی توابع حقیقی پیوسته و کران‌دار بر X؛
که همگی نمونه‌هایی از فضای تابعی هستند.
بیشتر نرم‌های مهم روی این فضاها با استفاده از انتگرال‌ها تعریف شده است. نظریه‌ی انتگرال ما را قادر می‌سازد تا ویژگی‌های برجسته‌ی این فضاها را مطالعه کنیم.

تعریف ۲.۳.۱.

فرض کنیم $1 \leq p < \infty$، نرم L^p روی فضای L به صورت زیرتعریف می‌شود؛

$$\|f\|_p = (\int_X |f|^p dx)^{\frac{1}{p}}, \qquad f \in L.$$

نرم L_∞ را روی فضای L، همان نرم بی‌نهایت تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_\infty = \sup |f(x)|.$$

تعریف ۳.۳.۱.

فضای تابعی L به همراه هر یک از نرم‌های L^p وقتی $1 \leq p < \infty$ یک فضای L^p نامیده می‌شود. همچنین فضای L به همراه نرم بی‌نهایت (یا $\|.\|_\infty$) یک فضای L_∞ است. برای مثال فضای $C[a, b]$ به همراه $\|.\|_\infty$ یک فضای L_∞ است.
دنباله‌ی $\{f_n\}$ از توابع حقیقی بر مجموعه‌ای مانند X را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم به ازای هر $x \in X$، $\lim f_n(x)$ در $\mathbb{R}$ موجود باشد. در این صورت می‌توان تابع جدید f را به ازای هر $x \in X$ با رابطه‌ی $f(x) = \lim f_n(x)$ تعریف کرد.

تعریف ۴.۳.۱.

دنباله‌ی $\{f_n\}$ نقطه‌وار به f همگرا است (یا f حد نقطه‌وار $\{f_n\}$ است) و می‌نویسیم $f_n \longrightarrow f$. هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ و هر $x \in X$ عددی طبیعی مانند N (وابسته به x و ε) وجود داشته باشد به طوری که اگر $n \geq N$ آنگاه $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
مفهوم همگرایی قویتر برای دنباله‌های تابعی، همگرایی یکنواخت است.

تعریف ۵.۳.۱.

می‌گوییم دنباله‌ی $\{f_n\}$ از توابع حقیقی بر X، به طور یکنواخت به تابع f همگراست، هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی طبیعی مانند N (فقط وابسته به ε) وجود داشته باشد، به طوری که به ازای هر $n \geq N$ و هر $x \in X$ داشته باشیم $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

روشن است که همگرایی یکنواخت مستلزم همگرایی نقطه‌وار است.

۴.۱ فضاهای باناخ

تعریف ۱.۴.۱.

هر فضای نرم‌دار مانند X را که نسبت به متریک القایی به وسیله‌ی نرم، فضایی کامل باشد، یک فضای باناخ می‌نامیم. به عبارت دیگر X یک فضای باناخ است. هرگاه به ازای هر دنباله‌ی کوشی مانند $\{x_n\}$ در X، عنصری مانند $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $\lim_{n \longrightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$. بدین‌سان، فضاهای باناخ مثال‌های خاصی از فضاهای متریک کامل هستند. در ادامه چند نمونه از این فضاهای باناخ را ارایه می‌کنیم.

مثال ۲.۴.۱.

فضای برداری $\mathbb{R}^n$ مجهز به نرم $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{d} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$، یک فضای باناخ است. این نرم، نرم اقلیدسی و متریک حاصل از آن همان متریک اقلیدسی است.

مثال ۳.۴.۱.

فرض کنیم X مجموعه‌ای ناتهی و $B(X)$ فضای برداری همه‌ی توابع حقیقی کران‌دار بر X باشد در این صورت رابطه‌ی $\|f\|_\infty = \sup |f(x)|$، که $f \in B(X)$، یک نرم روی $B(X)$ تعریف می‌کند که آن را نرم بی‌نهایت می‌نامیم. $B(X)$ مجهز به نرم بی‌نهایت یک فضای باناخ است.

مثال ۴.۴.۱.

فضای برداری $C^k[a,b]$ با نرم

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \cdots + \|f^{(k)}\|_\infty,$$

یک فضای باناخ است.

۵.۱ عملگرهای بین فضاهای نرم‌دار

فرض کنیم X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. یک عملگر T، تبدیلی از X به Y است و مقدار T در $x \in X$ توسط $T(x)$ یا Tx که در Y قرار دارد، تعیین می‌شود.
عملگر T خطی است هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

اگر X و Y فضاهای نرم‌داری باشند که هر دو آنها به نرم یکسانی مجهز شده باشند، نرم عملگر T را به صورت $\|T\|$ نمایش می‌دهیم.
امّا اگر X و Y فضاهای نرم‌داری، با نرم‌های متفاوت باشند آنگاه نرم x را در X به صورت $\|x\|_X$ و نرم Tx در Y، به صورت $\|Tx\|_Y$ نمایش می‌دهیم، همچنین نرم عملگر T را با $\|T\|_{X,Y}$ یا $\|T\|_{X\longrightarrow Y}$ مشخص می‌سازیم.
اگر $\|T\|$ متناهی باشد، T را عملگری کران‌دار (و البته اگر $\|T\| = \infty$، T را عملگری بیکران) می‌نامیم.

تعریف ۱.۵.۱.

عملگر $T : X \longrightarrow Y$ کران‌دار است هرگاه عدد حقیقی و مثبت M وجود داشته باشد به طوری که

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X, \qquad \forall x \in X.$$

تعریف ۲.۵.۱.

نرم یک عملگر کران‌دار را با فرمول $\|T\|_{X\longrightarrow Y} = \sup\{\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} : x \neq ۰\}$ تعریف می‌کنیم. تعریف‌های معادل زیر را برای آن داریم:

$$\|T\|_{X\longrightarrow Y} = \sup\{\|Tx\|_Y : \quad \|x\|_X \leq ۱\}, \qquad (۱\cdot۵\cdot۱)$$

و

$$\|T\|_{X\longrightarrow Y}=\sup\{\|Tx\|_Y: \quad \|x\|_X=1\}. \qquad (۲\cdot۵\cdot۱)$$

معادل بودن این تعاریف در مرجع [24] ثابت شده است. نشان می‌دهیم در هر سه تعریف به ازای هر $x\in X$، نتیجه می‌شود:

$$\|Tx\|_Y\leq \|T\|_{X\longrightarrow Y}.\|x\|_X. \qquad (۳\cdot۵\cdot۱)$$

بدین منظور می‌توان نوشت:

$$\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}=\|T(\frac{x}{\|x\|})\|=\|T(y)\|_Y\leq \|T\|_{X\longrightarrow Y}.$$

پس با توجه به تعاریف بالا برای $\|T\|_{X\longrightarrow Y}$؛

$$\|Tx\|\leq \|T\|.\|x\|.$$

با توجه به سه تعریف معادل بیان شده و رابطه‌ی (۳.۵.۱)، $\|T\|_{X\longrightarrow Y}$ کوچکترین کران بالا برای $\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$ است. با در نظر گرفتن تعریف ۱.۵.۱، M هم، کران بالایی برای $\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$ است. بنابراین

$$\|T\|_{X\longrightarrow Y}\leq M.$$

به عبارت دیگر اگر عملگر T مطابق تعریف ۱.۵.۱ کران‌دار باشد، می‌توان نتیجه گرفت $\|T\|\leq M$.

مثال ۳.۵.۱.

فرض کنیم $X=C[0,1]$ مجهز به نرم بی‌نهایت باشد و عملگر $T:X\longrightarrow X$ را به ازای هر $f\in X$ و $x\in[0,1]$، با رابطه‌ی $T(f)(x)=xf(x)$ تعریف می‌کنیم. روشن است T عملگری خطی است به طوری که به ازای هر $f\in X$، $\|T(f)\|_\infty\leq\|f\|_\infty$. با توجه به تعریف ۱.۵.۱، $\|T\|\leq 1$. از اینرو T عملگری کران‌دار است.

تعریف ۴.۵.۱.

عملگر خطی $T:X\longrightarrow Y$ در نقطه $x_\circ\in X$ پیوسته است هرگاه برای هر $\varepsilon>0$ یک $\delta>0$ (وابسته به ε و $x_\circ$) وجود داشته باشد به طوری که:

$$\|x-x_\circ\|<\delta\Longrightarrow\|Tx-Tx_\circ\|<\varepsilon.$$

اگر برای هر $x_\circ\in X$ این پیوستگی برقرار شود، آنگاه عملگر T را روی X پیوسته گوییم.

تعریف ۱.۵.۵.

$T:X\longrightarrow Y$ عملگر خطی پیوسته‌ی یکنواخت نامیده می‌شود، اگر برای هر $\varepsilon>0$، یک $\delta>0$ (مستقل از $x_0\in X$) وجود داشته باشد به طوری که

$$\|x-x_0\|<\delta\Longrightarrow\|Tx-Tx_0\|<\varepsilon.$$

از ویژگی‌های مهم عملگرهای خطی این است که کران‌دار بودن و پیوستگی در این عملگرها معادل‌اند. این مطلب در قالب قضیه‌ی (۱.۵.۱۱) بیان شده است.

تعریف ۱.۵.۶.

فرض کنیم S یک زیرمجموعه‌ی $C(X)$ باشد. می‌گوییم مجموعه‌ی S در نقطه‌ی $x\in X$ هم پیوسته[1] است، هرگاه به ازای هر $\varepsilon>0$ یک همسایگی x مانند V وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $f\in S$، از رابطه‌ی $y\in V$، $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$ را نتیجه بگیریم. اگر S در هر نقطه‌ی X هم پیوسته باشد، می‌گوییم S مجموعه‌ای هم پیوسته است.

یادآور می‌شویم یک زیرمجموعه‌ی بسته و کران‌دار یک فضای متریک لزوماً فشرده نیست، ولی اگر X یک فضای فشرده باشد آنگاه یک زیرمجموعه‌ی بسته و کران‌دار $C(X)$ (مجهز به متریک یکنواخت) فشرده است اگر وتنها اگر هم پیوسته باشد. این نتیجه قضیه‌ی آرزلاـآسکولی[2] نام دارد و در زیر ارایه می‌شود.

قضیه ۱.۵.۷. (آرزلاـآسکولی)

فرض کنیم X یک فضای فشرده و S یک زیرمجموعه‌ی $C(X)$ باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

۱) S یک زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی فضای متریک $C(X)$ (مجهز به متریک یکنواخت) است.

۲) S بسته، کران‌دار و هم پیوسته است.

از این قضیه، نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود.

فرض کنیم X فضایی فشرده و S یک زیرمجموعه‌ی هم پیوسته و کران‌دار $C(X)$ باشد. به آسانی ثابت می‌شود که بستار (یکنواخت) S، یعنی $\bar{S}$، نیز کران‌دار و هم پیوسته است و از اینرو بنابر قضیه‌ی آرزلاـآسکولی، $\bar{S}$ یک زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی $C(X)$ است.

1) Equicontinuous 2) Arzela- ascoli

تعریف ۸.۵.۱.

فرض کنیم $\mathcal{K} : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow C[a,b]$ تابعی پیوسته باشد. فضای برداری $C[a,b]$ را مجهز به نرم بی‌نهایت در نظر می‌گیریم و عملگر $K : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$ را به ازای هر $x \in C[a,b]$ با رابطه‌ی

$$Kx(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)ds, \tag{۱ ⋅ ۵ ⋅ ۴}$$

تعریف می‌کنیم. K را عملگر انتگرال و تابع $\mathcal{K}$ را هسته‌ی عملگر K می‌نامیم. روشن است K عملگری خطی است. اگر

$$M = \sup\{|\mathcal{K}(t,s)| : (t,s) \in [a,b] \times [a,b]\}$$

آنگاه $M < \infty$ و

$$|Kx(t)| \leq |\mathcal{K}(t,s)|.|x(s)|(b-a),$$
$$\|Kx\|_\infty \leq M(b-a).\|x\|_\infty. \tag{۱ ⋅ ۵ ⋅ ۵}$$

بنابر تعریف ۲.۵.۱، $\|K\| \leq M(b-a)$ و از اینرو K عملگری کران‌دار است.

برای اثبات فشردگی K طبق تعریف ۸.۵.۱، کافی است نشان دهیم مجموعه‌ی $B = \{Kx : \|x\| < ۱\}$ دارای بستار فشرده در $C[a,b]$ است. بدین منظور، با توجه به رابطه‌ی (۵.۵.۱) و قضیه‌ی آرزلاـآسکولی (قضیه‌ی ۷.۵.۱) کافی است ثابت کنیم، B یک زیرمجموعه‌ی هم پیوسته‌ی $C[a,b]$ است، نقطه‌ی $t_\circ \in [a,b]$ را ثابت در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\varepsilon > \circ$. می‌دانیم $\mathcal{K}(t,s)$ به طور یکنواخت پیوسته است، (این مطلب در [1] ثابت شده است) پس عددی مانند $\delta > \circ$ وجود دارد به طوری که اگر $|t_۱ - t_۲| < \delta$ آنگاه $|\mathcal{K}(t_۱,s) - \mathcal{K}(t_۲,s)| < \varepsilon$. بنابراین، اگر $t \in [a,b]$ در $|t - t_\circ| < \varepsilon$ صدق کند و به ازای هر $x \in C[a,b]$ ، $\|x\|_\infty < ۱$ در نتیجه،

$$|Kx(t) - Kx(t_\circ)| = |\int_a^b (\mathcal{K}(t,s) - \mathcal{K}(t_\circ,s))x(s)ds| \leq (b-a)\varepsilon$$

این نشان می‌دهد که با توجه به تعریف ۶.۵.۱، B در $t_\circ$، هم پیوسته است. چون $t_\circ$ دلخواه است، B همه جا هم پیوسته است. در نتیجه، $\bar{B}$ فشرده است. بنابراین طبق تعریف ۸.۵.۱، K عملگری فشرده است.

تعریف ۹.۵.۱.

اگر X و Y فضاهای برداری باشند، عملگر خطی $K : X \longrightarrow Y$ یک عملگر رتبه‌ـمتناهی نامیده می‌شود هرگاه برد عملگر K (یا $RangeK$) متناهی البعد باشد.

قضیه ۱۰.۵.۱.

اگر X و Y دو فضای برداری نرم‌دار باشند و عملگر $K : X \longrightarrow Y$ یک عملگر رتبه‌ـمتناهی کران‌دار باشد، در این صورت K عملگری فشرده از X به Y است. این قضیه در [3] ثابت شده است.

قضیه ۱۱.۵.۱.

فرض کنیم V و W فضاهای نرم‌دار و $L : V \longrightarrow W$ یک عملگر خطی باشد. L روی V پیوسته است اگر و تنها اگر L روی V کران‌دار باشد. برای اثبات به [24] مراجعه شود.

قضیه ۱۲.۵.۱.

فرض کنیم U ، V و W فضاهای نرم‌دار باشند. اگر $L_۱ : U \longrightarrow V$ و $L_۲ : V \longrightarrow W$ عملگرهای خطی پیوسته باشند آنگاه عملگر مرکب

$$L_۲L_۱ : U \longrightarrow W$$

$$L_۲L_۱(v) = L_۲(L_۱(v)), \qquad \forall v \in U,$$

یک عملگر خطی پیوسته است و داریم:

$$||L_۲L_۱||_{U\longrightarrow W} \leq ||L_۲||_{V\longrightarrow W}||L_۱||_{U\longrightarrow V}.$$

برای اثبات به [24] مراجعه شود.

قضیه ۱۳.۵.۱.

اگر $K_۱ \in \mathcal{L}(X,Y)$ و $K_۲ \in \mathcal{L}(Y,Z)$ و عملگر $K_۱$ یا $K_۲$ (و یا هر دو) فشرده باشند، آنگاه ترکیب آنها به صورت $K_۲K_۱$ نیز عملگری فشرده از X به Z است. برای اثبات قضیه می‌توان به [3] مراجعه کرد.

قضیه ۱۴.۵.۱. (قضیه‌ی تناوبی فردهلم)

فرض کنیم X یک فضای باناخ و $K : X \longrightarrow X$ فشرده باشد. معادله $\lambda \neq ۰$ ،$(\lambda - K)x = y$ جواب منحصر به فرد $x \in X$ دارد اگر و فقط اگر معادله‌ی همگن $(\lambda - K)z = ۰$ تنها جواب بدیهی $z = ۰$ داشته باشد. درچنین حالتی عملگر $\lambda - K : X \xrightarrow[\text{onto}]{۱-۱} X$ وارون‌پذیر است و $(\lambda - K)^{-۱}$ کران‌دار است. برای اثبات قضیه به [2] مراجعه شود.

تعریف ۱۵.۵.۱.

فرض کنیم X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. مجموعه‌ی همه‌ی عملگرهای خطی کران‌دار از X به Y را با $\mathcal{L}(X,Y)$ نشان می‌دهیم. با توجه به تعریف فضای برداری، $\mathcal{L}(X,Y)$ با اعمال جبری:

$$(T+S)(x) = T(x) + S(x), \qquad (\alpha T)(x) = \alpha T(x)$$

فضایی برداری است. $\mathcal{L}(X,Y)$ مجهز به نرم $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = ۱\}$ یک فضای برداری نرم دار است.

می‌گوییم زیرمجموعه‌ی $A \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ نقطه‌وار کران‌دار است هرگاه به ازای هر $x \in X$ مجموعه‌ی $\{T(x) : T \in A\}$ که یک زیرمجموعه Y است، در نرم Y کران‌دار باشد.

اگر زیرمجموعه‌ی $A \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ در نرم عملگری کران‌دار باشد (یعنی اگر عددی مانند $M > ۰$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $T \in A$، $\|T\| \leq M$) آنگاه چون به ازای هر $T \in A$ داریم $\|Tx\| \leq \|T\|.\|x\| \leq M\|x\|$ نتیجه می‌گیریم که A نقطه‌وار کران‌دار است.

یعنی هر مجموعه‌ای از عملگرها که در نرم کران‌دار باشد، نقطه‌وار نیز کران‌دار است. عکس این گزاره نیز درست است، مشروط بر این که X یک فضای باناخ باشد. این نتیجه، «اصل کران‌داری یکنواخت» یا « قضیه‌ی باناخ_اشتینهاوس» نام دارد که در ادامه به آن اشاره می‌کنیم.

قضیه ۱۶.۵.۱.(اصل کران‌داری یکنواخت)

فرض کنیم X یک فضای باناخ و Y یک فضای نرم‌دار باشد. در این صورت زیرمجموعه‌ی $A \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ در نرم کران‌دار است اگر و فقط اگر نقطه‌وار کران‌دار باشد. برای اثبات قضیه به [1] مراجعه شود.

۶.۱ عملگرهای اتصالی[۱]

در این بخش به بیان چند تعریف کلیدی می‌پردازیم و برای جزییات بیشتر می‌توان به منبع [25] مراجعه کرد.

تعریف ۱.۶.۱.

فرض کنیم E و E_n برای $n = ۱, ۲, \cdots$ فضاهای باناخ باشند. در این صورت دنباله‌ی عملگرهای $p_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$ را دنباله‌ی عملگرهای اتصالی گوییم، به طوری که برای هر x متعلق به E دارای خاصیت زیر باشند:

$$\|p_n x\| \longrightarrow \|x\|, \quad n \longrightarrow \infty. \qquad (۱\cdot۶\cdot۱)$$

دو تعریف همگرایی و فشردگی دنباله‌ها را به صورت زیر ارایه می‌کنیم.

1) Connecting operators

تعریف ۲.۶.۱.

دنباله‌ی $x_n \in E_n$ به $x \in E$ همگراست اگر $\|x_n - p_n x\| \longrightarrow \circ$. در این صورت این همگرایی را به صورت $x_n \longrightarrow x$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۶.۱.

دنباله‌ی $x_n \in E_n$ فشرده است هرگاه هر زیر دنباله‌ی آن دارای زیر دنباله‌ای همگرا باشد. به عبارت دیگر برای هر زیر دنباله‌ی $\{x_n\}_{n\in N'}$ با $N' \subset \mathbb{N}$، $x \in E$ و زیر دنباله‌ی $\{x_n\}_{n\in N''}$ با $N'' \subset N'$ موجود باشد به طوری که:

$$x_n \longrightarrow x; \quad x \in E, n \in N'',$$

$$N'' \subset N' \subset \mathbb{N},$$

N' و N'' مجموعه‌هایی نامتناهی و $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی است.

با توجه به خواصی که در (۱.۶.۱) برای عملگرهای اتصالی عنوان شد، نشان می‌دهیم عملگر همانی نیز این خواص را دارا است:

$$I \in \mathcal{L}(E, E)$$

$$\|Ix\| \longrightarrow \|x\| \qquad \forall x \in E$$

چون $p_n = I$ ، پس برای هر $n = ۱, ۲, \dots$ داریم $E_n = E$.بنابراین می‌توان گفت $x_n \in E$ همگرا به $x \in E$ است (E فضای باناخ است)، اگر $\|x_n - Ix\| \longrightarrow \circ$ یا $\|x_n - x\| \longrightarrow \circ$. همچنین $x_n \in E$ را فشرده گوییم هرگاه $x \in E$ وجود داشته باشد که $\|x_n - x\| \longrightarrow \circ; \ n \in N''$.

حال مفاهیم همگرایی، فشردگی، منظم بودن و پایدار بودن عملگرها را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴.۶.۱.

دنباله‌ی عملگرهای $A_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ همگرا به $A \in \mathcal{L}(E, E)$ است و به صورت $A_n \longrightarrow A$ نوشته می‌شود، هرگاه x_n به x همگرا شود ($x_n \longrightarrow x$) آنگاه $A_n x_n$ نیز به Ax همگرا شود ($A_n x_n \longrightarrow Ax$).

تعریف ۵.۶.۱.

همگرایی $A_n \longrightarrow A$ را فشرده گوییم هرگاه از $\|x_n\| \leq const$ بتوان فشردگی $A_n x_n$ را نتیجه گرفت.

تعریف ۱.۶.۶.

همگرایی $A \longrightarrow A_n$ را پایدار گوییم، هرگاه $n_\circ \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که برای $n \geq n_\circ$ داشته باشیم $A_n^{-1} \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ و $\|A_n^{-1}\|_{E_n \longrightarrow E_n} \leq const$.

تعریف ۱.۶.۷.

همگرایی $A \longrightarrow A_n$ را منظم گوییم هرگاه $\|x_n\| \leq const$ و $A_n x_n$ فشرده باشد، بتوان نتیجه گرفت x_n نیز فشرده است. این تعاریف در قضایای همگرایی اصلی[1] در فصل ۳ کاربرد قابل توجهی دارد.

۷.۱ معادلات انتگرال

تعریف ۱.۷.۱.

یک معادله انتگرال، معادله‌ای است که یک تابع مجهول تحت یک یا چند علامت انتگرال ظاهر می‌شود. به عنوان مثال برای $a \leq s \leq b$ و $a \leq t \leq b$ معادلات

$$f(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t,s)g(s)ds,$$
$$g(t) = \lambda \int_a^b \mathcal{K}(t,s)g(s)ds + f(t),$$
$$g(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t,s)[g(s)]^{۲}ds,$$

به طوری که توابع $\mathcal{K}(t,s)$ که تابع هسته نام دارد و $f(t)$ معلوم و تابع $g(t)$ مجهول است، نمونه‌هایی از معادلات انتگرال هستند.

در ادامه انواع مختلف معادلات انتگرال را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۷.۲.

اگر در معادله انتگرال حدود انتگرال گیری ثابت باشند، آن را معادله انتگرال فردهلم می‌نامیم. مانند

$$g(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t,s)g(s)ds + f(t),$$

1) General convergence theorems