دانشگاه تبریز
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

بعضی نتایج در مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایده‌آل

اساتید راهنما

دکتر رضا نقی پور و دکتر پرویز سهندی

استاد مشاور

دکتر علی اکبر مهرورز

پژوهشگر

الناز بابازاده بدوستانی

۱۳۸۹

تقدیم به پدر

و

مادر مهربانم

خدایا...

همه می دانند که نام تو درمان دلهای خسته و یادت شفای قلب های شکسته و معرفتت معراج عارفان است...

خدایا تو را شاکرم که توانستم به سوی اساسی ترین هدف خلقت و حیات خودم گامی هر چند کوچک بر دارم، گاهی محقق و میسر نمی شود جز با علم و عمل. گرچه شاید، هنوز برای رسیدن بر حد اعلای انسانیت در ابتدای راهم و راهی بس دشوار دارم اما با دلی چون دریا رهسپار این راهم و از تو می خواهم که به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی عطا کنی.

به کسب علم ادب کوش تا تو راست مجال

که کسب علم فریضه است بر نساء و رجال

به علم کوش که این است رمز استقلال

کمال و فضل بود فخر جان نه دولت و مال.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، انسان را اشرف مخلوقات قرار داد.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ اساتید راهنمای خود، جناب آقای دکتر رضا نقی پور و جناب آقای دکتر پرویز سهندی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده و صمیمانه ایشان، این مجموعه به سرانجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر علی اکبر مهرورز که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان نامه، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی های ارزنده خود قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

همچنین لازم می‌دانم بوسه زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادران و خواهر عزیزم به پاس عاطفه سرشارشان و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

در پایان وظیفه خود می دانم که از تمام دوستان عزیزم که در تمام این مدت پشتیبان و محرک من بودند، کمال قدردانی را داشته باشم و برای همه آن عزیزان، فقاهت را توأم با تقوا، تیزهوشی و فراست را توأم با بردباری و سعه صدر، حزم و احتیاط را توأم با شجاعت و شهامت، اعتماد به نفس را توأم با توکل بر خدای متعال و مدیریت را همراه با تعبد و تأمل از خدای منان خواستارم.

بهمن ۱۳۸۹

نام خانوادگی:بابازاده بدوستانی نام: الناز

عنوان پایان‌نامه: بعضی نتایج در مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایده‌ال

اساتید راهنما: دکتر رضا نقی پور و دکتر پرویز سهندی
استاد مشاور: دکتر علی اکبر مهرورز

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش:جبر

دانشگاه: تبریز دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: زمستان ۱۳۸۹ تعداد صفحه: ۷۶

کلیدواژه‌ها: کوهمولوژی موضعی، بعد کوهمولوژیکی، رشته دقیق، متناهی مولد

چکیده
این پایان نامه که به تبیین و تشریح مقاله ای از لیزهانگ چو و کینگ وینگ می‌پردازد، تعمیمی از مدول های کوهمولوژی موضعی نسبت به ایده آل های (I, J) است. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و نوتری، I و J دو ایده‌آل از R باشند. فرض کنیم R موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ باشد. نشان می دهیم :
(i) برای هر R -مدول متناهی مولد M تساوی زیر برقرار است،

$$inf\{\ i\ \ |H^i_{I,J}(M)\ \text{آرتینی نیست}\} = inf\{depth M_p\ \ |\ \ p \in W(I,J) \setminus \{\ \mathfrak{m}\}\}$$

که در آن

$$W(I,J) = \{\ \ p \in Spec(R)|\ \ I^n \subseteq p + J\ \ ; n \in \mathbb{N}_0\ \ \text{برای بعضی}\}.$$

(ii) برای یک R -مدول متناهی مولد M با $dim M = d$، $H^d_{I,J}(M)$ آرتینی می باشد. همچنین، یک ویژگی برای بزرگترین عدد صحیح r که $H^r_{I,J}(M) \neq 0$ بیان خواهیم کرد.

فهرست مطالب

مقدمه

قضایای کوهمولوژی موضعی یکی از ابزارهای اساسی در جبر جابجایی و هندسه جبری به شمار می آیند. مدول های کوهمولوژی موضعی در دهه ۵۰ میلادی توسط گروتندیک و سر [۱] برای مطالعه در هندسه جبری ابداع شد. الکساندر گروتندیک یکی از بزرگترین ریاضیدانان قرن بیستم است که انقلابی بزرگ در طول سال های ۱۹۵۸ تا ۱۹۷۰، در هندسه جبری ایجاد کرد. همچنین تلاش های او در آنالیز تابعی هم قابل تحسین است، زیرا وی اولین کسی بود که روشهای جبری و کاتگوریکی را در آنالیز تابعی به کار برد. بویژه، وی دو مطلب مهم در مورد صفر شدن و صفر نشدن مدول های کوهمولوژی موضعی بیان کرد که با حل این مسائل کمک بزرگی به قضایای کوهمولوژی موضعی کرد و ما از آن ها استفاده زیادی در این پایان‌نامه به عمل می‌آوریم.

دانشمندان دیگری نیز در این زمینه فعالیت داشته اند. یوجی یوشینو یکی از اساتید برجسته دانشگاه اوکایاما می باشد که وی به همراه ریو تاکاهاشی و تاکیشی یوشیزاوا در مرجع [۱۸]

[۱] Serre

مدول های کوهمولوژی موضعی $H^i_{I,J}(M)$ را برای حالتی که M یک R-مدول متناهی مولد است، بطور وسیعی مورد بررسی قرار دادند. در واقع آن ها نتایج اساسی مدول های کوهمولوژی موضعی معمولی را به مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایده‌آل (I, J) تعمیم دادند. برای مثال، آن ها نشان دادند که برای هر R-مدول متناهی مولدM، تساوی زیر وجود دارد:

$$inf\{i \ | \ H^i_{I,J}(M) \neq \circ\} = inf\{ \ depth M_{\mathfrak{p}} \ | \ \mathfrak{p} \in W(I, J)\},$$

که تعمیمی از نتیجه بیان شده برای مدول های کوهمولوژی موضعی معمولی است. در ادامه کار ایشان، لیزهانگ چو و کینگ وینگ در سال ۲۰۰۹ با استفاده از برخی نتایج آن ها، آرتینی بودن مدول های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایده‌آل را بررسی کردند. میل کرسون در [۱۳]، لو و تانگ در [۱۱] چگونگی آرتینی نبودن $H^r_I(M)$ برای کمترین عدد صحیح r را مورد مطالعه قرار داده اند. در [۳] چو و تانگ نتایج مهم [۱۱] را برای مدول های کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته، تعمیم دادند. این پایان نامه که بر اساس مراجع [۴] و [۱۸] تنظیم شده است، در فصل دوم به بحث در مورد صفر شدن و صفر نشدن $H^i_{I,J}(M)$ که M یک R-مدول متناهی مولد است و تعمیم قضیه لیختن باوم-هارتشورن می‌پردازیم. همچنین با استفاده از این مطالب به بحث در مورد آرتینی بودن این مدول‌ها

خواهیم پرداخت.در فصل سوم، توصیف جدیدی برای بعد کوهمولوژیکی موضعی بیان می‌کنیم.

فصل ۱
تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مفاهیم اولیه

در تمام این پایان نامه فرض خواهیم کرد که همه حلقه ها نوتری و جابجایی باشند. همچنین فرض خواهیم کرد R یک حلقه و I و J ایده‌آل هایی از R باشند.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید M مدولی روی حلقه R باشد. منظور از محمل M مجموعه $\{\mathfrak{p} \in Spec(R) | M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$ است. این مجموعه را با نماد $Supp(M)$ یا $Supp_R(M)$ نشان می دهیم. به آسانی می توان دید که اگر R یک حلقه و

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

یک رشته دقیق از R -مدول‌ها و R -همومر فیسم ها باشد، آنگاه

$$Supp(M) = Supp(L) \cup Supp(N).$$

لم ۲.۱.۱. *فرض کنید M مدولی متناهی مولد روی حلقه R باشد. در این صورت*

$$Supp(M) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) \ | \ \mathfrak{p} \supseteq (0 :_R M)\} = V(Ann(M)).$$

برهان. به لم ۲۰.۹ [۱۷] رجوع شود. □

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و M مدولی روی R باشد و $\mathfrak{p} \in Spec(R)$. گوئیم $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول وابسته به M است، هرگاه $m \in M$ وجود داشته باشد که

$\mathfrak{p} = Ann(m) = (0 :_R m)$. توجه کنید که $m \neq 0$. مجموعهٔ همه ایده‌آل‌های اول وابسته به M را با علامت $Ass(M)$ یا $Ass_R(M)$ نشان می دهیم.

لم ۴.۱.۱. *فرض کنید M مدولی روی حلقه نوتری R باشد. در این صورت*

$$Ass(M) \neq \varnothing \Longleftrightarrow M \neq 0.$$

برهان. به نتیجه ۳۵.۹ [۱۷] رجوع شود. □

قضیه ۵.۱.۱. *فرض کنید M مدولی روی حلقه نوتری R باشد. در این صورت $Ass(M) \subseteq Supp(M)$ و هر عضو می نیمال $Supp(M)$ متعلق به $Ass(M)$ است.*

برهان. به قضیه ۳۹.۹ [۱۷] رجوع شود. □

قضیه ۶.۱.۱. *فرض کنید M یک R -مدول و $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول از R باشد. در این صورت*

$$\mathfrak{p} \in Ass_R(M) \Longleftrightarrow \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \in Ass_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}).$$

برهان. به قضیه ۶.۲ [۱۲] رجوع شود. □

قضیه ۷.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه و $M \neq 0$ یک R -مدول متناهی مولد باشد. در*

این صورت یک زنجیر متناهی از زیر مدول‌های M به صورت

$$\circ = M_\circ \subset M_۱ \subset \cdots \subset M_n = M,$$

موجود است بطوری که به ازای هر $۱ \leq i \leq n$، $M_i/M_{i-۱} \cong R/\mathfrak{p}_i$ که $\mathfrak{p}_i$ها ایده‌آل‌های اولی از R است.

برهان. به تمرین ۴۰.۹ [۱۷] رجوع شود. □

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. عنصر a از R را یک مقسوم علیه صفر روی M می نامیم، هرگاه وجود داشته باشد عضو ناصفری از M مانند x بطوری که $ax = \circ$. مجموعه همه مقسوم علیه های صفر روی M را با نماد $Z_R(M)$ نشان می دهیم.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و M یک R- مدول باشد. عنصر a از R را M - منظم گوئیم، هرگاه به ازای هر عضو ناصفر x از M، $ax \neq \circ$. بعبارت دیگر $a \notin Z_R(M)$.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول ناصفر و N یک زیر مدول ناصفر از M باشد. گوئیم M یک توسیع اساسی از N است، در صورتی که به ازای هر زیر مدول ناصفر

M مانند L داشته باشیم $L \cap N \neq 0$. بعبارت معادل، برای هر عضو ناصفر $b \in M$ یک $r \in R$ موجود باشد بطوری که $rb \in N$ و $rb \neq 0$. فرض کنید M یک R-مدول انژکتیو و توسیع اساسی N باشد. در این صورت گوئیم M یک پوشش انژکتیو N است و با علامت $E(N)$ نشان می‌هیم.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد. یک تحلیل انژکتیو می‌نیمال از M را که با علامت $E^{\bullet}(M)$ نشان می دهیم، یک تحلیل انژکتیوی مانند

$$0 \longrightarrow E^{0}(M) \xrightarrow{d^{0}} E^{1}(M) \longrightarrow E^{i}(M) \xrightarrow{d^{i}} E^{i+1}(M) \longrightarrow \cdots ,$$

برای R-مدول M است بطوری که $E^{0}(M) = E(M)$ و به ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $E^{i+1}(M) = E(coker d^{i-1})$.

تعریف ۱۲.۱.۱. بعد R- مدول M را با نماد $dim_R M$ یا $dim M$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$dim M := Sup\{n \geq 0 \ \mid \ \exists \ \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n \ \ , \mathfrak{p}_i \in Supp_R(M)\}.$$

اگر سوپریمم وجود نداشته باشد، تعریف می کنیم $dim M = \infty$.

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. عناصر $x_1, x_2, \ldots, x_n$

از R را یک M- رشته ضعیف می‌نامیم، هرگاه برای هر $1 \leq i \leq n$، داشته باشیم $x_i \notin Z_R(M/(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})M)$. بعلاوه، اگر $(x_1, x_2, \ldots, x_n)M \neq M$، آنگاه $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را یک M -رشته منظم یا به اختصار یک M- رشته می‌نامیم.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنیم M یک R-مدول متناهی مولد و I ایده‌آلی از R باشد که $IM \neq M$. در این صورت بزرگترین طول M- رشته های واقع در I را نمره I نسبت به M گوئیم و با علامت $grade(I, M)$ نشان می دهیم. همچنین اگر $IM = M$، آنگاه $grade(I, M) = \infty$. اگر $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی باشد، آنگاه نمره $\mathfrak{m}$ در M را عمق مدول M گوئیم و با نماد $depthM$ نشان می دهیم.

قضیه ۱۵.۱.۱ (گراسون). *فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک R-مدول متناهی مولد و باوفا [1] باشد. در این صورت به ازای هر R-مدول مانند N یک زنجیر مانند*

$$0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_k = N$$

از زیر مدول های N موجود است بطوری که به ازای هر $1 \leq i \leq k$، N_i/N_{i-1} یک تصویر هومومورفیک جمع مستقیم تعداد متناهی از M است.

برهان. به قضیه ۱.۴ [۱۹] رجوع شود. $\square$

[1] Faithfully

لم ۱۶.۱.۱ (آرتین-ریس). *فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک R-مدول متناهی و $N \subseteq M$ یک زیر مدول و I ایده‌آلی از R باشد. در این صورت وجود دارد یک عدد صحیح مثبت c بطوری که برای هر $n > c$، داریم*

$$I^n M \cap N = I^{n-c}(I^c M \cap N).$$

برهان. به قضیه ۵.۸ [۱۲] رجوع شود. □

قضیه ۱۷.۱.۱ (صفر نشدن گروتندیک). *فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و M یک R -مدول ناصفر متناهی مولد با بعد n باشد. در این صورت $H^n_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$.*

برهان. به قضیه ۴.۱.۶ [۱] رجوع شود. □

قضیه ۱۸.۱.۱ (صفرشدن گروتندیک). *فرض کنید M یک R- مدول و I ایده‌آلی از R باشد. در این صورت به ازای هر $i > dimM$ داریم $H^i_I(M) = 0$.*

برهان. به قضیه ۱.۱.۶ [۱]رجوع شود. □

قضیه ۱۹.۱.۱. *فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و M یک R-مدول متناهی مولد باشد. در این صورت به ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ یک R-مدول آرتینی است.*

برهان. به قضیه ۳.۱.۷ [۱] رجوع شود. □

قضیه ۲۰.۱.۱ (لیختن باوم-هارتشورن). *فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی با بعد d و $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل واقعی از R باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:*

(i) $H_{\mathfrak{a}}^{d}(R) = 0$؛

(ii) *برای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از $\widehat{R}$ که $dim\widehat{R}/\mathfrak{p} = d$، داریم $dim\widehat{R}/(\mathfrak{a}\widehat{R} + \mathfrak{p}) > 0$.*

برهان. به قضیه ۱.۲.۸ [۱] رجوع شود. □

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه موضعی و نوتری باشد. R را حلقه کوهن-مکالی می‌نامیم، هرگاه $depthR = dimR$.

قضیه ۲۲.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. در این صورت برای هر $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ داریم:*

$$\mu_i(\mathfrak{p}, M) = dim_{K(\mathfrak{p})} Ext^i_{R_{\mathfrak{p}}}(K(\mathfrak{p}), M_{\mathfrak{p}}) = dim_{K(\mathfrak{p})} (Ext^i_R(R/\mathfrak{p}, M))_{\mathfrak{p}}$$

که در آن $K(\mathfrak{p}) = R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$. ($\mu_i(\mathfrak{p}, M)$ را i-امین عدد باس مدول M نسبت به ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ می نامیم.)

برهان. به قضیه ۱۸.۷ [۱۲] رجوع شود. □

تبصره ۲۳.۱.۱. *اگر M یک R-مدول متناهی مولد باشد و برای یک ایده‌آل I از R، $IM \neq M$ باشد، آنگاه بنابه نتیجه ۹ .۲ .۸، [۸]*

$$grade(I,M) = inf\{i \mid Ext^i(R/I,M) \neq 0\}.$$

در نتیجه، اگر R یک حلقه موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ باشد، آنگاه

$$depthM = inf\{i \mid Ext^i(R/\mathfrak{m},M) \neq 0\} = inf\{i \mid \mu_i(\mathfrak{m},M) \neq 0\}.$$

گزاره ۲۴.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول متناهی مولد باشد. فرض کنید $E^\bullet(M)$ یک تحلیل انژکتیو می‌نیمال از M باشد. در این صورت*

$$E^i(M) \cong \bigoplus_{\mathfrak{p} \in Spec(R)} E(R/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p},M)}.$$

برهان. به گزاره ۹.۲.۳ [۲] رجوع شود. □

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی باشد. در این صورت R-مدول متناهی مولد K را یک مدول کانونیک از R گوئیم، هرگاه

$$Hom_R(H^d_{\mathfrak{m}}(R), E(R/\mathfrak{m})) \cong \widehat{K}_R.$$

اگر R تام باشد، آنگاه

$$K \cong Hom_R(H^d_{\mathfrak{m}}(R), E(R/\mathfrak{m})),$$

یک مدول کانونیک از R است. توجه کنید که اگر $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی کوهن-مکالی کامل با بعد d باشد، R-مدول متناهی مولد K را یک مدول کانونیک از R گوئیم، اگر و فقط اگر

$$\mu_i(\mathfrak{m}, K) = \begin{cases} ۱ & \textit{if } i = d \\ ۰ & \textit{if } i \neq d. \end{cases}$$

قضیه ۲۶.۱.۱. *یک حلقه R گرنشتاین است اگر و فقط اگر به ازای هر* $i \in \mathbb{N}_۰$ *و هر* $\mathfrak{p} \in Spec(R)$،

$$\mu_i(\mathfrak{p}, R) = \begin{cases} ۱ & \textit{if } i = ht(\mathfrak{p}) \\ ۰ & \textit{if } i \neq ht(\mathfrak{p}). \end{cases}$$

یعنی، اگر و فقط اگر به ازای هر $i \in \mathbb{N}_۰$، $E^i \cong \bigoplus_{\substack{ht\mathfrak{p}=i \\ \mathfrak{p}\in Spec(R)}} E(R/\mathfrak{p})$.

برهان. به قضیه۲۷.۲.۹ [۸] رجوع شود. □

تعریف ۲۷.۱.۱. یک ایده‌آل I از حلقه R را کامل [۲] می‌نامیم، هرگاه

$$grade_R(R/I) = pd_R(R/I)$$

که در آن $pd_R R/I$ بعد پروژکتیو R/I را نشان می‌دهد.

---

[۲] Perfect