بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام‌نور

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض—گرایش آنالیز

دانشکده علوم

گروه علمی ریاضی

عملگرهای ترکیبی بر فضاهای هاردی وزن‌دار

استاد راهنما:

دکتر بهمن یوسفی

استاد مشاور:

دکتر فریبا ارشاد

نگارش:

فائزه طاهری

اسفند ماه ۱۳۸۸

دانشگاه پیام‌نور

پایان نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی محض—گرایش آنالیز

دانشکده علوم

گروه علمی ریاضی

عملگرهای ترکیبی بر فضاهای هاردی وزن‌دار

استاد راهنما:

دکتر بهمن یوسفی

استاد مشاور:

دکتر فریبا ارشاد

نگارش:

فائزه طاهری

اسفند ماه ۱۳۸۸

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب پایان نامه /رساله

پایان نامه تحت عنوان : **عملگرهای ترکیبی بر فضاهای هاردی وزن دار**

که توسط **فائزه طاهری** در مرکز شیراز تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می باشد. تاریخ دفاع: ۸۸/۱۲/۰۱ نمره: **۱۸/۲۵** درجه ارزشیابی : **عالی**

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱- **دکتر بهمن یوسفی**	استاد راهنما	استاد	
۲- **دکتر منصوره معانی شیرازی**	استاد مشاور	استادیار	
۳- **دکتر فریبا ارشاد**	استاد مشاور	استادیار	
۴- **دکتر احمد خاکساری**	استاد داور	استادیار	
۵- **دکتر محبوبه حسین یزدی**	نماینده تحصیلات تکمیلی	استادیار	

تقدیم به:

همسرم که مشوق و حمایتگرم بود در این راه؛

و دخترم فاطمه که نبودیهایم را تحمل کرد؛

و به پدر و مادرم که هرچه دارم ار دعای خیر آنان است.

سپاسگزاری

پس از حمد و ثنای یگانه‌ی بی‌همتا و بهترین معین بندگان

اکنون که به فضل و یاری خداوند متعال موفق به اتمام پایان‌نامه فارغ‌التحصیلی خود شده‌ام و توانسته‌ام از عهده چنین امری برآیم خود را موظف می‌دانم تا از زحمات استاد گرانقدر جناب آقای دکتر بهمن یوسفی تقدیر و سپاسگزاری کنم که راهنماییهای ایشان راه را برایم هموار نمود.

فهرست

چکیده

این پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل می‌باشد.

در فصل اول تعاریف و قضیه‌های پیش‌نیاز در فصل‌های بعدی آورده شده است.

در فصل دوم به معرفی عملگرهای ترکیبی روی فضاهای باناخ شامل سریهای توانی صوری می‌پردازیم. همچنین فردهلم بودن و نرم اساسی و فشرده بودن عملگرهای ترکیبی را در چند قضیه بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم به دوری و ابردوری بودن عملگر ترکیبی بر فضاهای هاردی وزن‌دار پرداخته و عملگرهای ترکیبی دوری و ابردوری بوسیله خودنگاشت خطی کسری روی قرص یکه مورد مطالعه قرار می‌گیرد. با استفاده از قضیه‌های این فصل بیان می‌شود که عملگر ترکیبی C_φ تحت چه شرایطی دوری و ابردوری می‌تواند باشد.

فصل چهارم مربوط به طیف یک عملگر ترکیبی وزن‌دار فشرده بر فضای هاردی وزن‌دار است. برای تابع تحلیلی ψ روی قرص یکه باز و نگاشت تحلیلی φ از قرص یکه به توی خودش عملگر ترکیبی وزن‌دار $C_{\psi,\varphi}$ روی فضای هاردی وزن‌دار $H^{2}(\beta)$ را در نظر گرفته و در حالتیکه فشرده باشد، در مورد طیف آن مطالعه می‌کنیم.

فصل ۱

مقدمه

۱—۱ مقدمه

در این فصل کلیه تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعد به آنها نیاز داریم، آورده می‌شود.

تعریف ۱.۱: هر فضای باناخ یک فضای خطی نرمدار است که با متر تعریف شده بوسیله نرمش تام می‌باشد.

تعریف ۲.۱: اگر X و Y فضاهای باناخ باشند و $A \in \mathcal{B}(X,Y)$، آنگاه A بطور کامل پیوسته است، اگر برای هر دنباله $\{x_n\}$ در X بطوریکه $x_n \longrightarrow x$ بطور ضعیف، نتیجه دهد که $\|Ax_n - Ax\| \longrightarrow ۰$.

قضیه ۳.۱: فرض کنید X و Y فضاهای باناخ باشند و فرض کنید $A \in \mathcal{B}(X,Y)$،

الف) اگر A یک عملگر فشرده باشد، آنگاه A بطور کامل پیوسته است.

ب) اگر X انعکاسی باشد و A بطور کامل پیوسته باشد، آنگاه A فشرده است.

تعریف ۴.۱: اگر A عملگری کراندار و خطی بین دو فضای باناخ X و Y باشد بطوریکه هسته A دارای بعد متناهی و برد آن بسته باشد، $A : X \longrightarrow Y$ را فردهلم گوییم، اگر عملگر کراندار $B : Y \longrightarrow X$ و عملگر فشرده K روی X و عملگر فشرده K' روی Y وجود داشته باشند، بطوریکه:

$$BA = ۱ + K \quad , \quad AB = ۱ + K'.$$

نتیجه ۵.۱: عملگر کراندار A، $A : H \longrightarrow H'$ فردهلم است اگر و تنها اگر برد A بسته باشد و هسته A و هسته A^* هر دو دارای بعد متناهی باشند.

قضیه ۶.۱: **(نگاشت باز)** فرض کنیم U و V گوی‌های باز یکه از فضاهای باناخ X و Y باشند. به هر تبدیل خطی کراندار Λ از X به روی Y، یک $\delta > ۰$ چنان نظیر است که $\Lambda(U) \supset \delta V$ که $\delta V = \{y \in V : \|y\| < \delta\}$. یا به عبارت دیگر به هر y که $\|y\| < \delta$ یک x با $\|x\| < ۱$ چنان نظیر است که $\Lambda x = y$.

قضیه ۷.۱: **(جولیا کاراتئودری)** برای نگاشت تحلیلی $\varphi : I\!\!D \longrightarrow I\!\!D$ و ξ روی $\partial I\!\!D$، عبارتهای زیر معادلند:

۱) $d(\xi) = \liminf_{z \longrightarrow \xi} (۱ - |\varphi(z)|)/(۱ - |z|) < \infty$

۲) φ دارای مشتق زاویه‌ای متناهی $\varphi'(\xi)$ در ξ می‌باشد.

۳) φ و φ' هر دو دارای حد غیرمماسی متناهی در ξ با $|\eta| = ۱$ می‌باشند برای

$$\eta = \lim_{r \longrightarrow ۱} \varphi(r\xi).$$

لم ۸.۱: **(جولیا)** فرض کنید ξ در دایره یکه بوده و

$$d(\xi) = \liminf_{z \longrightarrow \xi} \frac{۱ - |\varphi(z)|}{۱ - |z|}$$

متناهی باشد.

فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد که $d(\xi) = \lim_{n} \frac{۱ - |\varphi(a_n)|}{۱ - |a_n|}$ وقتی که $\varphi(a_n) \longrightarrow \eta$. در اینصورت

$|\eta| = ۱$ و برای هر z در $\mathbb{D}$ داریم:

$$\frac{|\eta - \varphi(z)|^۲}{۱ - |\varphi(z)|^۲} \leq d(\xi) \frac{|\xi - z|^۲}{۱ - |z|^۲}$$

بعلاوه اگر تساوی در بالا برای برخی از Zها در $\mathbb{D}$ برقرار باشد، آنگاه φ یک یکریختی از قرص یکه می‌باشد ([۸]).

تعریف ۹.۱: اگر φ یک نگاشت تحلیلی پوشا از قرص به توی خودش باشد و b یک نقطه از قرص بسته باشد، b را نقطه ثابت φ گوییم اگر:

$$\lim_{r \longrightarrow ۱} \varphi(rb) = b \ .$$

قضیه شوارتز—پیک بیان می‌کند که یک تابع تحلیلی روی قرص حداکثر یک نقطه ثابت درون قرص دارد، اما توابع تحلیلی می‌توانند نقاط ثابت فراوانی روی دایره داشته باشند.

قضیه ۱۰.۱: **(دنجوی—والف)** فرض کنید φ نگاشت تحلیلی از $\mathbb{D}$ به توی خودش باشد که یکریختی است، همچنین غیرهمانی و غیربیضوی است. در اینصورت نقطه ثابت منحصربفرد α در $\overline{\mathbb{D}}$ وجود دارد بطوریکه دنباله تکرارهای φ، $\{\varphi^{(n)}\}_{n=۰}^{\infty}$، همگرای یکنواخت به تابع ثابت α روی زیرمجموعه فشرده از δ می‌باشد. بعلاوه:

۱) اگر $|\alpha| < ۱$، در نتیجه $۰ \leq |\varphi'(\alpha)| < ۱$

۲) اگر $|\alpha| = ۱$، آنگاه $\lim_{r \longrightarrow ۱} \varphi'(r\alpha)$ موجود و در بازه $[۰, ۱)$ می‌باشد.

این نقطه ثابت خاص α را نقطه دنجوی—والفِ φ می‌نامند.

لم ۱۱.۱: **(والف)** اگر φ یک نگاشت تحلیلی از $\mathbb{D}$ به توی خودش باشد که هیچ نقطه ثابت در $\mathbb{D}$

نداشته باشد، آنگاه نقطه ثابت منحصربفرد α از φ روی دایره یکه با $d(\alpha) \leq ۱$ وجود دارد. اگر φ غیرهمانی باشد و یک نقطه ثابت درون $\mathbb{D}$ داشته باشد آنگاه $d(\xi) > ۱$ برای همه نقاط ثابت ξ از φ روی دایره یکه.

تعریف ۱.۱۲: فرض کنید T یک عملگر خطی کراندار بر یک فضای نرمدار X بوده و $x \in X$.

مدار x تحت T را با نماد $orb(T, x)$ نمایش داده که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$orb(T, x) = \{T^n x : n \geq ۰\}.$$

حال اگر $orb(T, x)$ در X چگال باشد، آنگاه x را یک بردار ابردوری برای T نامیده و در این حالت T را یک عملگر ابردوری می‌گویند. در صورتیکه فضای گسترش خطی پدید آمده توسط $orb(T, x)$ در X چگال باشد، آنگاه x و T را به ترتیب بردار دوری و عملگر دوری می‌نامند.

تعریف ۱.۱۳: در زیر تعاریفی که در ([۲۲]) آمده است تعمیم می‌دهیم.

فرض کنید $\{\beta(n)\}_{n=۰}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد مثبت با شرط $\beta(۰) = ۱$ باشد و $۱ \leq p < \infty$. فضای دنباله‌های $f = \{\hat{f}(n)\}_{n=۰}^{\infty}$ بطوریکه:

$$\|f\|^p = \|f\|_\beta^p = \sum_{n=۰}^{\infty} |\hat{f}(n)|^p \beta(n)^p < \infty$$

را در نظر می‌گیریم.

سری $f(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$ را بدون توجه به همگرایی و یا واگرایی آن یک سری توانی صوری می‌نامند.

فرض کنید $H^p(\beta)$ فضای چنین سریهای توانی صوری باشد. در اینصورت $H^p(\beta)$ یک فضای

باناخ انعکاسی با نرم $\|.\|_\beta$ می‌باشد و دوگان $H^p(\beta)$ برابر با $H^q(\beta^{\frac{p}{q}})$ است، که در آن $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ و $\beta^{\frac{p}{q}}=\{\beta(n)^{\frac{p}{q}}\}_n$ ([۲۳]). همچنین اگر $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{g}(n)z^n$ در $H^q(\beta^{\frac{p}{q}})$ باشد آنگاه:

$$\|g\|^q=\sum_{n=0}^{\infty}|\hat{g}(n)|^q(\beta(n)^{\frac{p}{q}})^q=\sum_{n=0}^{\infty}|\hat{g}(n)|^q\beta(n)^p.$$

فضاهای هاردی، برگمن و دیرکله می‌توانند به این صورت نمایش داده شوند وقتی $p=2$ و به ترتیب $\beta(n)=1$ و $\beta(n)=(n+1)^{-\frac{1}{2}}$ و $\beta(n)=(n+1)^{\frac{1}{2}}$. اگر $\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\beta(n+1)}{\beta(n)}=1$ یا $\liminf_{n\longrightarrow\infty}\beta(n)^{\frac{1}{n}}=1$، آنگاه $H^p(\beta)$ عبارتست از توابع تحلیلی روی گوی یکه باز U.

مفید و مناسب است که برای نشان دادن $g(f)$ علامت $\langle f,g\rangle$ را معرفی کنیم، که $f\in H^p(\beta)$ و $g\in H^p(\beta)^*$. توجه کنید که:

$$\langle f,g\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}\beta(n)^p.$$

فرض کنید $\hat{f}_k(n)=\delta_k(n)$ که در آن $\delta_k(n)=\begin{cases}1 & n=k\\ 0 & n\neq k\end{cases}$. پس خواهیم داشت:

$$f_k(z)=\sum\hat{f}_k(n)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\delta_k(n)z^n=\delta_k(k)z^k=z^k.$$

و آنگاه $\{f_k\}_k$ یک پایه است بطوریکه $\|f_k\|=\beta(k)$ زیرا:

$$\|f_k\|^p=\sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}_k(n)|^p\beta(n)^p=|\hat{f}_k(k)|^p\beta(k)^p=\beta^p(k).$$

واضح است که M_z عملگر ضرب بوسیله Z روی $H^p(\beta)$، پایه $\{f_k\}_k$ را انتقال می‌دهد، زیرا:

$$M_zf_k(z)=z.f_k(z)=z.z^k=z^{k+1}=f_{k+1}(z).$$

پس:

$$M_zf_k=f_{k+1}\ .$$

به خاطر آورید که عدد مختلط λ، نقطه محاسبه‌گر کراندار روی $H^p(\beta)$ گفته می‌شود اگر تابعک محاسبه‌گر نقطه‌ای در λ یعنی $e_\lambda : H^p(\beta) \longrightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه $e_\lambda(f) = f(\lambda)$ کراندار باشد. تابعک محاسبه‌گر مشتق مرتبه j_ام در λ با نماد $e_\lambda^{(j)}$ نمایش داده می‌شود.

در حالت خاص وقتی که $p = ۲$، بنابر قضیه نمایشی ریس، برای تابعک خطی کراندار e_λ بر $H^۲(\beta)$ تابعی مانند K_λ^β در $H^۲(\beta)$ موجود است بقسمیکه:

$$e_\lambda(f) = f(\lambda) = \langle f, K_\lambda \rangle = \sum \hat{f}(n)\overline{\hat{K}_\lambda(n)}[\beta(n)]^۲$$

برای هر f در $H^۲(\beta)$. تابع K_λ^β را یک هسته مولد می‌نامند که معمولا اگر ابهام نباشد با نماد K_λ نمایش داده می‌شود.

تابع φ که در $H^p(\beta)$ قرص یکه U را به خودش می‌نگارد عملگر ترکیبی C_φ را روی $H^p(\beta)$ القا می‌کند که به صورت $C_\varphi f = f o \varphi$ تعریف می‌شود.

عملگر C_φ فردهلم است اگر نسبت به عملگرهای فشرده وارونپذیر باشد.

اگر C_φ عملگری کراندار و وارون‌پذیر باشد پس φ باید یک خودریختی از U باشد یعنی نگاشتی یک به یک و پوشا از U به U است. خود نگاشت تحلیلی φ از U دارای مشتق زاویه‌ای در نقطه w روی مرز U گوییم هرگاه برای بعضی ηها روی مرز U، حد غیرمماسی $\dfrac{\varphi(z) - \eta}{z - w}$ وقتی $z \longrightarrow w$ موجود و متناهی باشد. این حد را مشتق زاویه‌ای φ در w می‌نامیم و آنرا با $\varphi'(w)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱۴: یک انتقال وزن‌دار یکطرفه روی فضای هیلبرت H، عملگری مانند T از H به خودش می‌باشد بطوریکه:

$$Te_n = w_n e_{n+۱}$$

هنگامیکه $\{e_n\} = \{e_n\}_{n=\circ}^{\infty}$ **یک پایه متعامد برای** H **است و** $\sup_n |w_n| < \infty$.

اگر اندیس n روی اعداد صحیح و نامنفی باشد T را عملگر وزن‌دار یکطرفه و اگر n هر عدد صحیح باشد، T را عملگر وزن‌دار دوطرفه می‌گویند.

قضیه ۱۵.۱: عملگر M_z روی $H^{۲}(\beta)$ هم‌ارز با یک انتقال وزن‌دار یک به یک است (با وزن دنباله $\{w_n\}$). برعکس، هر انتقال وزن‌دار یک به یک هم‌ارز با M_z است (عامل روی $H^{۲}(\beta)$ با انتخاب یک β مناسب).

رابطه بین $\{w_n\}$ و β با معادله‌های زیر داده شده است:

$$w_n = \beta(n+۱)/\beta(n)$$

به ازای هر n.

$$\begin{aligned} \beta(n) &= w_{\circ} \cdots w_{n-۱} && (n > \circ) \\ \beta(\circ) &= ۱ \\ \beta(-n) &= (w_{-۱} \cdots w_{-n})^{-۱} && (n > \circ) \end{aligned}$$

نتیجه ۱۶.۱: M_z کراندار است اگر و تنها اگر $\beta(k+۱)/\beta(k)$ کراندار باشد و داریم:

$$\|M_z^n\| = \sup_k [\beta(n+k)/\beta(k)] \quad ; \quad n = \circ, ۱, ۲, \cdots$$

قضیه ۱۷.۱: اگر T یک انتقال وزن‌دار یک طرفه یا دوطرفه باشد که معکوس‌پذیر نباشد و شعاع طیفی T را با $\rho(T)$ نشان دهیم، آنگاه:

$$\sigma(T) = \{z : |z| \leq \rho(T)\}$$

و اگر T انتقال وزن‌دار دوطرفه‌ی معکوس‌پذیر باشد در اینصورت:

$$\sigma(T) = \{z : [\rho(T^{-1})]^{-1} \leq |z| \leq \rho(T)\}.$$

قضیه ۱۸.۱: فرض کنید T یک عملگر انتقال وزن‌دار یک طرفه یک به یک باشد، معرف M_z روی $H^2(\beta)$. بنابراین:

۱) λ یک نقطه محاسبه‌گر روی $H^2(\beta)$ است اگر و تنها اگر $\lambda = \sigma_\alpha(T^*)$.

۲) اگر λ یک نقطه محاسبه‌گر کراندار باشد و اگر $f \in H^2(\beta)$، آنگاه سری‌های توانی f در λ به طور مطلق به مقدار $e_\lambda(f)$ همگرا می‌شود:

$$e_\lambda(f) = \sum \hat{f}(n)\lambda^n$$

و

$$\sum |\hat{f}(n)||\lambda|^n < \infty.$$

قضیه ۱۹.۱: $K_\lambda \in H^2(\beta)$ اگر و تنها اگر $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta(n)^2} < \infty$.

تعریف ۲۰.۱: برای یک نقطه w در $\mathbb{D}$، مشتق هسته مولد را با رابطه:

$$d_w^\beta(z) = \frac{d}{d\overline{w}} K_w^\beta(z)$$

تعریف می‌کنیم. از آنجا که:

$$K_w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta(n)^2} (\overline{w}z)^n$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$d_w^\beta(z) = \sum_{n=۱}^{\infty} \Big(\frac{n}{\beta(n)^۲}\Big)\overline{w}^{n-۱} z^n$$

برای هر w در $I\!D$، d_w^β متعلق به $H^۲(\beta)$ است و داریم:

$$\langle f, d_w^\beta \rangle_\beta = f'(w).$$

دنباله $\beta = \{\beta(n)\}_n$ را طوری در نظر می‌گیریم که دارای سرعت همگرایی مناسب باشد. بنابراین

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n^۲}{\beta(n)^۲} < \infty$$

در نتیجه توابع $d_w^\beta(z)$ در $H^۲(\beta)$ هستند و برای همه w ها در $\overline{I\!D}$ و f در $H^۲(\beta)$ داریم:

$$\langle f, d_w^\beta \rangle_\beta = f'(w).$$

فصل ۲

عملگرهای ترکیبی روی فضاهای باناخ شامل سریهای توانی صوری

۲– عملگرهای ترکیبی روی فضاهای باناخ شامل سریهای توانی صوری

در این فصل فردهلم بودن، فشردگی و نرم اساسی عملگر ترکیبی C_φ را روی فضای باناخ $H^p(\beta)$ بررسی می‌کنیم.

نشان می‌دهیم که اگر C_φ روی $H^p(\beta)$ فشرده باشد، آنگاه قدرمطلق حد غیرمماسی $\varphi^{(j+1)}$ در هر نقطه مرزی از قرص یکه باز، بزرگتر از یک است.

همچنین نشان می‌دهیم که اگر C_φ روی $H^p(\beta)$ فردهلم باشد، آنگاه φ باید یک یکریختی از گوی یکه باز باشد.

لم ۱.۲: فرض کنید X یک فضای باناخ از توابع تحلیلی روی دامنه Ω در $\mathbb{C}$ باشد. اگر دنباله‌ای از توابع g_k در فضای دوگان X^* موجود باشند بطوریکه $\|g_k\| = ۱$ و $g_k \longrightarrow ۰$ بطور ضعیف و $\|C_\varphi^*(g_k)\| \longrightarrow ۰$، آنگاه C_φ روی X فردهلم نیست.

اثبات: (برهان خلف) فرض کنیم C_φ و در نتیجه C_φ^* فردهلم باشد پس عملگری کراندار مانند S و عملگری فشرده مانند Q وجود دارد بطوریکه:

$$SC_\varphi^* = I + Q$$

پس با استفاده از فرض داریم:

$$\|SC_\varphi^*(g_k)\| \leq \|S\| \|C^*(g_k)\| \longrightarrow ۰$$

وقتی $k \longrightarrow \infty$.

چون Q روی X^* فشرده است و X^* باناخ است (چون X باناخ است) پس با استفاده از قضیه ۳.۳