إنه من سليمان وإنه
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

رساله دوره دکتری ریاضی (کاربردی)

روشهای تفاضلات متناهی برای مسأله موج با ضرایب ناپیوسته

توسط

جواد فرضی امین آباد

استاد راهنما

دکتر سید محمد حسینی

بهمن ۱۳۸۷

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

بسمه تعالی

تاییدیه اعضای هیات داوران حاضر در جلسه دفاع از رساله دکتری

آقای جواد فرضی‌امین‌آباد رساله واحدی خود را بـا عنوان: «**روشهای تفاضلات متناهی برای مسأله موج با ضرایب ناپیوسته**» در تاریخ ۸۷/۱۱/۱۲ ارائه کردند.

اعضای هیات داوران نسخه نهایی این رساله را از نظر فرم و محتوا تایید کرده است و پذیرش آنرا برای تکمیل درجه دکتری پیشنهاد می‌کند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	آقای دکتر سیدمحمد حسینی	استاد	
۲- استاد ناظر خارجی	آقای دکتر مصطفی شمسی	استادیار	
۳- استاد ناظر خارجی	آقای دکتر مهدی دهقان	استاد	
۴- استاد ناظر خارجی	آقای دکتر اسماعیل بابلیان	استاد	
۵- استاد ناظر خارجی	آقای دکتر خسرو مالک‌نژاد	دانشیار	حضور نداشتند
۶- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر عباس حیدری	استادیار	

بسمه‌تعالی

آیین‌نامهٔ چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس، مبیّن بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادّهٔ ۱ در صورت اقدام به چاپ پایان‌نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اطلاع دهد.

مادّهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد/رسالهٔ دکتری نگارنده در رشتهٔ .... است که در سال .... در دانشکدهٔ .... دانشگاه تربیت مدرّس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر ....، مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر .... و مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر .... از آن دفاع شده است.»

مادّهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادّهٔ ۴ در صورت عدم رعایت مادّهٔ ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرّس، تأدیه کند.

مادّهٔ ۵ دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادّهٔ ۴ را از محلّ توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادّهٔ ۶ اینجانب جواد فرضی دانشجوی رشته ریاضی کاربردی مقطع دکتری تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام خانوادگی:

تاریخ و امضا:

۸۸/۳/۱۱

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی

دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه:

با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت وکرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت‌علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان‌نامه/رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می‌باشد ولی حقوق معنوی پدیدآورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه / رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجوی مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان‌نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می‌باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب و یا نرم‌افزار و یا آثار ویژه حاصل از نتایج پایان‌نامه / رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده‌ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده‌ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین‌نامه‌های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته‌ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت‌رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

۸۸/۳/۱۲

تقدیم به

پدر و مادر عزیز و مهربانم،

خانواده‌ام

و

ترنم هستی

که جز این بضاعت مزجات چیزی در بساط علمی خود ندارم.

قدردانی

الهی تو را به خاطر تمام لطفهایی که به این بنده ناچیزت کردی سپاس می‌گویم و تو را نه به اندازه خودم، بلکه به اندازه بزرگی و بلند مرتبه بودنت می‌ستایم.

تو را سپاس می‌گویم که توفیق دادی تا در این مقطع بسیار سخت به کمک اساتید محترم بر آموخته‌هایم بیافزایم. بخصوص از استاد راهنمایم جناب آقای دکتر سید محمد حسینی که حمایتهای بی‌شائبه ایشان در تمام مراحل قرین کار پژوهشیم بوده تشکر می‌نمایم.

از اساتید محترم بخش ریاضی و داوران محترم به گرمی قدردانی و تشکر می‌نمایم.

چکیده

در این رساله روشهای عددی مرتبه بالا را برای معادله موج با ضرایب ناپیوسته بررسی و مطالعه می‌کنیم. برای معادلات هموار کارهای زیادی انجام گرفته است اما روشهای استاندارد مرتبه بالا برای مسائل ناپیوسته جوابهای خوبی ارائه نمی‌کنند. بنابراین روشهایی که بتوانند مسائل ناپیوسته را بدقت شبیه سازی کنند دارای اهمیت زیاد است. بخصوص، با توجه به اینکه معادلات مورد نظر وابسته به زمان هستند روشهای با استنسیل فشرده با مرتبه دقت بالا بسیار مهم هستند. در واقع، یکی از انگیزه‌های مهم برای مطالعه روشهای مرتبه بالا برای همه معادلات وابسته به زمان حضور متغیر زمان است به طوری که با روشهای مرتبه پایین محدودیت عدد کورانت چشمگیر خواهد بود و ناگزیر هستیم برای بدست آوردن دقت مناسب از چنین روشهایی استفاده کنیم. تأثیر ناپیوستگی در مسأله به گونه‌ای است که نمی‌توان بحث در زمینه این معادلات را تعمیم مستقیم نظریه موجود برای مسائل پیوسته دانست. به بیان دقیق تر، با تغییر ناگهانی در کمیت‌های فیزیکی مسأله امواج گذری و بازتابی بوجود می‌آیند که رفتار جواب را به کلی از حالت هموار تغییر می‌دهد. در این رساله روشهای واسط پوشانی مرتبه بالا برای معادله وزش و موج آکوستیک یک و دو بعدی ارائه می‌شوند. این روشها بر روشهای واسط پوشانی مرزی بنا نهاده شده اند که برای اولین بار آن را پشکین برای شبیه سازی جریان خون در قلب به کار گرفت. روشهای واسط پوشانی دارای این مزیت هستند که با ترکیب آن با روشهای استاندارد مرتبه بالا می‌توان روشهای مرتبه بالایی را برای مسائل با ضرایب ناپیوسته بدست آورد. حتی با وجود روشهای مرتبه بالایی نظیر آنچه در بسته نرم افزاری Clawpack وجود دارد توصیه می‌شود برای بهبود دقت از این روشها در واسط استفاده شود.

واژه‌های کلیدی : روشهای مرتبه بالا، روش واسط پوشانی ، مسائل واسط، روشهای به طور اساسی غیر نوسانی، شرایط پرش، معادلات موج.

فهرست مندرجات

فصل ۱

لزوم تحقیق و مرور نتایج قبلی

۱.۱ مسائل واسط

جواب تعمیم یافته یک معادله با مشتقات جزئی لزوماً هموار نیست و حتی ممکن است پیوسته نباشد. معادلات با مشتقات جزئی که در ضرایب یا جوابها شامل ناپیوستگی یا ناهمواری باشند مسائل واسط هستند. در بسیاری از مسائلی که در کتابها یا مقالات بررسی و مطالعه می‌شوند جواب معادلات دارای مرتبه‌ای از همواری است که ابزارهای متداول در آنالیز عددی و روشهای رایج برای حل معادلات با مشتقات جزئی بدون هیچ واهمه‌ای برای حل آنها به کار گرفته می‌شوند. با نگاه فیزیکی به این معادلات و کاربردهایی که این معادلات از آنجا ناشی شده است به سادگی می‌توان دریافت که در چنین حالتهایی کمیتهای فیزیکی یا تغییر نمی‌کنند و در صورت تغییر به طور هموار تغییر می‌کنند و به عبارتی توابعی که مقادیر کمیتها را در زمان یا مکان مشخصی تعیین می‌کنند توابعی هموار هستند. این معادلات معمولاً حالتهای خاصی از رفتار پدیده‌های واقعی هستند که با صرف نظر از بعضی واقعیتهای فیزیکی بدست

آمده‌اند. مدل این معادلات تغییرات کمیتهای فیزیکی را با همان دقتی که وجود دارد در بر ندارد. به عنوان مثال برای مدل کردن یک سیم مرتعش برای سادگی فرض می‌کنیم این سیم یکنواخت است و فرض‌های مشابه دیگر که موجب ساده شدن معادله ولی ناقص بودن مدل می‌شود. برای مثال از حالت دوبعدی می‌توان به یک پوسته ارتجاعی مانند طبل اشاره کرد که در مدل کردن این پدیده‌ها فرض‌های مشابهی در نظرگرفته می‌شود. با این حال مثالهای غیر کلاسیک و مهمتر در زمینه‌های مختلفی وجود دارند که در مطالعه و بررسی انتشار موج با آنها برخورد می‌کنیم. برای مطالعه انتشار موج در محیطهای فیزیکی به طور طبیعی با محیطهای ناهمگن مواجه می‌شویم که با تغییرات ناگهانی کمیتهای فیزیکی مشخص می‌شوند. این معادلات کاربردهای زیادی دارند که از آن جمله می‌توان امواج آکوستیک، الاستیک و الکترومغناطیس را برشمرد. جریان گرما در مواد مختلف (ناپیوستگی در رسانایی گرمایی)، انتشار موج الکترومغناطیسی در دو محیط متفاوت (ناپیوستگی در رسانایی الکتریکی)، انتشار موج آکوستیک در دو محیط مانند آب و هوا (تغییر چگالی و سرعت انتشار) و ... مثالهایی از مسائل واسط هستند. معادلات آکوستیک، الاستیک، ماکسول و ... نمونه‌هایی از این قبیل مدل‌های فیزیکی هستند. بحثهای ارائه شده برای معادلات آکوستیک قابل تعمیم برای معادلات مشابه هستند.

شبیه سازی مرتبه بالای انتشار موج در محیط ناهمگن در بسیاری از کاربردها موضوعی قابل توجه است. با این حال، حضور واسط ناپیوسته محاسبات را با مشکل مواجه می‌کند. بسیاری از محققین روی معادله موج آکوستیک در محیط ناهمگن کار کرده‌اند[۱۵]. برای مدل کردن واسطهای دلخواه، استفاده از روشهایی از قبیل میانگین ضرایب ناپیوسته برای بدست آوردن مقادیر شبکه میانی، به طور طبیعی دقت را به

مرتبه اول محدود می‌کند. برخی روشهای دیگر از شبکه غیر ساختاری برای محاسبات در واسط استفاده می‌کنند که معمولاً دارای هزینه محاسباتی بالایی است. لیستی شامل کارهای گسترده‌ای که تکنیکهای متفاوتی را پوشش می‌دهد در منابع آمده است[۸، ۹، ۱۰، ۱۵، ۱٦، ۲۲، ۲۳، ۲٦، ۲۸، ۱۳، ۳۵، ۴۵، ۴٦]. در این تکنیکها دقت مرتبه اول بدست آمده است. کارد[1] و آلن[2] [۴، ۵] روشی با دقت مرتبه دوم بدست آورده‌اند که برای این کار مجبور شده‌اند از گسسته سازی ضمنی زمان استفاده کنند. ژانگ[3] و لووگ[4] [۵۰، ۵۱] روش واسط پوشانی مرتبه دوم را برای معادله موج آکوستیک مورد استفاده قرار داده‌اند.

۲.۱ روشهای طیفی

روشهای طیفی در رده روشهای مرتبه بالا دارای مرتبه همگرایی بی‌نهایت هستند. برای توابعی که از هر مرتبه‌ای دارای مشتقات پیوسته باشند این روشها به سرعت همگرا می‌شوند. این روشها یک تابع دلخواه را با یک ترکیب خطی از تابع—ویژه‌های مسأله اشتورم—لیوویل تقریب می‌کنند. حالت خاص آن سری فوریه است که برای توابع متناوب جوابهای خوبی را ارائه می‌کند. یک مشکل مهم روشهای طیفی پربودن ماتریس ضرایب دستگاه حاصل است، برخلاف روشهای تفاضلات متناهی که دارای ماتریسهای تنک هستند و برای بسیاری از مسائل دستگاههای گسسته حاصل از روشهای تفاضلات متناهی دارای ماتریس‌های قطری

[1] Card
[2] Allen
[3] Zhang
[4] LeVeque

هستند. برای رفع این مشکل بحث‌های خوبی برای ساختن پیش حالت‌سازهای مناسب برای دستگاه گسسته صورت گرفته که راهکارهایی موفق بوده‌اند. با این حال، روشهای طیفی از سری فوریه گرفته تا روشهای طیفی بر اساس پایه‌های دیگر برای توابع ناهموار و حتی تکه‌ای هموار کارایی خوبی ندارند و جوابهای خوبی تولید نمی‌کنند. در نزدیکی ناپیوستگی نوساناتی — پدیده گیبس — شکل می‌گیرد که به قسمت‌های هموار هم گسترش یافته و دقت جواب را کاهش می‌دهد و نتیجه آن است که روشهای مرتبه بالا مانند روشهای طیفی برای پیاده سازی معمول آنها حتی جوابهای مرتبه پایین هم تولید نمی‌کند. به کارگیری فیلترها نوسانات را به دور از ناپیوستگی کاهش می‌دهند ولی در خود ناپیوستگی این نوسانات از بین نمی‌روند. البته فیلترها مرتبه همگرایی را کاهش می‌دهند[۱۴]. با این حال روشی برای بازیابی دقت طیفی ساخته شده که دقت طیفی را در همه جا و بخصوص در نقطه ناپیوستگی هم تضمین می‌کند. این روش دارای پیاده‌سازی‌های مختلفی است که به دو دسته روشهای مستقیم و معکوس تقسیم می‌شوند[۱۴، ۳۹]. با این وجود، این روشها برای معادلات با ضرایب ناپیوسته به کار گرفته نشده‌اند. با توجه به اینکه روشهای تفاضلات متناهی در حالت حدی همان روشهای طیفی هستند و در پیاده سازی این روشها انعطاف بیشتری وجود دارد لذا در این رساله از روش واسط پوشانی استفاده خواهیم کرد که از روشهای استاندارد تفاضلات متناهی در ناحیه‌های هموار استفاده می‌کند.

پدیده گیبس و نوسانات کاذب حاصل از آن را با استفاده از درونیابی مثلثاتی و با یک مثال نشان می‌دهیم. درونیاب مثلثاتی برای داده‌های متناوب را می‌توان به صورت مجموع وزنداری از توابع کاردینال در نظر گرفت با این خاصیت که هرکدام از آنها در یکی از آن نقاط دارای مقدار ۱ و در سایر نقاط مقدار صفر داشته باشد[۱۳]. شباهت زیادی بین این توابع و

فرمول درونیابی لاگرانژ وجود دارد، با این تفاوت که، در حالت درونیابی مثلثاتی، همه توابع کاردینال انتقالهایی از یکدیگر هستند. برای راحتی فرض کنید تعداد $N = ۲m + ۱$ نقطه به صورت $x_i = \frac{i}{m+\frac{۱}{۲}}$، $i = -m, \dots, -۱, ۰, ۱, \dots, m$، در بازه $[-۱, ۱]$ داشته باشیم. در این صورت توابع

$$\begin{aligned} \phi_m(x) &= \frac{۲}{N}\{\frac{۱}{۲} + \cos \pi x + \cos ۲\pi x + \dots + \cos m\pi x\} \\ &= \frac{\sin(N\pi x/۲)}{N \sin(\pi x/۲)} \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

دوری هستند و در رابطه زیر صدق می‌کنند

$$\phi_m(x_i) = \begin{cases} ۱, & i = ۰ \quad [\text{در صورتی که به طور متناوب گسترش یابد } \pm N, \pm ۲N, \dots], \\ ۰, & \text{سایر جاها}. \end{cases}$$

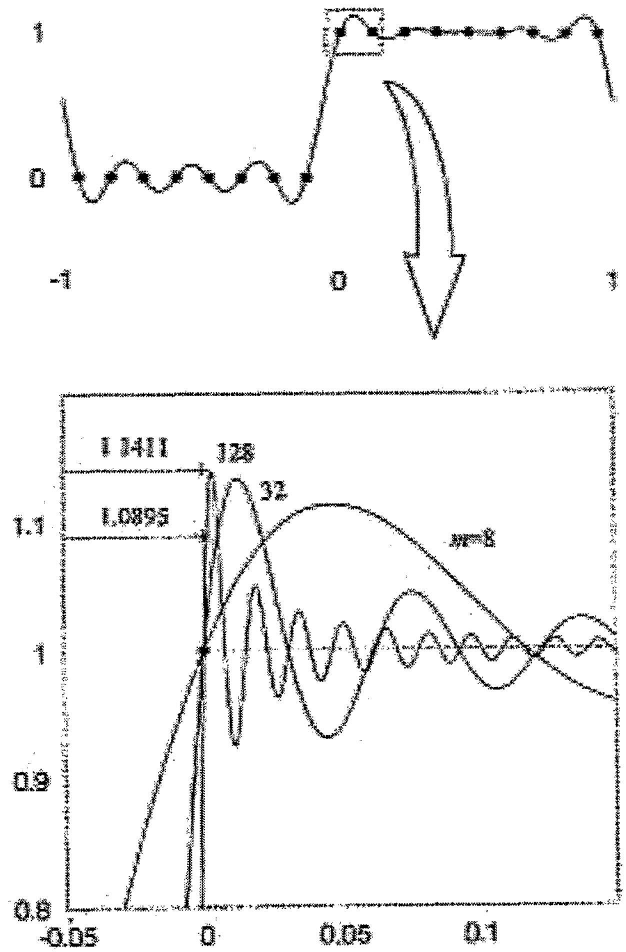
شکل ۱.۱ درونیابی مثلثاتی و سری فوریه مختوم را برای تابع

$$f(x) = \begin{cases} ۱, & x > ۰, \\ -۱, & x < ۰. \end{cases}$$

نشان می‌دهد. در (دو طرف) ناپیوستگی درونیابی مثلثاتی و سری فوریه مختوم به ترتیب فرارفتی به اندازه ۱۴% و ۹% پرش دارند(وقتی $m \to \infty$). این فرارفت ناشی از نوسانات در نزدیکی ناپیوستگی است و با افزایش m کاهش نمی‌یابد، مشاهده چنین نوساناتی در یک مساله را پدیده گیبس می‌نامند.

۳.۱ روشهای مرتبه بالا

برای شبیه‌سازی انتشار موج روشهای زیادی وجود دارد که به روشهای اخیر اشاره می‌کنیم. برای ساختن یک روش برای مسائل با ضرایب ناپیوسته می‌توان این روشها را با فرمولهای



شکل ۱.۱: پدیده گیبس و فرارفت آن

خاصی که برای تقریب در واسط در نظر گرفته می‌شوند ترکیب کرده و روشی با دقت بالا در کل دامنه ارائه کرد. از کارهای اخیر می‌توان به روش مرتبه ۴ گوستافسون[۱۵، ۱۶] اشاره کرد. این روش برای حل معادله

$$\begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & a(x) \\ b(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \qquad (۲.۱)$$

ساخته شده است، ایده این کار به روش مرتبه ۲ یی[۵][۴۹] برمی‌گردد

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p_{j+\frac{1}{2}} \\ u_j \end{pmatrix} = Q_2 \begin{pmatrix} p_{j+\frac{1}{2}} \\ u_j \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{j+\frac{1}{2}}D_+ \\ b_jD_- & 0 \end{pmatrix}, \qquad (۳.۱)$$

که $D_+v_j = (v_{j+1} - v_j)/h$ و $D_-v_j = (v_j - v_{j-1})/h$. برای گسسته سازی زمان در هر دو مختص زمان و مکان شبکه جابجا شده را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} p^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}} &= p((j+\frac{1}{2})h, (n+\frac{1}{2})k), \qquad (۴.۱)\\ u^n_j &= u(jh, nk) \end{aligned}$$

روش مرتبه ۲ عبارتست از

$$\begin{aligned} p^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}} &= p^{n-\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}} + ka_{j+\frac{1}{2}}D_+u^n_j + kF^n_{j+\frac{1}{2}}, \qquad (۵.۱)\\ u^{n+1}_j &= u^n_j + kb_jD_-p^{j+\frac{1}{2}}_{n+\frac{1}{2}} + kG^{n+\frac{1}{2}}_j. \end{aligned}$$

برای بدست آوردن روش مرتبه ۴ لازم است در روش مرتبه ۲ فوق خطاهای مرتبه ۲ در زمان و مکان را حذف کنیم. خطای قطع در مکان برای معادله p عبارتست از $\frac{1}{24}ah^2u_{xxx}$ و برای معادله u عبارتست از $\frac{1}{24}bh^2p_{xxx}$. با مشتق گیری از (۲.۱) داریم

$$\begin{aligned} p_{ttt} &= a(b(au_x)_x)_x + a(bF_x)_x + aG_{xt} + F_{tt}, \qquad (۶.۱)\\ u_{ttt} &= b(a(bp_x)_x)_x + b(aG_x)_x + bF_{xt} + G_{tt}. \end{aligned}$$

---

[۵] Yee

بر اساس این فرمولها روش مرتبه ۴ زیر بدست می آید

$$\begin{aligned}
p_{j+\frac{۱}{۲}}^{n+\frac{۱}{۲}} &= p_{j+\frac{۱}{۲}}^{n-\frac{۱}{۲}} + ka_{j+\frac{۱}{۲}}D_{+}u_{j}^{n} \\
&+\frac{k}{۲۴}(k^{۲}D_{+}b_{j}D_{-}a_{j+\frac{۱}{۲}}D_{+} - h^{۲}D_{+}^{۲}D_{-})u_{J}^{N} \\
&+kF_{j+\frac{۱}{۲}}^{n} + \frac{k^{۳}}{۲۴}((a(bF_{x})_{x})_{j+\frac{۱}{۲}}^{n} + (aG_{xt})_{j+\frac{۱}{۲}}^{n} + (F_{tt})_{j+\frac{۱}{۲}}^{n}) \\
u_{j}^{n+۱} &= u_{j}^{n} + kb_{j}D_{-}p_{n+\frac{۱}{۲}}^{j+\frac{۱}{۲}} \\
&+\frac{k}{۲۴}b_{j}(k^{۲}D_{-}a_{j+\frac{۱}{۲}}D_{+}b_{j}D_{-} - h^{۲}D_{+}D_{-}^{۲})p_{j+\frac{۱}{۲}}^{n+\frac{۱}{۲}} \\
&+kG_{j}^{n+\frac{۱}{۲}} + \frac{k^{۳}}{۲۴}((b(aG_{x})_{x})_{j}^{n+\frac{۱}{۲}} + (bF_{xt})_{j}^{n+\frac{۱}{۲}} + (G_{tt})_{j}^{n+\frac{۱}{۲}}).
\end{aligned} \tag{۷.۱}$$

مسأله تست با F و G به صورت زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned}
F &= (a(x)-\alpha^{۲})\sin(x-\alpha t), \\
G &= \alpha(۱-b(x))\sin(x-\alpha t),
\end{aligned} \tag{۸.۱}$$

که دارای جواب زیر است

$$\begin{aligned}
p(x,t) &= -\alpha\cos(x-\alpha t), \\
u(x,t) &= \cos(x-\alpha t),
\end{aligned} \tag{۹.۱}$$

و ضرایب عبارتند از

$$\begin{aligned}
a(x) &= ۱+\varepsilon\sin(x), \\
b(x) &= ۱,
\end{aligned} \tag{۱۰.۱}$$

که $۱ > \varepsilon > ۰$. سرعت موج برابر است با $c = \sqrt{۱+\varepsilon\sin(x)}$ و ماکزیمم سرعت موج برابر است با $c_{\max} = \sqrt{۱+\varepsilon}$.