بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی مالی

# بررسی راهبرد استخراج بهینه نفت به کمک اختیار واقعی و شبیه‌سازی مونت‌کارلو

توسط:

امیر مبصر

اساتید راهنما:

دکتر کاظم نوری هفت‌چشمه
دکتر اسمعیل ابونوری

استاد مشاور:

دکتر علیرضا بحیرایی

مهرماه ۱۳۹۳

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

«به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند»

و برادران و خواهرانم

«که همواره وجودشان دلگرمی و صفایشان مایه آرامش من است»

# قدردانی


سپاس و ستایش خدای را جل و جلاله که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده‌ی ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید. به امید آن که توفیق یابم جز خدمت به خلق او نکوشم.

با سپاس فراوان از خانواده‌ی دلسوز و مهربانم که آرامش روحی و آسایش فکری بنده را فراهم نمودند تا با حمایت‌های همه جانبه در محیطی مطلوب، مراتب تحصیلی‌ام را پشت سر بگذارم.

و با تقدیر و تشکر شایسته از اساتید عزیزم جناب آقای دکتر کاظم نوری و جناب اقای دکتر اسمعیل ابونوری که با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و همواره راهنما و راه گشای نگارنده در اتمام و اکمال پایان‌نامه بوده‌اند.

همچنین برخود لازم می‌دانم از جناب آقای دکتر علیرضا بحیرایی که زحمت مشاوره اینجانب را به عهده داشتند و همچنین از جناب آقایان دکتر امید کریمی و دکتر سید کاظم ابراهیمی که زحمت مطالعه و داوری این پایان‌نامه را تقبل فرمودند، سپاسگزاری نمایم.

در خاتمه از دوستان عزیزم که با کمک‌های بی‌دریغ خود بر غنای علمی این اثر افزودند، کمال تشکر را دارم.

«پروردگارا حسن عاقبت، سلامت و سعادت را برای آنان مقدر فرما»

# چکیده

در این پایان‌نامه، یک راهبرد استخراج بهینه نفت به همراه ارزش یک میدان با استفاده از روش اختیار واقعی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این خصوص، پس از بیان روش تحلیل اختیار واقعی و انواع آن، به معرفی یک مسئله بهینه‌سازی تصادفی می‌پردازیم. سپس برای حل عددی مسئله از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو استفاده خواهیم کرد. همچنین در این پایان‌نامه مدل‌های قیمت نفت و هزینه استخراج را معرفی می‌کنیم. به‌علاوه، برای کشورهایی که با نااطمینانی اندازه ذخایر تثبیت شده نفت روبرو هستند مدلی را ارائه می‌دهیم. در پایان، مسئله اختیار واقعی را برای دو کشور برزیل و امارات به‌کار خواهیم گرفت و نحوه تاثیر تغییر پارامترهای مدل بر سیاست استخراج بهینه را نشان می‌دهیم.



**واژه‌های کلیدی:** استخراج نفت، اختیارات واقعی، قیمت تعادل نفت، اوپک.

# فهرست مطالب

# لیست تصاویر

# پیشگفتار

توسعه روزافزون فناوری، فرصت‌های جدید سرمایه‌گذاری در بخش‌ها و فعالیت‌های مختلف اقتصادی و مالی را فراهم آورده است. از سوی دیگر به دلیل افزایش پیچیدگی و همچنین پویایی شرایط حاکم بر فعالیت‌های اقتصادی و مالی و به تبع آن افزایش ریسک، تصمیم‌گیری در زمینه سرمایه‌گذاری و یا تامین مالی طرح‌های سرمایه‌گذاری و پروژه‌های اقتصادی نیازمند روش‌های تحلیلی پیشرفته‌تر است که نقایص روش‌های سنتی از جمله ایستایی را نداشته باشد. بر این اساس و در پاسخ به نیازهای جدید، تحلیل اختیار واقعی به وجود آمده و تفکر جدیدی را در ارتباط با تصمیم گیری‌های سرمایه‌گذاری و نیز ارزش‌گذاری طرح‌های اقتصادی ارائه می‌نماید.

اگر بخواهیم اختیار واقعی را به‌طور ساده تعریف نماییم می‌توان گفت که اختیار واقعی مانند نقشه راهی است که در جاهای مختلف آن نشانه‌هایی تعبیه شده که مسیرها و انتخابات موجود را در اختیار قرار می‌دهد و بدین ترتیب نه تنها امکان تصمیم‌گیری مناسب وجود دارد بلکه این ساختار به افزایش آگاهی و همچنین یادگیری بهتر فرد کمک می‌نماید.

در این پایان‌نامه تلاش کرده‌ایم که با استفاده از اختیار واقعی راهبردی را برای استخراج بهینه نفت ارائه دهیم. این پایان‌نامه شامل چهار فصل است. ابتدا در فصل اول به بیان مقدمات و تعاریفی که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرد، می‌پردازیم. و سپس در فصل دوم به اهمیت اختیار واقعی و کاربرد آن در طرح‌های سرمایه‌گذاری اشاره می‌کنیم و در فصل سه، راهبردی را برای استخراج بهینه نفت مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل آخر به نتایج عددی پرداخته‌ایم.

# فصل ۱

# مفاهیم و مقدمات

## ۱-۱ مقدمه

در سال ۱۹۳۱ هوتلینگ[۱] مطالعه اقتصادی استخراج منابع تجدیدناپذیر را آغاز کرد. وی در یک مدل تعادل کلی نشان داد که قیمت منابع در نرخ بهره بازارهای رقابتی با وجود هزینه‌های استخراج ثابت، افزایش خواهد یافت [۶]. سپس در سال ۱۹۷۹ مدل تعادل جزئی توسط تورینو[۲] بیان شد که در آن قیمت‌ها معین هستند اما تصمیم استخراج، تابعی از فرایند تصادفی قیمت می‌باشد [۱۷]. وی برای اولین بار ارزش‌گذاری منابع به مفهوم یک اختیار خرید واقعی از بهره‌برداری یک میدان را با استفاده از ساختار بلک‌شولز مورد بررسی قرار داد [۱۸]. در سال ۱۹۸۸ پادوک[۳] مدلی را ایجاد کرد که در آن شرکت دارای اختیار اکتشاف یک ناحیه است و در مورد نفت کشف شده متعهد به یک سرمایه‌گذاری توسعه آنی قبل از یک زمان معین می‌شود. اگر شرکت اختیار توسعه میدان را تا زمان معین اعمال نکند، حق امتیاز را باید به یک مقام ملی بازگرداند [۱۲]. در سال ۲۰۰۸ با مدل‌سازی مفروضات توسط کالدنتی[۴] کار پایان یافت. زمانی که قیمت آنی مس از یک فرایند تصادفی بازگشت به میانگین پیروی می‌کرد، وی به مطالعه عملکرد بهینه از یک پروژه استخراج معدن مس پرداخت [۲].

[۱] Hotelling

[۲] Tourinho

[۳] Paddock

[۴] Caldentey

برای اکثر مسائل قیمت‌گذاری اختیارات سه روش عددی شبکه‌ها، تفاضلات متناهی و شبیه‌سازی مونت‌کارلو وجود دارد. روش‌های تفاضلات متناهی و شبکه‌ها بهترین روش برای اختیارات ساده در یک زمینه مجزا (یک متغیر حالت) می‌باشند. زمانی که ابعاد مسئله (متغیرهای حالت) افزایش می‌یابد، روش مونت‌کارلو نسبت به دو روش دیگر برای اجرا ترجیح داده می‌شود. برای مثال زمانی که فرایند قیمت نفت توسط دو متغیر حالت به‌دست آمده است، یا هزینه‌های استخراج تصادفی هستند. اولین تلاش در اجرای روش مونت‌کارلو در قیمت‌گذاری اختیارات آمریکایی مشاهده شد.

## ۱-۲ مفاهیم فرایندهای تصادفی

در این بخش با مفاهیم آماری و فرایندهای تصادفی مورد استفاده در این پایان‌نامه آشنا خواهیم شد.

**تعریف ۱-۲-۱.** فرض کنید $\Omega$ مجموعه‌ای دلخواه و $\mathcal{F} \subset \rho(\Omega)$ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های $\Omega$ باشد، آنگاه $\mathcal{F}$ یک میدان است هرگاه:

۱. $\mathcal{F}$ تحت عمل متمم‌گیری بسته باشد، یعنی اگر $A \in \mathcal{F}$ آنگاه $A^c \in \mathcal{F}$.

۲. $\mathcal{F}$ تحت عمل اجتماع متناهی بسته باشد، یعنی اگر $A_i \in \mathcal{F}$ آنگاه $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.

**تعریف ۱-۲-۲.** می‌گوییم $\mathcal{F}$ یک $\sigma$-میدان است هرگاه:

۱. $\mathcal{F}$ تحت عمل متمم‌گیری بسته باشد، یعنی اگر $A \in \mathcal{F}$ آنگاه $A^c \in \mathcal{F}$.

۲. $\mathcal{F}$ تحت اجتماع شمارا بسته باشد، یعنی اگر $A_i$ ها از اعضای $\mathcal{F}$ باشند آنگاه $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

**تعریف ۱-۲-۳.** هرگاه $\Omega$ مجموعه‌ای دلخواه و $\mathcal{F}$، $\sigma$-میدانی از زیر مجموعه‌های $\Omega$ باشد آنگاه زوج مرتب $(\Omega, \mathcal{F})$ را فضای اندازه‌پذیر می‌گوییم و هرگاه $A \in \mathcal{F}$، می‌گوییم $A$ نسبت به $\mathcal{F}$ اندازه‌پذیر است.

**تعریف ۱-۲-۴.** $\Omega$ را فضای نمونه می‌نامیم. اگر $\mathcal{F}$، $\sigma$-میدانی روی $\Omega$ باشد و $A \in \mathcal{F}$، می‌گوییم $A$ نسبت به $\mathcal{F}$ پیشامد است.

**تعریف ۱-۲-۵.** فرض کنید $\Omega$ فضای نمونه و $\mathcal{F}$، $\sigma$-میدانی از آن باشد. در این صورت تابع مجموعه‌ای $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$ را اندازه احتمال گوییم هرگاه اصول زیر در مورد $P$ صادق باشد:

۱. $P(\Omega) = 1$

۲. اگر $A_1, A_2, \ldots$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مستقل از هم در $\mathcal{F}$ باشد آنگاه:

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

**تعریف ۱-۲.۶.** فرض کنید $\Omega$ فضای نمونه و $\mathcal{F}$، $\sigma$- میدانی از زیر مجموعه‌های $\Omega$ باشد و به علاوه $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$ یک اندازه احتمال باشد. در این صورت سه‌تایی مرتب $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را فضای احتمال می‌نامیم [۲۰].

**تعریف ۱-۲.۷.** برای بیان یک فرایند تصادفی معمولا به یک $\sigma$-میدان واحد نیاز نداریم، بلکه به دنباله صعودی از آنها نیازمندیم $(\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1} \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F})$. مجموعه $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ را پالایه[۱] و چهارتایی $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}, P)$ را فضای احتمال پالایه‌شده می‌نامیم.

**تعریف ۱-۲.۸.** متغیر تصادفی حقیقی مقدار $X$، یک تابع حقیقی مقدار روی $\Omega$ می باشد که $\mathcal{F}$ اندازه‌پذیر است، یعنی $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{F} \qquad \forall x \in R$

## ۱-۲-۱ فرایند تصادفی

فرایند تصادفی حقیقی مقدار، دنباله‌ای از توابع حقیقی مقدار $\{X_n\}_{n\geq 0}$ بر روی $\Omega$ است. یک فرایند تصادفی نسبت به پالایه $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ سازگار است هرگاه $X_n$ برای هر $n$ اندازه‌پذیر باشد [۳].

## ۱-۲-۲ فرایند مارکوف

فرایند تصادفی $\{X_n\}_{n\geq 0}$ یک فرایند مارکوف[۲] زمان گسسته است هرگاه برای هر $B \in \mathcal{F}$:

$$P[X_{n+1} \in B \mid \mathcal{F}_n] = P[X_{n+1} \in B \mid X_n] \qquad (۱-۱)$$

با توجه به این که ما از گذشته فرایند تا زمان $n$ مطلع هستیم، احتمال $X_{n+1} \in B$ با احتمال $X_{n+1} \in B$ که فقط مقدار داده شده $X_n$ را در اختیار داریم برابر است. این یعنی فرایند مارکوف دارای حافظه نیست

[۱] Filter

[۲] Markov Process

و ارزش جاری یک متغیر برای پیش‌بینی مقادیر آینده آن کفایت می‌کند [۳].
بنابراین در فرایندهای مارکوف، سابقه تغییرات یک متغیر و نیز چگونگی تعیین ارزش جاری این متغیر به کمک مقادیر گذشته، تاثیری در مقدار آینده آن ندارد، پس پیش‌بینی مقادیر آتی برای هر متغیر تصادفی، خود متغیر تصادفی است و لذا بر حسب توابع توزیع احتمال بیان می‌شود. فرض می‌کنیم تغییرات این متغیر در خلال یک سال آینده توزیعی نرمال با میانگین $\mu$ و واریانس $\sigma^۲$ دارد، یعنی $N(\mu, \sigma^۲)$. فرض کنید این توزیع نرمال را استاندارد کرده‌ایم، لذا تابع توزیع احتمال این متغیر برابر با $N(۰, ۱)$ است.
توزیع تغییرات این متغیر در سال آینده برابر است با مجموع دو توزیع نرمال که میانگین و انحراف معیار هر کدام به ترتیب صفر و یک است، و چون این متغیر از فرایند مارکف تبعیت می‌کند پس این دو توزیع نرمال از یکدیگر مستقل‌اند که در این صورت اگر دو توزیع نرمال را جمع کنیم توزیع نرمال حاصل نیز نرمال خواهد بود؛ و لذا تابع توزیع احتمال برای متغیر مفروض طی دو سال آینده برابر است با $N(۰, \sqrt{۲})$. توزیع در خلال دوره‌ای سه ماهه برابر است با $N(۰, \sqrt{۰٫۲۵})$، زیرا واریانس متغیر در خلال یک سال برابر است با واریانس آن طی ۴ دوره سه ماهه. بنابراین توزیع احتمال طی دوره‌ای به طول $T$ برابر است با $N(۰, \sqrt{T})$ و طی دوره کوتاه به طول $\delta t$ برابر خواهد بود با $N(۰, \sqrt{\delta t})$ [۲۲].

## ۱-۲-۳ حرکت براونی

حرکت براونی، یک فرایند تصادفی حقیقی مقدار $\{W(t) : t \geq ۰\}$ روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ است که شرایط زیر برای آن برقرار است:

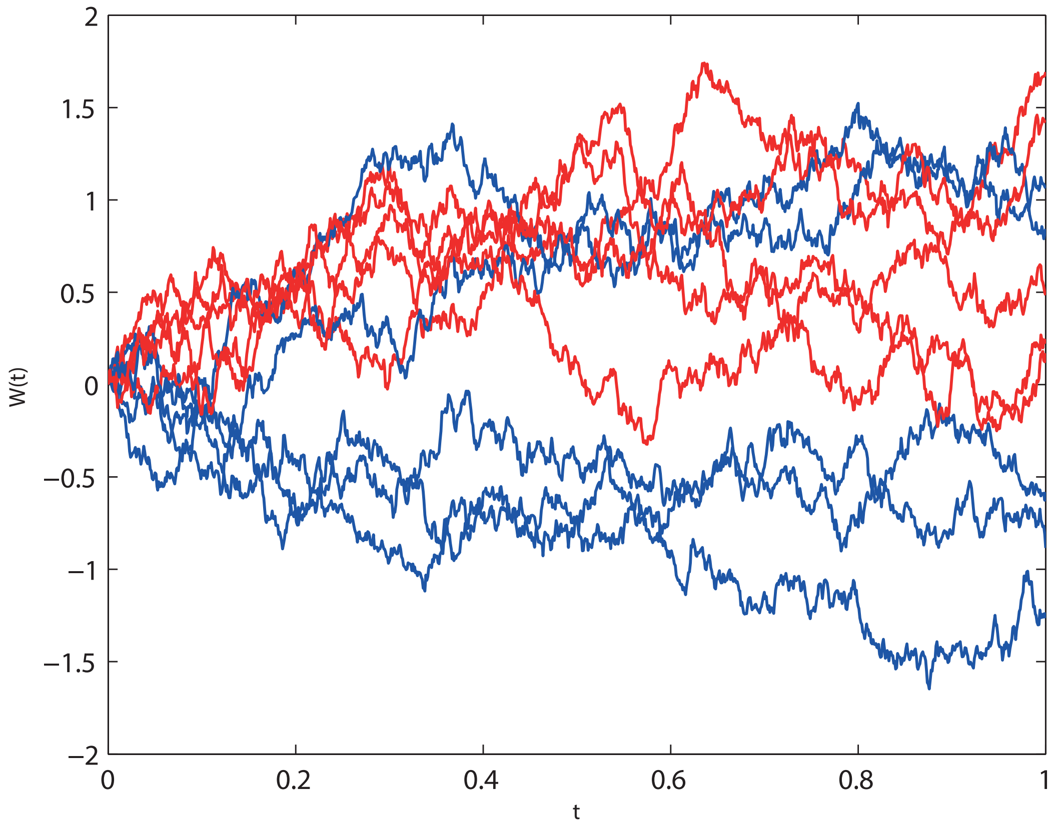
۱. برای هر $s \geq ۰$ و $t > ۰$ نمو $W(t+s) - W(s)$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $t\sigma^۲$ است.

۲. برای هر $n \geq ۱$ و زمان‌های $۰ \leq t(۰) \leq t(۱) \leq .... \leq t(n)$، متغیرهای تصادفی $\{W(t_r) - W(t_{r-۱})\}$ مستقل هستند.

۳. $W(۰) = ۰$.

۴. $W(t)$ در $t \geq ۰$ پیوسته است.

اگر در شرط اول $\sigma^۲ = ۱$، آنگاه حرکت براونی را استاندارد گویند[۳]. شکل (۱-۱) نمونه مسیرهای حرکت براونی را نشان می‌دهد.




شکل ۱-۱: نمونه مسیرهای حرکت براونی.

## ۱-۳ مارتینگل

فضای احتمال پالایه شده $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}, P)$ مفروض است. دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $\{X_n\}_{n\geq 0}$ یک مارتینگل است هرگاه شرایط زیر صادق باشند [۳]:

$$E[\mid X_n \mid] < \infty \qquad \forall n \tag{۱-۲}$$

$$E[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n \qquad \forall n \tag{۱-۳}$$

برای مثال حرکت براونی یک مارتینگل است.

**تعریف ۱-۳-۱.** متغیر تصادفی $\tau : \Omega \to [0, \infty)$ با توجه به پالایه $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ زمان توقف نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $n \geq 0$ داشته باشیم $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

رابطه بالا این حقیقت را بیان می‌کند که پیشامد $\{\tau \leq n\}$، $\mathcal{F}_n$-اندازه‌پذیر است و بنابراین در زمان $n$

قابل مشاهده است [۳].

**تعریف ۱-۲.۳.** اگر $X_t(.) : \Omega \to R$ یک فرایند تصادفی پیوسته باشد سپس برای $P > ۰$، تغییرات درجه $P$ فرایند $X_t$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle X, X\rangle_t^{(P)}(\omega) = lim_{\Delta t_k \to ۰} \sum_{t_k \leq t} \mid X_{t_{k+۱}}(\omega) - X_{t_k}(\omega) \mid^P$$

که $۰ = t_۱ < t_۲ < ... < t_n = t$ و $\Delta t_k = t_{k+۱} - t_k$. اگر در تعریف بالا $P = ۱$ باشد آن‌گاه آن را فرایند تغییرات کل می‌نامیم و اگر $P = ۲$ باشد آن را فرایند تغییرات درجه دوم می‌نامیم. برای حرکت براونی $W_t \in R$، تغییرات درجه دوم به‌صورت زیر می‌باشد [۱۱].

$$\langle W, W\rangle_t(\omega) = \langle W, W\rangle_t^{(۲)}(\omega) = t$$

## ۱-۴ معادله دیفرانسیل تصادفی و حسابان ایتو

یک معادله دیفرانسیل تصادفی، معادله دیفرانسیلی است که یک یا بیش از یک عبارت آن فرایند تصادفی است. مانند:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t)$$

این معادله دیفرانسیل جوابی به صورت زیر دارد:

$$X(t) = X(t_۰) + \int_{t_۰}^{t} f(s, X(s))ds + \int_{t_۰}^{t} g(s, X(s))dW(s).$$

با کمی دقت در جواب معادله دیفرانسیل درمی‌یابیم که انتگرال اول، یک انتگرال ریمان-اشتیلیس [۱] است و به راحتی قابل حل است. اما انتگرال دوم از این نوع نیست. برای حل انتگرال دوم آن را به صورت مجموع زیر می‌نویسیم:

$$\sum_{j=۱}^{n} g(t'_j, X(t'_j))\Big[W(t_j) - W(t_{j-۱})\Big]$$

[۱] Riemann-Stieljes Intgral

که $t'_j \in [t_{j-1}, t_j]$ است. برای سهولت در محاسبات $g(s, X(s)) = W(t)$ در نظر می‌گیریم و $W(t)$ را با تابع $\varphi_n^\lambda(t) = \lambda W(t_k^{(n)}) - (1-\lambda)W(t_{k-1}^{(n)})$ برای هر $t_{k-1}^{(n)} < t < t_k^{(n)}$ و $0 \leq \lambda \leq 1$ تقریب می‌زنیم. آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\int_a^b \varphi_n^\lambda(t)dW(t) = \sum_{j=1}^n \varphi_n^\lambda(t_{k-1})\Big[W(t_j^{(n)}) - W(t_{j-1}^{(n)})\Big]. \tag{۴-۱}$$

طرف راست (۱-۴) را می‌توانیم به صورت

$$\lambda\sum_{j=1}^n W(t_k^{(n)})\Big[W(t_j^{(n)}) - W(t_{j-1}^{(n)})\Big] - (1-\lambda)\sum_{j=1}^n W(t_{k-1}^{(n)})\Big[W(t_j^{(n)}) - W(t_{j-1}^{(n)})\Big]$$

بنویسیم. با بازآرایی عبارت می‌توانیم بنویسیم:

$$\sum_{j=1}^n W(t_{k-1}^{(n)})\Big[W(t_j^{(n)})-W(t_{j-1}^{(n)})\Big] = \frac{1}{2}W(t_k^{(n)})^2-\frac{1}{2}W(t_0^{(n)})^2-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\Big[W(t_j^{(n)})-W(t_{j-1}^{(n)})\Big]^2$$

و

$$\sum_{j=1}^n W(t_k^{(n)})\Big[W(t_j^{(n)})-W(t_{j-1}^{(n)})\Big] = \frac{1}{2}W(t_k^{(n)})^2-\frac{1}{2}W(t_0^{(n)})^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\Big[W(t_j^{(n)})-W(t_{j-1}^{(n)})\Big]^2.$$

در نتیجه با توجه به تساوی‌های بالا خواهیم داشت:

$$\sum_{j=1}^n \varphi_n^\lambda(t_{k-1})\Big[W(t_j^{(n)})-W(t_{j-1}^{(n)})\Big] = \frac{1}{2}W(t_{k-1}^{(n)})^2-\frac{1}{2}W(t_0^{(n)})^2+\frac{1}{2}(2\lambda-1)\sum_{j=1}^n\Big[W(t_j^{(n)})-W(t_{j-1}^{(n)})\Big]^2. \tag{۵-۱}$$

بازه $[a,b]$ به $n$ زیر بازه برابر با طول‌های برابر $\frac{b-a}{n}$ تقسیم شده است. لذا برای هر $k$

$$\Big[W(t_k^{(n)}) - W(t_{k-1}^{(n)})\Big]^2 = t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}.$$

است. در نتیجه برای (۱-۵) زمانی که $\delta_n = t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)} \to 0$ حد میانگین مربع برابر است با:

$$\int_0^t W(t)dW(t) = \frac{1}{2}[W^2(b) - W^2(a)] + (\lambda - \frac{1}{2})(b-a).$$

برای هر انتخاب مختلف $\lambda$، نتیجه‌ای متفاوت حاصل می‌شود. اگر $\lambda = 0$ انتخاب شود ($t_i' = t_i$) انتگرال ایتو حاصل می شود. با قراردادن $\lambda = 0$ انتگرال ایتو به‌صورت

$$\int_0^t W(t)dW(t) = \frac{1}{2}[W^2(b) - W^2(a)] - \frac{1}{2}(b-a),$$

به‌دست می‌آید. به ترتیبی که انتگرال ایتو $\int_0^t X(t)dW(t)$ تعریف شد لازم است که $X(t)$ و $W(t)$ هر دو در فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ تعریف شده باشند.
با توجه به شرایط گفته شده در بالا ،برای هر $f$ و $g$ تعریف شده در $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ می‌توانیم روابط زیر را بنویسیم

$$1) E\left( \int_0^t f(x,s)dW(s) \right) = 0$$

$$2) E\left[ \left( \int_0^t f(x,s)dW(s) \right)^2 \right] = \int_0^t E(f(x,s)^2)ds$$

$$3) E\left[ \left( \int_0^t f(x,s)dW(s) \right) | \mathcal{A}_{t_0} \right] = 0, \quad 0 \le t_0 \le t \le T$$

$$4) Cov\left( \int_0^t f(x,s)dW(s), \int_0^t g(x,s)dW(s) \right) = \int_0^t E[f(x,s)g(x,s)]ds$$

و اینکه $\int_0^t f(x,s)dW(s)$، $\mathcal{A}$-اندازه‌پذیر است [۱].

## ۱-۵ فرمول ایتو

فرض کنید $X = \{X_t, t \geq ۰\}$ فرایند تصادفی پیوسته به شکل زیر باشد:

$$\begin{cases} dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t, \quad t \geq ۰, \\ X_۰ = x_۰. \end{cases}$$

که در آن $a = \{a_t, t \geq ۰\}$ و $b = \{b_t, t \geq ۰\}$ است.

فرض کنید $u : [۰, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی دیفرانسیل‌پذیر نسبت به $t$ و دوبار به‌طور پیوسته دیفرانسیل‌پذیر نسبت به مولفه جزئی $x$ است ($C^{۱,۲}([۰, \infty) \times \mathbb{R})$) به‌طوری که مشتقات جزئی $\frac{\partial u}{\partial t}$، $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}$ موجود و پیوسته‌اند. در این صورت تغییرات $u(t, X_t)$ به شکل زیر بوده که در آن فرمول ایتو بدست می آید:

$$du(t, X_t) = \Big[\frac{\partial u}{\partial t}(t, X_t) + a(t, X_t)\frac{\partial u}{\partial x}(t, X_t) + \frac{۱}{۲}b^۲(t, X_t)\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}(t, X_t)\Big]dt + b(t, X_t)\frac{\partial u}{\partial x}(t, X_t)dW_t.$$

همچنین شکل انتگرالی فرمول ایتو به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} u(t, X_t) =& u(۰, X_۰) + \int_۰^t \Big[\frac{\partial u}{\partial t}(s, X_s) + a(s, X_s)\frac{\partial u}{\partial x}(s, X_s) + \frac{۱}{۲}b^۲(s, X_s)\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}(s, X_s)\Big]ds \\ &+ \int_۰^t b(s, X_s)\frac{\partial u}{\partial x}(s, X_s)dW_s. \end{aligned}$$

با استفاده از تغییرات درجه دوم می‌توانیم فرمول ایتو را به صورت زیر بنویسیم [۱۴]:

$$du(t, X_t) = \frac{\partial u(t, X_t)}{\partial t}dt + \frac{\partial u(t, X_t)}{\partial x}dX_t + \frac{۱}{۲}\frac{\partial^۲ u(t, X_t)}{\partial x^۲}\langle X \rangle_t.$$

## ۱-۶ ماهیت تحلیل رگرسیونی

**تعریف ۱-۶.۱.** تحلیل‌های رگرسیون به مطالعه وابستگی یک متغیر (متغیر وابسته) با یک یا چندگانه دیگر (متغیر توضیحی) می‌پردازد که با پیش‌بینی مقدار متوسط یا میانگین مقادیر متغیر نوع اول در حالتی که مقادیر متغیر نوع دوم معلوم یا معین شده باشند، صورت می‌پذیرد.