إنه من سليمان وإنه

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی– آنالیز عددی

حل عددی معادلات انتگرال با استفاده از موجک‌ها

استاد راهنما:

دکتر سید محمدمهدی حسینی

استاد مشاور:

دکتر فرید (محمد) مالک قائینی

پژوهش و نگارش:

مجتبی عابدیان چرمهینی

شهریور ماه ۱۳۸۷

تقدیم به:

محضر ولی عصر(عج)

و

پدر و مادر
عزیزتر از جانم

تقدیر و تشکر

سپاس خداوند منان را که توفیقی نصیبم نمود تا در سایه الطافش آرمانم را جامه عمل بپوشانم.

اینک که در پایان مقطع تحصیلی دیگر که نتیجه تلاش و پیگیری‌های مداوم پدر و مادر عزیزم و مساعدت‌های اساتید فداکار و ارجمندم است، قرار گرفته‌ام، برای اینجانب مایه مسرت و خوشبختی و افتخار است که از محضر اساتیدی بهره برده‌ام که وجود هر کدام منبع فیضی در راه تعلیم و تربیت و پیشرفت اینجانب بوده است.

شایسته است از استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر سید محمد مهدی حسینی تشکر و قدردانی کنم که بدون کمک ومساعدت‌های بی‌دریغ‌شان تهیه این پایان‌نامه به هیچ وجه مقدور نبود. از استاد مشاور گرامیم جناب آقای دکتر فرید (محمد) مالک به خاطر راهنمایی‌ها و کمک‌های بی‌دریغ‌شان کمال تقدیر و تشکر را دارم. سزاوار است از اساتید محترم جناب آقای دکتر قاسم برید لقمانی و جناب آقای دکتر قاسم انصاری‌پور که زحمت مطالعه و داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند، سپاس‌گذاری نمایم. همچنین از کلیه اساتید و مسئولین دانشکده ریاضی مخصوصاً جناب آقای دکتر سید مهدی کرباسی و همچنین سرکار خانم عابدینی و سرکار خانم عباسی‌زاده کمال تشکر و قدردانی دارم. از افراد خانواده‌ام، برادرانم بهنام، مسعود، محمدرضا و محمدحسین و خواهران عزیزم عصمت، عاطفه و مرضیه که در زمان تهیه این پایان‌نامه کمک‌های زیادی به من کردند، سپاس‌گزاری می‌نمایم. از همه هم‌کلاسان خوبم و دوستان عزیزم آقایان کمال امینی، علی‌رضا امین، رضا هاشمی، مصطفی جعفری، مهدی حاجی اشرفی، مهدی خوبی، محمد اسکندری، امید عباسی، داریوش حیدری، ابوالفضل توسلی، محمد ضیائی، محمدرضا خلت، علی پادرگانی، جواد قاسمی و بقیه دوستانم که نام آن‌ها ذکر نشد تشکر وقدردانی می‌کنم.

مجتبی عابدیان چزمهینی ۱۳۸۷/۴/۳۰

بسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی	صورتجلسه دفاعیه پایان نامه دانشجوی دوره کارشناسی ارشد	شناسه: ب/ک/۳

جلسه دفاعیه پایان نامه تحصیلی آقای مجتبی عابدیان چرمهینی دانشجوی کارشناسی ارشد

رشته/گرایش: ریاضی کاربردی

تحت عنوان: حل عددی معادلات انتگرال با استفاده از موجک‌ها

و تعداد واحد: ۶ درتاریخ ۸۶/۶/۱۷ باحضور اعضای هیأت داوران (به شرح ذیل) تشکیل گردید.

پس از ارزیابی توسط هیأت داوران، پایان‌نامه با نمره: به عدد ۱۹/۲۵ به حروف نوزده و بیست و پنج صدم و

درجه عالی مورد تصویب قرارگرفت.

عنوان	نام و نام خانوادگی	امضاء
استاد/ استادان راهنما:	سید محمد مهدی حسینی	
استاد/ استادان مشاور:	فرید(محمد) مالک	
متخصص وصاحبنظرداخلی:	قاسم برید لقمانی	
متخصص و صاحبنظر خارجی:	قاسم انصاری پور	

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر)

نام ونام خانوادگی: محمد کاظم توسلی

امضاء:

چکیده

در این پایان‌نامه پس از بیان تعاریف و مفاهیم لازم درباره موجک‌ها و معرفی برخی از انواع آن‌ها، به بیان تعاریف معادلات انتگرال و دسته بندی آن‌ها می‌پردازیم. پس از آن به طور خاص موجک هار را مورد بررسی قرار داده و به کمک این موجک و با استفاده از روش هم‌محلی به حل معادلات انتگرال خطی و غیرخطی می‌پردازیم.

شیوه کار بدین صورت است که سری قطع شده هار را به عنوان جواب تقریبی معادله انتگرال در نظر گرفته و با استفاده از نقاط هم‌محلی معادله انتگرال را به صورت ماتریسی تبدیل می‌کنیم که متناظر با یک دستگاه از معادلات جبری با ضرایب مجهول موجک هار است. بنابراین این امکان به وجود می‌آید که برنامه کامپیوتری این روش را نوشته و روش را با استفاده از مثال‌های عددی ارزیابی کنیم.

در پایان موجک چبیشف را که از خانواده موجک‌های پیوسته است معرفی کرده و با استفاده از آن و روش فوق‌الذکر معادلات انتگرال خطی را حل کرده و با حل مثال‌های عددی روش‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم.

فهرست مندرجات

مقدمه

در سال‌های اخیر مسائل بسیاری در فیزیک و رشته‌های مهندسی شکل گرفته که حل آن‌ها منجر به حل معادلات دیفرانسیل و انتگرال می‌شود. به همین دلیل حل این‌گونه معادلات از اهمیت ویژه‌ای برخوردار شده است و بسیاری از افراد را برای به دست آوردن روشی سریع و کارا به تکاپو واداشته است.

همچنین یکی از موضوعات زیبا و بسیار کاربردی ریاضیات که در سال‌های اخیر گسترش زیادی در علوم فنی و مهندسی داشته است نظریه موجک‌هاست. اصطلاح موجک به خانواده‌ای از توابع که از انتقال[1] و اتساع[2] تابعی به نام موجک مادر ساخته می‌شوند، اطلاق می‌شود. اگر پارامتر انتقال را b، پارامتر اتساع را a و موجک مادر را $\psi(t)$ بنامیم در این صورت خانواده موجک پیوسته به صورت زیر خواهد بود:

$$\psi_{ab}(t) = |a|^{-1/2}\psi(\frac{t-b}{a}), \qquad a, b \in R,\ a \neq 0$$

حال چنانچه پارامترهای a و b را به مجموعه‌ای گسسته محدود کنیم و قرار دهیم $b = nb_0 a_0^{-k},\ a = a_0^{-k}$ که $n, k, b_0 > 0,\ a_0 > 1$ اعداد صحیح مثبت هستند آنگاه خانواده موجک گسسته زیر را خواهیم داشت:

$$\psi_{kn}(t) = |a|^{k/2}\psi(a_0^k t - nb_0)$$

که $\psi_{k,n}(t)$ یک پایه برای $L^2(\mathbb{R})$ می‌باشند.

در این سال‌ها توابع پایه متعامد یکه متفاوتی از جمله توابع فوریه، چندجمله‌ای‌های چبیشف و موجک‌ها برای تقریب جواب معادلات انتگرال مورد استفاده واقع شده‌اند.

[1] translation
[2] dilation

در این پایان‌نامه از روش هم‌محلی مبتنی بر پایه موجک‌های هار برای به دست آوردن جواب تقریبی معادلات انتگرال استفاده می‌کنیم. مزیت این موجک‌ها ساده بودن آن‌ها و ایجاد ماتریس تبدیل تنک است و بنابراین روش ارائه شده به عنوان یک راه‌حل ارزان برای معادلات انتگرال شمرده می‌شود.

در فصل اول برخی از تعاریف مورد نیاز در مورد موجک‌ها و برخی از انواع موجک‌ها معرفی می‌گردند.

در فصل دوم مقدماتی از معادلات انتگرال و انواع آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل سوم موجک هار را به طور خاص مورد بررسی قرار داده و تعاریف و قضایای مربوط به آن‌را به طور کامل بیان می‌کنیم.

در فصل چهارم به حل معادلات انتگرال خطی با استفاده از موجک هار می‌پردازیم.

در فصل پنجم ابتدا روش نیوتن را در مورد دستگاه‌های غیرخطی بیان کرده و سپس به حل معادلات انتگرال غیرخطی به کمک موجک‌های هار خواهیم پرداخت.

در فصل ششم ضمن معرفی موجک پیوسته چبیشف به بررسی خواص آن پرداخته و سپس با استفاده از این موجک معادلات انتگرال خطی فردهلم و ولترا را حل کرده و ضمن آوردن مثال عددی نتایج به دست آمده را با نتایج روش موجک هار مقایسه می‌کنیم.

فصل ۱

آشنایی با موجک‌ها

۱.۱ مقدمه

موجک‌ها کاربردهای بسیاری در علوم و مهندسی نظیر گرافیک کامپیوتری، علوم کامپیوتر، فشرده‌سازی داده‌ها، پردازش سیگنال‌ها و ... دارند. موجک‌ها به عنوان یک دستگاه متعامد به دلیل قابلیت نمایش توابع در سطوح مختلف تجزیه[۱] جایگاه خاصی را در بین سیستم‌های متعامد دیگر به خود اختصاص داده‌اند. ویژگی اصلی روش‌های مبتنی بر سیستم‌های متعامد آن است که ابتدا پاسخ سیستم را به صورت بسطی از توابع متعامد در نظر گرفته و سپس با استفاده از ماتریس عملگری، معادلات بیانگر رفتار سیستم را به شکل یک دستگاه معادلات جبری تبدیل نموده و سپس با حل دستگاه جبری، جواب دستگاه اصلی در شرایط گوناگون تعیین می‌شود.

موجک‌ها به دلیل تنوع انتخاب در موجک مادر[۲] و قابلیت نمایش توابع در سطوح مختلف تجزیه مشکلات ناشی از عدم دقت توابع قطعه‌ای ثابت (بلاک—پالس، والش و ...) و عدم کارایی توابع پیوسته (لژاندر، چبیشف، فوریه و ...) را در نمایش توابع غیر پیوسته برطرف می‌نمایند.

---

[۱] Resolution

[۲] Mother Wavelet

۲.۱ تاریخچه

۱.۲.۱ از فوریه (۱۸۰۷) تا هار (۱۹۰۹)

در سال ۱۸۰۷ جوزف فوریه[۳] اظهار کرد که هر تابع $\text{۲}\pi$ متناوب را می‌توان به صورت مجموع

$$a_\circ + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k cos(kx) + b_k sin(kx)]$$

نوشت، که ضرائب $a_\circ, a_k, b_k (k \geq 1)$ به وسیله رابطه‌های زیر محاسبه می‌شوند:

$$a_\circ = \frac{1}{2\pi}\int_\circ^{2\pi} f(x)dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_\circ^{2\pi} f(x)cos(kx)dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_\circ^{2\pi} f(x)sin(kx)dx$$

فوریه در زمانی نتایج به دست آمده خود را منتشر کرد که هنوز نماد تابع و انتگرال تعریف دقیقی نداشتند. می‌توان گفت که سری فوریه نقش مهمی را در تکامل عقایدی که ریاضیدانان در مورد این دو مفهوم داشتند، بازی کرده است. در سال ۱۸۷۲ دوبوا ریموند[۴] تابع پیوسته، $\text{۲}\pi$ متناوبی از متغیر x ساخت که سری فوریه آن در یک نقطه داده شده واگرا بود. این مطلب نقضی بر اظهارات فوریه بود. بنابراین سه راه جدید در برابر ریاضیدانان گشوده شد که همه آن‌ها به نتایج مهمی منتج شدند:

الف) می‌توانستند در نماد تابع تجدید نظر کرده و نمادی را ابداع کنند که با آن‌چه فوریه می‌گفت نیز مطابقت داشته باشد.

ب) می‌توانستند تعریف همگرایی سری فوریه را اصلاح کنند یا

ج) می‌توانستند دستگاه متعامد یکه دیگری را ابداع کنند که برای آن اتفاقی که به وسیله مثال ریموند در حالت دستگاه مثلثاتی رخ داد، واقع نشود. راه اخیر به پیدایش موجک‌ها منتج شد.

---

[۳] Joseph Fourier

[۴] Du Bois-Reymond

در سال ۱۹۸۴ گروسمن[5] و مورله[6] برای نخستین بار نظریه موجک را به صورت نظریه‌ای مستقل مطرح نمودند. آن‌ها از این نظریه در مطالعه پدیده زلزله و مدل سازی آن استفاده کردند و به اتفاق هم نخستین بار تعبیر موجک را برای این نظریه و توابع مربوطه پیشنهاد کردند. اما پیشینه نظریه موجک را نمی‌توان به سال ۱۹۸۴ محدود نمود زیرا قبل از آن به طور جسته و گریخته و نامنسجم روی این نظریه کار شده بود. از اوایل قرن بیستم تا سال ۱۹۸۴ در شش حوزه مختلف زیربنای این نظریه مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است.

حوزه نخست مربوط به آغاز قرن بیستم است. زمانی که هار در سال ۱۹۰۹ با ایده گرفتن از توابع متعامد یکه فوریه:

$$e^{-2k\pi ix}, x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

و ویژگی آن‌ها در بسط توابع $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ به این فکر افتاد که توابعی بسازد که علاوه بر متعامد یکه بودن توانایی بسط تابع را روی بازه $[0, 1]$ داشته باشند. شاید اولین سری توابع را همین توابع فوریه که مقیاس زمانی— فرکانسی شده باشند در نظر بگیریم. اما هار به دنبال توابعی بود که فقط محدود به بازه $[0, 1]$ باشند و در خارج آن صفر باشند.

در دومین حوزه لوی[7] به طور جداگانه‌ای در مطالعه حرکت براونی[8] ذرات به کاربردی از این توابع برخورد نمود[۱۵]. او که در دهه سوم قرن بیستم روی این پدیده تحقیق می‌کرد، برای مدل سازی و توصیف حرکت براونی، بسط

$$X(x, \chi) = a_0(x) + xb_0(\chi) + 1/2 \sum_{j=1}^{\infty} 2^{\frac{-j}{2}} g_n(\chi)\Delta_n(x)$$

را معرفی نمود که می‌توان شباهت ظاهری آن را با بسط موجک دریافت. همچنین توابع g_n نیز خواصی مشابه توابع موجک داشتند. این بسط از نظر دقت در مدل‌سازی و سادگی در نوع خود بی‌نظیر بود. مطالعه روی حرکت براونی هنوز یکی از زمینه‌های مطالعاتی

---

[5] Grosman

[6] Morlet

[7] Levy

[8] Brownian

نظریه موجک است[۱۴].

در دهه چهارم قرن بیستم بار دیگر مطالعات در حوزه‌ای دیگر، راه را برای ارائه نظریه موجک هموار ساخت. در این دهه پیلی[۹] و لیتلوود[۱۰] روی مبحث انرژی توابع تحقیق می‌کردند[۲۷] . آن دو بسیار علاقه‌مند بودند که بتوانند روشی بیابند که توسط آن معلوم شود که یک تابع در بازه خاص زمانی یا فرکانسی حامل چه مقدار انرژی است. توابع فوریه در نمایش توزیع طیف انرژی در حوزه فرکانس بسیار قدرتمندند، اما قادر به ارائه طیف زمانی– فرکانسی انرژی نیستند.

در حوزه‌ای متفاوت پروفسور فرانکلین[۱۱] در دهه چهارم شروع به ساختن توابعی کرد که متعامد یکه بوده و پایه مناسبی برای مقیاس توابع با انرژی محدود عضو $L^2(\mathbb{R})$ باشند. وی به مجموعه توابعی دست یافت که شباهت زیادی با موجک‌ها داشتند. تنها ضعف این توابع در مقایسه با توابع هار مشکل بودن کار با آن‌ها و ساده نبودن فرم بسته‌شان است.

در پنجمین حوزه، توجهات به تجزیه سیگنال‌ها به قطعات زمانی و فرکانسی آن معطوف بود. در این حوزه ویس[۱۲] و کایفمن[۱۳] به شدت روی تجزیه وتحلیل این پدیده کار می‌کردند و عملاً شرایط برای ارائه نظریه موجک آماده شد[۱۵]. در ششمین حوزه مطالعات، اشترومبرگ[۱۴] در سال ۱۹۸۰ به منظور تکمیل کارهای ویس و کایفمن نظریه اتمی توابع را به فضای هیلبرت و هاردی گسترش داد و مبنای ریاضی نظریه موجک‌ها را بنا نهاد[۱۵].

مطالعات و تحقیق و بررسی در این شش حوزه متفاوت که تا قبل از نظریه موجک، ربط و بستگی به هم نداشتند تا سال ۱۹۸۴ ادامه یافت تا اینکه در این سال گروسمن و مورله دو مقاله([۱۲] و [۱۳]) را تحت عنوان توابع موجک و تبدیل موجک تألیف کردند و

---

[۹] Paley

[۱۰] Littlewood

[۱۱] Franklin

[۱۲] Weiss

[۱۳] Coifman

[۱۴] Stromberg

بدین ترتیب این دو برای اولین بار تعریف جامعی از یک تابع موجک ارائه دادند.

تعاریف ارائه شده برای موجک‌ها متنوع است. در اینجا سه تعریف برای توابع موجک ذکر می‌گردد:

۱) مورله و گروسمن موجک‌ها را به صورت زیر تعریف کردند:

موجک تابعی مانند ψ در $L^{2}(\mathbb{R})$ است که تبدیل فوریه آن $\hat{\psi}$ در شرط زیر صدق می‌کند.

$$\int_{0}^{1} \mid \hat{\psi}(t\xi) \mid^{2} \frac{dt}{t} = 1 \qquad a.e.$$

۲) تعریف دوم را اشتاین[۱۵]، پیلی و لیتلوود ارائه دادند:

یک موجک تابعی مانند ψ در $L^{2}(\mathbb{R})$ است که تبدیل فوریه آن $\hat{\psi}$ در شرط زیر صدق می‌کند.

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mid \hat{\psi}(2^{-j}\xi) \mid^{2} = 1 \qquad a.e.$$

اگر ψ با این مفهوم یک موجک باشد آنگاه $\sqrt{\log \psi}$ در شرط مورله— گروسمن صدق می‌کند.

۳) تعریف سوم مربوط به فرانکلین و اشترومبرگ است:

یک موجک تابعی مانند ψ در $L^{2}(\mathbb{R})$ است که، $j, k \in \mathbb{Z}$ ، $2^{j/2}\psi(2^{j}x - k)$ یک پایه متعامد یکه برای $L^{2}(\mathbb{R})$ باشند.

پس از سال ۱۹۸۴ که این توابع به صورت نظریه مستقل، جامع و توانمند عرضه شدند، با سرعت بسیاری مفاهیم مربوط به آن‌ها کامل شده و با دیدگاه‌های نو آمیخته شد. در سال ۱۹۸۸ دوبشی[۱۶] در ادامه کارهای اشترومبرگ توانست صورت ساده‌تر و قابل فهم‌تری از این توابع را به عنوان یک پایه متعامد یکه برای $L^{2}(\mathbb{R})$ ارائه دهد[۹]. او تا سال ۱۹۹۲-۱ طی یک سری مقالات و سمینارها، این توابع را در حالت‌های پیوسته زمانی و گسسته زمانی

---

[۱۵] Stein

[۱۶] Daubeches

بسط و تعمیم داد و توابع مناسبی را به عنوان نمونه معرفی کرد. در سال ۱۹۸۷ مالات[۱۷] در[۲۶]، نظریه تقریب چندریزه‌ساز را که در پردازش سیگنال‌ها و سیستم‌ها کاربرد دارد، با مفهوم موجک بیان نمود و نشان داد که نه تنها توابع موجک و مقیاس متناظر، ابزار بسیار مناسبی برای پردازش چندریزه‌ساز می‌باشند، بلکه خاصیت تقریب چندریزه‌ساز از خواص ذاتی توابع موجک است.

۳.۱ پیش‌نیازهای ریاضی

تعریف ۱.۳.۱ محمل تابع مختلط f در فضای توپولوژیک X بستار مجموعه

$$\{x : f(x) \neq 0\}$$

می‌باشد.

تعریف ۲.۳.۱ فضای توابع انتگرال‌پذیر مربعی با ضرب داخلی

$$< f, g >= \int_R f(x)\overline{g(x)}dx$$

و نرم

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle} = (\int_R \mid f(x) \mid^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

را با $L^2(\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم [۳۰].

یک تابع $f \in L^2(\mathbb{R})$ اغلب بهتر تحلیل می‌شود اگر به صورت یک ترکیب خطی

$$f(t) = \sum_l a_l\psi_l(t) \qquad (۱.۳.۱)$$

[۱۷] Mallat

نشان داده شود، که l یک اندیس صحیح برای مجموع متناهی یا نامتناهی، a_lها ضرایب حقیقی مقدار بسط و $\{\psi_l(t)\}_l$ یک مجموعه از توابع حقیقی مقدار از t است که مجموعه بسط[۱۸] نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۳.۱ اگر بسط (۱.۳.۱) یکتا باشد، مجموعه بسط متناظر یک پایه برای $L^2(\mathbb{R})$ نامیده می‌شود.

اگر پایه متعامد باشد به این معنا که

$$<\psi_k(t), \psi_l(t)>= \int \psi_k(t)\overline{\psi_l(t)}dt = \alpha_k\delta_{kl} \qquad (۲.۳.۱)$$

که δ_{kl} تابع دلتای کرونکر است، آن‌گاه ضرایب را با ضابطه

$$a_k = \frac{1}{\alpha_k} < f(t), \psi_k(t) >= \frac{1}{\alpha_k}\int f(t)\psi_k(t)dt \qquad (۳.۳.۱)$$

می‌توان محاسبه کرد. در واقع با جایگزینی (۱.۳.۱) در (۳.۳.۱) و استفاده از (۲.۳.۱) ضرایب یکتای a_k به دست می آیند [۳].

تعریف ۴.۳.۱ اگر در (۲.۳.۱)، $\overline{\alpha_k} = 1$، آن‌گاه پایه، یک پایه متعامد یکه[۱۹] نامیده می‌شود.

۴.۱ ساخت موجک‌ها

۱.۴.۱ تابع مقیاس

ساختار اصلی موجک‌ها مبتنی بر توابع مقیاس است. یک تابع مقیاس φ تابعی است که می‌توان آن‌را به صورت ترکیب خطی از $\varphi(2t-k)$ها نمایش داد، یا به طور صریح‌تر

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k\varphi(2t-k) \qquad (۴.۴.۱)$$

[۱۸] Expansion Set

[۱۹] Orthonormal Base