دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم ریاضی و آمار

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

ارزیابی و یکنواخت سازی موضعی

استاد راهنما

دکتر محمد حسین حسینی

استاد مشاور

دکتر حسین فضائلی مقیمی

نگارنده

سعید کاکاعبدالله

شهریور ۱۳۹۱

چکیده

هدف از ارایه این پایان‌نامه ارایه نمایی از اثبات یکنواخت سازی موضعی زاریسکی در حالت جبری است. برای این مهم ابتدا مفاهیم اساسی در نظریه‌ی ارزیابی، گروه ارزیاب، ارزیابی میدانهای مانده، رتبه آنها و ترکیب ارزیابی‌ها بررسی می شود. در ادامه چندین مثال کلاسیک در نظریه ارزیابی ارائه می شود و سپس چند گونای ریمان-زاریسکی از یک میدان به وسیله توپولوژی تعریف شده توسط زاریسکی معرفی می‌گردد. در قسمت آخر نیز نتایجی از یکنواخت سازی موضعی زاریسکی مرور می‌گردد و در نهایت اثباتی برای این مطلب در حالت جبری بیان می‌شود.

واژگان کلیدی: ارزیابی؛ حلقه ارزیابی؛ یکنواخت سازی موضعی؛ جداسازی نقاط منفرد؛ توسیع ارزیابی.

تعداد صفحات پایان نامه: ۹۶

تقدیم به یگانه‌های زندگیم

پدرم، که سرافراز زیستن را به من آموخت

مادرم، الهه مهربانی که وجودم لبریز از محبت‌های اوست

به پاس تمام دلواپسی‌ها، امیدها و آرزوهای بی‌پایان آن‌ها برای من

مناجات الذاکرین

خدای من!

اگر اطاعت امر تو نبود هرگز با کوره خاطر خویش بر ساحل دریای یاد تو گذر نمی کردم چرا که می دانم ظرف وجود من شایسته من است، نه بایسته تو. و کاسه دل من به اندازه ظرفیت خویش از بحر تو آب ذکر بر می دارد، و نه به وسعت بی کرانگی تو.

و کجا پای ناتوان مرا قدرت نیل به شناختگاه مقام مقدس توست؟

خدایا!

هم یاد کردن ما تو را، لطف توست و هم یاد کردن تو، ما را.

خدایا!

همین که به اذن تو بر ذهن این ناپاک، یاد پاکی مطلق می گذرد مرا بزرگترین نعمت توست و همین که این آلوده را نام منزه تو بر زبان می رود مرا عظیم ترین لطف توست.

خدایا!

تو منزه تر از آنی که بر زبان ما به تنزیه بگذری.

و تسبیح تو برتر از آنست که تا اوج دلهای ما تنزل کند.

و تقدیس تو فراتر از آن که خود را به بالهای قلب ما بیالاید.

اما خدای من!

ما را به خویش خوان در هویدا و نهان واز روشنای ذکرت بر ما بتابان، در صبح و شامگاهان.

و از زلال خاطره ات ما را بنوشان، در آشکار وپنهان.

و نسیم یادت را بر دلهای ما بوزان، در بهار وخزان.

خدای من!

میان ما و خویش الفتی نهانی ساز و پیوندی خفیه، و ما را توفیق تلاشی بی شائبه و صادقانه عنایت کن و کوششی که ما را تا بوستان رضایتت برساند و از میوه پاداش تو، به ما بچشاند.

سپاس گزاری

سپاس بیرون از اندازه و قیاس، سزاوار قائمی است بالذات، غایب از عالم اندیشه و حواس و ستایش بی حدّ و احصا، لایق صاحبی است مأمول و مرتجی در زمان شدت و رخا و درود بی نهایت به روان پاک نخستین پاسخ دهنده به ندای الهی و برگزیده‌ی بی‌چون؛ فاتح ابواب خیر و رشاد، خاتم رسولان پاک نهاد، منصور مؤید، محمود احمد، ابی القاسم محمد صلی الله علیه و آله، و بر پاکان و پاکیزگان از فرزندان آن سرور پیمبران.

بدین وسیله مراتب سپاس و قدردانی خود را نسبت به استاد راهنمای عزیز و بزرگوارم، جناب آقای دکتر محمد حسین حسینی ابراز می‌دارم که بدون راهنمایی‌های ارزنده و سعه‌ی صدر فراوان ایشان در مراحل پژوهش، انجام این تحقیق میسر نبود. همچنین مراتب قدردانی و تشکر خود را نسبت به استاد مشاور عزیزم جناب آقای دکتر حسین فضائلی مقیمی که زحمت مشاوره‌ی اینجانب را برعهده داشتند و اساتید ارجمند آقایان دکتر نصرآبادی و دکتر اقدامی که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند ابراز می‌دارم.

از همه‌ی دوستان و همکلاسی‌های عزیزم بخصوص آقایان شفیق بحری، حامد اسفندی، رضا یعقوب زاده و ابولفضل عبدالله زاده و تمامی دوستان گرانقدری که به نوعی بر گردن بنده حقّی دارند نهایت تشکر و سپاسگزاری را دارم.

در نهایت از پدر و مادر عزیز، مهربان و بزرگوارم که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده‌اند و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاوری بی‌چشم داشت برای من بوده‌اند و خواهران عزیزتر از جانم که هر چه در توان داشتند برای کسب تحصیل من دریغ نکرده‌اند و همسر عزیز و مهربانم کمال تشکر و قدردانی را دارم. امید است که بتوانم جوابگوی مهربانی‌های این عزیزان باشم.

سعید کاکاعبدالله
شهریور ۱۳۹۱

فهرست مطالب

پیشگفتار

مبحث تکینی یک موضوع اساسی در ریاضیات است. در جبر مقدماتی تکینی در ریشه ضربی از چند جمله‌ای‌ها نمایان می‌شود. در هندسه یک نقطه در فضا غیرتکین است هر گاه دارای فضای مماس باشد که بعد آن با بعد فضا برابر باشد. در میدان‌های بسته جبری، یک چندگونا غیرتکین در یک نقطه است هرگاه فضای مماس در آن نقطه وجود داشته باشد به طوری‌که دارای بعد یکسان با چندگونا باشد. به طور کلی‌تر، یک چندگونا در یک نقطه غیرتکین است هرگاه حلقه موضعی‌اش یک حلقه منظم باشد. مساله اساسی این است که تکینی را با استفاده از نگاشت‌های ساده جبری حذف کنیم. این بدین معنی است که آیا می‌توان این چندگونا را به وسیله یک مورفیسم دوگویایی سره از یک چندگونا غیر-تکین بدست آورد؟

این مهم در تمامی بعدها روی یک میدان با مشخصه صفر امکان‌پذیر است. اثبات غیر رسمی برای جداسازی رویه‌ها روی اعداد مختلط توسط لووی[۱] در سال ۱۸۹۹ و چی‌سینی[۲] در سال ۱۹۲۱ و آل‌بویه‌سو[۳] در سال ۱۹۲۴ ارایه گردیده است. اثبات قویتر اولین بار توسط واکر[۴] در سال ۱۹۳۵ ارایه شد و در سال ۱۹۳۹ توسط زاریسکی[۵] اثبات جبری برای تمامی میدان‌ها با مشخصه صفر ارایه گردید. ابهیانکار[۶] در سال ۱۹۵۶ اثباتی برای رویه‌های از مشخصه غیر صفر ارایه داد. در سال ۱۹۷۸ لیپ‌من[۷] اثباتی برای جداسازی از نقاط تکین را برای تمام خمینه‌های عالی ۲-بعدی ارایه نمود.

در این پایان‌نامه طبقه‌بندی از ارزیابی‌ها در میدان‌های تابعی جبری در رویه‌ها با استفاده از اثبات زاریسکی از یکنواخت‌سازی موضعی در رویه‌های دارای مشخصه صفر را بررسی خواهیم کرد و یک ایده برای اثبات جدا سازی نقاط منفرد برای یک رویه جبری توسط زاریسکی ارایه خواهد شد. این اثبات بر تئوری ارزیابی از میدانهای تابع جبری بنا شده است و می تواند یکی از مهمترین کاربردهای این نظریه در هندسه جبری باشد.

این پایان نامه در چهار فصل نوشته شده است.

فصل اول این پایان‌نامه شامل سه بخش می‌باشد که در بخش اول به تعاریف اساسی در نظریه

[۱] Levi
[۲] Cheisini
[۳] Albuoesu
[۴] Waiker
[۵] Zariski
[۶] Abhyankar
[۷] Lipman

حلقه‌ها، در بخش دوم مفاهیم مقدماتی در هندسه جبری و در بخش سوم به معرفی ارزیابی به شیوه متداول آن و معرفی حلقه‌های ارزیابی در حالت کلی خواهیم پرداخت.

فصل دوم این پایان‌نامه شامل چهار بخش می‌باشد که در بخش اول تعاریف اساسی و خواص ارزیابی را که برای جداسازی مورد نیاز است ارایه خواهد شد. در بخش دوم رتبه یک ارزیابی و ارزیابی ترکیبی مورد بررسی قرار می‌گیرند. در بخش سوم نیز توسیع ارزیابی‌ها معرفی می‌شوند و در بخش چهارم چندین مثال کلاسیک بررسی خواهد شد. ضمنا درباره مسایل توسیع ارزیابی در توسیع میدان‌ها و همچنین درباره مسایل انشعاب صحبت نخواهد شد.

فصل سوم این پایان‌نامه شامل دو بخش می‌باشد که در بخش اول مرکز یک ارزیابی و در بخش دوم چندگونای ریمان-زاریسکی از یک میدان را تعریف می کنیم که توسط زاریسکی "چکیده سطح ریمان" یا "منیفلد ریمان" نامیده می‌شود و ویژگی اصلی این فضا بیان خواهد شد.

فصل چهارم این پایان‌نامه شامل دو بخش می‌باشد که در بخش اول به بیان مساله کلی یکنواخت سازی پرداخته و در بخش دوم اثبات یکنواخت سازی موضعی در حالت سطوح جبری روی میدانهای بسته جبری از مشخصه صفر ارائه می شود و چگونگی حل این موضوع را نتیجه گیری می نماییم.

فصل ۱
تعاریف ومقدمات

.

۱.۱ مروری بر خواص حلقه ها

تعریف ۱.۱.۱. حلقه تعویض‌پذیر R را یک میدان[1] می‌نامیم هرگاه $۱_R \neq ۰$، و هر عنصر غیر صفر آن یکه باشد یعنی برای هر $x \in R$، عنصر $x^{-۱} \in R$ موجود باشد به‌طوری‌که $xx^{-۱} = ۱$.

نتیجه ۲.۱.۱. *هر میدان یک حوزه صحیح است ولی عکس این مطلب درست نیست. به عنوان مثال $\mathbb{Z}$ یک حوزه صحیح است ولی میدان نیست چون مثلا $۲ \in \mathbb{Z}$ و $۲.\frac{۱}{۲} = ۱$ ولی $\frac{۱}{۲} \notin \mathbb{Z}$.*

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم F یک میدان باشد. در این صورت چند جمله‌ای $P(x) \in F[x]$ را تحویل‌ناپذیر گوییم هرگاه نتوان آن را به صورت

$$P(x) = f(x)g(x)$$

نوشت که در آن $f(x)$،$g(x)$ چند جمله‌ای‌های غیر ثابت از $F[x]$ باشند.

مثال ۴.۱.۱. چند جمله‌ای $x^۲ + ۱$ روی میدان حقیقی تحویل‌ناپذیر است. اما روی میدان مختلط به صورت $(x+i)(x-i)$ تجزیه می‌شود و چون یکه‌ها در $D[x]$ دقیقا چند جمله‌ای‌های ثابت‌اند که در D یکه می‌باشند، $x+i$ و $x-i$ در $\mathbb{C}[x]$ یکه نیستند. بنابراین $x^۲ + ۱$ در $\mathbb{C}[x]$ تحویل‌ناپذیر نیست.

[1] Field

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم E یک توسیع میدان F باشد. در این صورت عنصر $\alpha \in E$ را روی F جبری گوییم هرگاه یک چند جمله‌ای از $F[x]$ مانند $g(x) \neq 0$ موجود باشد بطوریکه α ریشه‌ی $g(x)$ باشد.

مجموعه عناصری از E که روی F جبری هستند بستار جبری F نسبت به E نامیده می شود.

مثال ۶.۱.۱. فرض کنیم $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$، $\mathbb{C}$ به ترتیب میدان‌های اعداد گویا، حقیقی، مختلط باشند. در این صورت $i \in \mathbb{C}$ روی $\mathbb{Q}$ و در نتیجه روی $\mathbb{R}$ جبری است، در واقع $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ بستار جبری $\mathbb{R}$ است.

تعریف ۷.۱.۱. ایده‌آل[۲] p از حلقه R را یک ایده‌آل اول می‌نامیم هرگاه $p \neq (1)$ و $ab \in p$ ایجاب کند که $a \in p$ یا $b \in p$.

نتیجه ۸.۱.۱. *اگر p یک ایده‌آل اول از حلقه R باشد آنگاه حلقه خارج قسمتی[۳] R/p یک حوزه صحیح است.*

تعریف ۹.۱.۱. ایده‌آل $\mathfrak{m}$ از حلقه R را یک ایده‌آل ماکسیمال[۴] می‌نامیم اگر $\mathfrak{m} \neq (1)$ و هیچ ایده‌آل a از R موجود نباشد که

$$\mathfrak{m} \subsetneqq a \subsetneqq (1) = R.$$

نتیجه ۱۰.۱.۱. *اگر $\mathfrak{m}$ یک ایده‌آل ماکسیمال از حلقه تعویض پذیر R باشد آنگاه حلقه خارج قسمتی $R/\mathfrak{m}$ یک میدان است.*

گزاره ۱۱.۱.۱. *هر حلقه $R \neq 0$ حداقل دارای یک ایده‌آل ماکسیمال می باشد.*

تبصره ۱۲.۱.۱. *هر ایده‌آل ماکسیمال، یک ایده‌آل اول است ولی بر عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست. به عنوان مثال ایده‌آل (0) در حلقه $\mathbb{Z}$ اول است ولی ماکسیمال نیست.*

تعریف ۱۳.۱.۱. حلقه R را یک حوزه ایده‌آل اصلی[۵] می‌نامیم اگر حلقه R دامنه صحیح باشد و هر ایده‌آل آن یک ایده‌آل اصلی باشد یعنی توسط یک عنصر تولید شده باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱. حلقه A یک حلقه موضعی[۶] نامیده می شود اگر تنها یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد.

---

[۲] Ideal
[۳] Quotient ring
[۴] Maximal ideal
[۵] Principal ideal domain
[۶] Local ring

تعریف ۱.۱.۱۵. اگر A یک حلقه موضعی باشد و m تنها ایده‌آل ماکسیمال آن باشد، آنگاه A/m یک میدان است و میدان مانده[۷] A نامیده می شود.

تعریف ۱.۱.۱۶. حلقه A را یک حلقه نیمه-موضعی[۸] می‌نامیم هرگاه دارای تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال باشد.

مثال ۱.۱.۱۷. میدان‌ها حلقه موضعی هستند، زیرا ایده‌آل صفر تنها ایده‌آل ماکسیمال آن ها می باشد.

مثال ۱.۱.۱۸. فرض کنیم $R = \mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح باشد. در این صورت هر ایده‌آل در $\mathbb{Z}$ به شکل (p) می باشد که $p > ۰$. ایده‌آل (p) اول است اگر وتنها اگر $p = ۰$ یا p عددی اول باشد. همه ایده‌آل های (p)، که p عددی اول است، ماکسیمال هستند و $\mathbb{Z}_p$ حلقه ای موضعی می باشد.

مثال ۱.۱.۱۹. هر گاه p عدد اولی باشد و $n \geq ۱$، آنگاه $\mathbb{Z}_{p^n}$ یک حلقه موضعی با ایده‌آل ماکزیمال منحصر بفرد (p) است.

مثال ۱.۱.۲۰. حلقه $\mathbb{Z}_۴$ را در نظر می گیریم. در این صورت $\{\overline{۰}, \overline{۲}\}$ تنها ایده‌آل ماکسیمال $\mathbb{Z}_۴$ است و لذا یک حلقه موضعی است.

گزاره ۱.۱.۲۱. *فرض کنید A یک حلقه و $\mathfrak{m}$ یک ایده‌آل از A باشد به طوری که هر عنصر x از $A - \mathfrak{m}$ عنصری یکه در A باشد. در این صورت A یک حلقه ی موضعی و $\mathfrak{m}$ ایده‌آل ماکسیمال آن است.*

گزاره ۱.۱.۲۲. *فرض کنید A یک حلقه و $\mathfrak{m}$ ایده‌آل ماکسیمالی از R باشد به طوری که هر عنصر از $\mathfrak{m}$+۱ در R یکه باشد. در این صورت R یک حلقه موضعی می باشد.*

برهان. فرض کنید $x \in A - m$. در این صورت چون m ایده‌آل ماکسیمال است، ایده‌آل تولید شده بوسیله x و m را در نظر می‌گیریم، طبق قضیه قبل داریم

$$m \subsetneq m + Ax \subseteq A = (۱)$$

بنابراین داریم

$$m + Ax = (۱)$$

[۷] Residue field

[۸] Semi-local ring

پس وجود دارد $y \in A$ و $t \in m$ بطوریکه $xy + t = ۱$، از اینرو $xy = ۱ - t$. حال چون $۱ - t \in ۱ + m$، پس $xy \in ۱ + m$ و چون $۱ + m$ یکه است پس xy هم یکه است. بنابراین طبق گزاره قبل A یک حلقه ی موضعی می باشد. $\square$

قضیه ۲۳.۱.۱. *هر گاه A یک حلقه تعویض پذیر یکدار باشد، آنگاه شرایط زیر معادلند:*

(۱) A *یک حلقه ی موضعی است.*

(۲) *تمام غیر یکه های A مشمول ایده‌آلی مانند $M \neq R$اند.*

(۳) *غیر یکه های A یک ایده‌آل تشکیل می دهند.*

برهان. هر گاه I ایده‌آلی از A باشد و $a \in I$، آنگاه $(a) \subset I$. در نتیجه $I \neq R$ اگر و فقط اگر I فقط از غیر یکه‌ها تشکیل شده باشد.

(۳) $\Longleftarrow$ (۲) چون بنا به (۲) تمام غیر یکه‌های A مشمول ایده‌آل M هستند و $M \neq R$، بنابراین خود M همان عناصر غیر یکه A می‌باشد که یک ایده‌آل است.

(۱) $\Longleftarrow$ (۳) واضح است چون در این حالت مجموعه عناصر غیر یکه تمام ایده‌آل ماکسیمال حلقه A خواهد شد و بنابراین A حلقه موضعی است.

(۲) $\Longleftarrow$ (۱) هر گاه $a \in A$ یک غیر یکه باشد، آنگاه $A \neq (a)$. بنابراین (a) مشمول ایده‌آل ماکزیمال منحصر بفرد M از A است و در نتیجه $a \in M$. $\square$

تبصره ۲۴.۱.۱. *حلقه کسرهای A_P هم یک حلقه موضعی است، زیرا*

$$m = \{\frac{a}{s} \mid a \in P, s \in S\}$$

تنها ایده‌آل ماکسیمال A_P می باشد که P یک ایده‌آل اول از حلقه A می باشد.

نتیجه ۲۵.۱.۱. *در یک حلقه موضعی عناصر غیر یکه یک ایده‌آل تشکیل می دهند، این ایده‌آل، یک ایده‌آل ماکسیمال است و چون حلقه موضعی است پس این ایده‌آل منحصر به فرد است. این ایده‌آل را با m و این حلقه موضعی را با (A, m) نشان می دهیم.*

تعریف ۲۶.۱.۱. میدان زمینه، میدان ثابت K می باشد که در ابتدای بحث اختیار می شود.

تعریف ۲۷.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. یک R-مدول (چپ) گروهی آبلی و جمعی مانند A است همراه با تابعی مانند $R \times A \longrightarrow A$ (نقش (r, a) با ra نمایش داده می شود) به طوری که به ازای هر $r, s \in R$ و $a, b \in A$ ،

(الف) $r(a+b)=ra+rb$ ؛

(ب) $(r+s)a=ra+sa$؛

(ج) $r(sa)=(rs)a$؛

هرگاه R دارای عنصر یکه (1_R) بوده و

(د) به ازای هر $a\in A$ داشته باشیم $1_Ra=a$

آنگاه گوییم A یک R-مدول یکانی است.

تعریف ۲۸.۱.۱. گوییم مدول A در شرط زنجیر افزایشی[۹] ($A.C.C.$) روی زیر مدولهایش صدق می کند (یا نوتری[۱۰] است) اگر به ازای هر زنجیر

$$A_1\subseteq A_2\subseteq A_3\subseteq \dots$$

از زیر مدولهای A، عددی صحیح مانند $n>0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر $i\geq n$،

$$A_i=A_n.$$

تعریف ۲۹.۱.۱. حلقه R نوتری چپ (راست) است اگر R در شرط زنجیر افزایشی بر ایده‌آلهای چپ (راست) صدق کند. گوییم R نوتری است اگر نوتری چپ و راست باشد.

نتیجه ۳۰.۱.۱. *حلقه جابجایی R نوتری است اگر و فقط اگر در شرط ماکزیمال بر ایده‌آلهای دو طرفه صدق کند، یا معادلا، اگر و فقط اگر هر ایده‌آل R با تولید متناهی باشد.*

تعریف ۳۱.۱.۱. در تعریف زاریسکی اگر حلقه موضعی A نوتری باشد، حلقه شبه-موضعی[۱۱] نامیده می شود.

تعریف ۳۲.۱.۱. زیر مجموعه ناتهی S از حلقه R ضربی نامیده می شود مشروط بر اینکه $1\in S$ و اگر $a,b\in s$، آنگاه $ab\in S$. یعنی نسبت به ضرب بسته باشد.

مثال ۳۳.۱.۱. مجموعه S مرکب از تمام عناصری که در یک حلقه ناصفر یکدار مقسوم علیه صفر نباشند، ضربی است. بخصوص، مجموعه تمام عناصر ناصفر از یک دامنه صحیح ضربی است.

همچنین مجموعه ی یکه‌ها در یک حلقه یکدار هم یک مجموعه ضربی است.

[۹] Ascendig chain condition
[۱۰] Noetherian ring
[۱۱] Quasi-local

مثال ۳۴.۱.۱. اگر $A = \mathbb{Z}_۶$ و $S = \{\overline{۱}, \overline{۳}\}$ را در نظر بگیریم، آنگاه S مجموعه بسته ضربی است. زیرا $\overline{۱} \in S$ و همچنین

$$\overline{۱} \times \overline{۳} = \overline{۳} \in S$$
$$\overline{۳} \times \overline{۳} = \overline{۳} \in S$$
$$\overline{۱} \times \overline{۱} \in S.$$

مثال ۳۵.۱.۱. هر گاه P یک ایده‌آل اول در حلقه تعویض پذیر A باشد، آنگاه $S = A - P$ بسته‌ی ضربی است، زیرا $P \neq A$ بنابراین $۱ \in A - P$. حال فرض کنید $x, y \in S$. در این صورت طبق تعریف S داریم $x, y \notin P$ و چون P ایده‌آل اولی از A می باشد، طبق تعریف ایده‌آل اول $xy \notin P$. بنابراین $xy \in A - P$ و این یعنی $xy \in S$. پس S یک مجموعه بسته ضربی است.

قضیه ۳۶.۱.۱. *فرض کنیم S زیر مجموعه ای ضربی از حلقه جابجایی R باشد. رابطه تعریف شده بر مجموعه $R \times S$ به وسیله*

$$(r, s) \sim (r', s') \Longleftrightarrow \exists s_۱ \in S; s_۱(rs' - r's) = ۰$$

یک رابطه هم ارزی است. به علاوه هر گاه R مقسوم علیه صفر نداشته باشد و $۰ \notin S$، آنگاه

$$(r, s) \sim (r', s') \Longleftrightarrow rs' - r's = ۰.$$

برهان. واضح است که $\sim$ بازتابی و تقارنی است، کافی است نشان دهیم این رابطه تعدی است. فرض کنید $(a, s), (b, t), (c, u) \in R \times S$ که $(a, s) \sim (b, t)$ و $(b, t) \sim (c, u)$. دراین صورت عناصر $k, l \in S$ وجود دارند به طوری که $ulb = ltc$ و $kta = ksb$. حال از تساوی اول نتیجه می‌شود که $ksulb = ksltc$ و از تساوی دوم $lukta = luksb$. بنابراین $ksltc = lukta$ و لذا $ltk \in S$ وجود دارد به طوری که $ltk(ak - cs) = ۰$. در نتیجه $(a, s) \sim (c, u)$. بنابراین $\sim$ یک رابطه تعدی است و لذا رابطه $\sim$، یک رابطه هم ارزی می باشد. □

تعریف ۳۷.۱.۱. فرض کنیم S زیر مجموعه‌ای ضربی از حلقه جابجایی R باشد و $\sim$ رابطه هم ارزی قضیه قبل باشد، رده هم ارزی

$$(r, s) \in R \times S$$

را با r/s نشان می‌دهیم. مجموعه تمام رده‌های هم ارزی $R \times S$ تحت $\sim$ را با $S^{-۱}R$ نشان می دهیم. آنگاه $S^{-۱}R$ حلقه‌ای جابجایی و یکدار است که حلقه کسرهای R نامیده می شود.

لم ۳۸.۱.۱.(الف) *فرض کنیم S یک زیر مجموعه ضربی حلقه تعویض پذیر A و $S^{-1}A$ مجموعه کلاس‌های هم ارزی $A \times S$ باشد. در این صورت مجموعه $S^{-1}A$ همراه با دو عمل زیر یک حلقه یکدار و جابجایی است.*

$$S^{-1}A \times S^{-1}A \longrightarrow S^{-1}A$$
$$(\frac{a}{s}, \frac{b}{t}) \longmapsto \frac{at+bs}{st}$$
$$S^{-1}A \times S^{-1}A \longrightarrow S^{-1}A$$
$$(\frac{a}{s}, \frac{b}{t}) \longmapsto \frac{ab}{st}$$

(ب) *هر گاه A حلقه‌ای ناصفر بدون مقسوم علیه صفر باشد و $0 \notin S$، آنگاه $S^{-1}A$ یک حوزه صحیح است.*

(ج) *هر گاه A حلقه‌ای ناصفر بدون مقسوم علیه صفر و S مجموعه تمام عناصر ناصفر A باشد، آنگاه $S^{-1}A$ یک میدان است.*

برهان.(الف) نشان می دهیم این دو عمل خوش تعریف هستند. فرض کنید داشته باشیم $(\frac{a}{s}, \frac{b}{t}), (\frac{a'}{s'}, \frac{b'}{t'}) \in S^{-1}A \times S^{-1}A$ به طوری که

$$(\frac{a}{s}, \frac{b}{t}) = (\frac{a'}{s'}, \frac{b'}{t'}).$$

در این صورت

$$\frac{b}{t} = \frac{b'}{t'} \text{ و } \frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}.$$

حال بنا به قضیه ۳۶.۱.۱ $u, v \in S$ به گونه‌ای وجود دارد که

$$u(as' - a's) = 0 \quad (*)$$

و همچنین

$$v(bt' - b't) = 0 \quad (**)$$

اکنون ثابت می‌کنیم که

$$\frac{ab}{st} = \frac{a'b'}{s't'} \text{ و } \frac{at+bs}{st} = \frac{a't'+b's'}{s't'}.$$

تساوی زیر به وضوح برقرار است:

$$ua'svtt' + uvb'tss' = ua'svtt' + uvb'tss'$$

با توجه به تساوی $(*)$ و $(**)$ نتیجه می شود که $uas' = ua's$ و $vbt' = vb't$. پس داریم

$$uas'vtt' + uvbt'ss' = ua'svtt' + uvb'tss'$$
$$uv((at+bs).s't') = uv((a't'+b's').st)$$
$$uv[((at+bs).s't') - ((a't'+b's').st)] = ۰$$

در نتیجه عمل جمع خوش تعریف است.

همچنین با توجه به $uas' = ua's$ و $vbt' = vb't$ داریم

$$uas'vbt' = ua'svb't.$$

از اینرو داریم

$$uv(abs't' - a'b'st) = ۰,$$

در نتیجه عمل ضرب خوش تعریف است.

با توجه به آنچه بیان شد و اینکه $\frac{۰}{s}$ عضو همانی نسبت به عمل جمع است و $-\frac{a}{s}$ عضو قرینه جمعی است واضح است که $S^{-۱}A$ با اعمال فوق تشکیل حلقه می‌دهد.

(ب) هرگاه A مقسوم علیه صفر نداشته باشد و $۰ \notin S$، آنگاه $\frac{a}{s} = \frac{۰}{s}$ اگر و فقط اگر در A، $a = ۰$. در نتیجه در $S^{-۱}A$، $(\frac{a}{s})(\frac{a'}{s'}) = ۰$ اگر و فقط اگر در A، $aa' = ۰$.

چون $aa' = ۰$ اگر و فقط اگر $a = ۰$ یا $a' = ۰$ و از اینرو نتیجه می‌شود که $S^{-۱}A$ یک دامنه صحیح است.

(ج) هر گاه $a \neq \circ$، آنگاه معکوس ضربی $\frac{a}{s} \in S^{-۱}A$ مساوی $\frac{s}{a} \in S^{-۱}A$ است و چون هر عنصر از $S^{-۱}A$ دارای معکوس می باشد لذا $S^{-۱}A$ یک میدان است.

□

تعریف ۳۹.۱.۱. حلقه $S^{-۱}A$ را در لم بالا حلقه خارج قسمت‌ها یا حلقه کسرهای A نسبت به S می‌نامند.

تعریف ۴۰.۱.۱. فرض کنید A و B دو حلقه جابجایی یکدار و A زیر حلقه B باشد، در این صورت گوییم A در B بسته صحیح است هرگاه هر عضو از B که روی A صحیح باشد عضوی از B باشد. به عبارت دیگر هیچ توسیع سره‌ای از A مشمول در B موجود نباشد.

گزاره ۴۱.۱.۱. *فرض کنیم A یک حلقه و S زیر مجموعه ضربی از A باشد. برای هر ایده‌آل $\mathfrak{p}'$ از $S^{-۱}A$، فرض کنیم $b = (i_A^S)^{-۱}(\mathfrak{b}')$، به طوری که $\mathfrak{b}' = S^{-۱}\mathfrak{b}$.*

(الف) *فرض کنیم f همریختی کانونی $A \longrightarrow A/\mathfrak{b}$ باشد. همریختی از $S^{-۱}A$ به*

$$(f(S))^{-۱}(A/\mathfrak{b})$$

به طور کانونی مرتبط با f، پوشاست و $\mathfrak{b}'$ هسته آن می باشد که، به وسیله تقسیم، یکریختی کانونی از $(S^{-۱}A)/\mathfrak{b}'$ بتوی $(f(S))^{-۱}(A/\mathfrak{b})$ تعریف می کند. علاوه بر این همریختی کانونی از A/b به $(f(S))^{-۱}(A/\mathfrak{b})$ یک به یک می باشد.

(ب) *نگاشت $b' \longmapsto b = (i_A^S)^{-۱}(\mathfrak{b}')$، محدود به مجموعه ایده‌آل های ماکسیمال (اول) A، یکریختی (با توجه به رابطه شمول) از این مجموعه بتوی مجموعه از ایده‌آل های A که در میان آنهایی که S را قطع نمی کنند ماکسیمال هستند (مجموعه ایده‌آل های اول A که S را قطع نمی کنند) است.*

(ج) *اگر q' ایده ال اول از $S^{-۱}A$ باشد و $q = (i_A^S)^{-۱}(\mathfrak{q}')$، آنگاه یکریختی از حلقه کسرهای A بتوی حلقه $(S^{-۱}A)_{\mathfrak{q}'}$ وجود دارد که a/b را به $(a/۱)/(b/۱)$ تصویر می کند که در آن $a \in A$ و $b \in A \setminus q$.*

برهان. رجوع شود به [۳]، قضیه ۱۱.۲.۲. □

گزاره ۴۲.۱.۱. *فرض کنیم A حلقه نوتری جابجایی، $\mathfrak{m}$ ایده‌آلی از A و E یک A-مدول با تولید متناهی باشند. بستار $\bigcap_{n=1}^{m} \mathfrak{m}^n E$ از $\{0\}$ در E با توجه به توپولوژی m-ادیک مجموعه از $x \in E$ است که $m \in \mathfrak{m}$ وجود داشته باشد به طوری که $(1-m)x = 0$.*

برهان. رجوع شود به [۳]، گزاره ۲.۳.۳. □

گزاره ۴۳.۱.۱. *فرض کنیم A حلقه موضعی باشد که ایده‌آل های ماکسیمال آن، ایده‌آل های اصلی A_p باشند. اگر $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{p^n} = (0)$، آنگاه تنها ایده‌آل‌های A، (0) و A_{p^n} هستند و همچنین p پوچ توان است یا A حلقه ارزیابی می باشد.*

برهان. رجوع شود به [۳]، گزاره ۲.۱.۶. □

گزاره ۴۴.۱.۱. *فرض کنیم K یک میدان (نه لزوما جابجایی)، ν یک ارزیابی گسسته روی K، A حلقه ارزیابی مرتبط با ν و u یکنواخت ساز برای ν باشند. در این صورت ایده‌آل های ناصفر A دو طرفه هستند و به فرم $Au^n\ (n \geq 0)$ می باشند.*

برهان. رجوع شود به [۳]، لم ۱.۴.۶. □

گزاره ۴۵.۱.۱. *فرض کنیم A یک دامنه صحیح، K میدان کسرهایش، E یک A-مدول و*

$$E_{(K)} = K \otimes_A E$$

فضای برداری روی K بدست آمده به وسیله توسیع دادن حلقه عملگرها باشد. فرض کنیم ϕ نمایانگر نگاشت A-خطی کانونی

$$x \longrightarrow 1 \otimes x$$

از E بتوی $E_{(K)}$ باشد. در این صورت داریم
(الف) هر عضو از $E_{(K)}$ به صورت $\lambda^{-1}\phi(x)$ است که $\lambda \in A$ ،$\lambda \neq 0$ و $x \in E$.
(ب) هسته ϕ زیر مدول تابدار $T(E)$ ، از E است.

برهان. رجوع شود به [۳]، گزاره ۸.۳.۶. □

۲.۱ نگاهی به هندسه جبری

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم k میدان بسته جبری ثابت باشد. مجموعه تمام n-تایی ها از عناصر k را n-فضای آفین[۱۲] روی k نامیده و با $\mathbf{A}_k^n$ و به طور ساده تر با $\mathbf{A}^n$ نمایش می‌دهیم. عنصر $p \in \mathbf{A}^n$ را یک نقطه و اگر

$$p = (a_1, \dots, a_n)$$

که $a_i \in k$ ، آنگاه a_i ها را مؤلفه‌های p می نامند.

فرض کنیم

$$A = k[x_1, \dots, x_n]$$

حلقه چند جمله‌ای با n متغیر روی k باشد. عناصری از A را که به صورت

$$f(p) = f(a_1, \dots, a_n)$$

که در آن $f \in A$ و $p \in \mathbf{A}^n$ می باشد تعریف می‌شوند به عنوان تابع‌ها از n-فضای آفین به k معرفی می شوند.

بنابراین اگر $f \in A$ یک چند جمله‌ای باشد، آنگاه می‌توان درباره مجموعه صفرهای f صحبت کرد و آن را با

$$Z(f) = \{p \in \mathbf{A}^n \mid f(p) = 0\}$$

نشان داد. به طور کلی تر، اگر T زیر مجموعه‌ای از A باشد، آنگاه مجموعه صفر T را مجموعه صفرهای مشترک تمام عناصر T قرار داده و به صورت

$$Z(T) = \{p \in \mathbf{A}^n \mid \forall f \in T; f(p) = 0\}$$

نام گذاری می شود.

به وضوح اگر a یک ایده‌آل در A تولید شده به وسیله T باشد آنگاه

$$Z(T) = Z(a)$$

[۱۲] affine n-space