دانشگاه کردستان
دانشکده علوم
گروه فیزیک

عنوان:

حل و بررسی ویژگی‌های معادلات انیشتین – کلاین - گوردون

پژوهشگر:

شیوا حمیدی

استاد راهنما:

دکتربهروز ملک‌الکلامی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته فیزیک گرایش نظری

بهمن ماه ۱۳۹۱

تعهد نامه

اینجانب شیوا حمیدی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیزیک گرایش نظری دانشگاه کردستان، دانشکده علوم گروه فیزیک تعهد می نماییم که محتوای این پایان نامه نتیجه تلاش و تحقیقات خود بوده و از جایی کپی برداری نشده و به پایان رسانیدن آن نتیجه تلاش و مطالعات مستمر اینجانب و راهنمایی و مشاوره اساتید بوده است.

با تقدیم احترام

شیوا حمیدی

۱۳۹۱/۱۲/۰۵

تقدیم به

پدر

و

مادر

عزیزم

تقدیر و تشکر ...

در آغاز خداوند بی‌همتا را سپاس می‌گویم که در سایه‌ی لطف و رحمتش به من این توفیق را عنایت فرمود تا گامی دیگر در مسیر علم و دانش و معرفت برداشته و قطره‌ای از دریای بیکران دانش که در تجلی آفرینش است را مورد کنکاش قرار دهم.

بی شک تحقق این امر و به انجام رساندن این رساله جز با بهره گیری از کمک های دلسوزانه‌ی استاد بزرگوارم و خانواده‌ی عزیزم امکانپذیر نبود. لذا وظیفه‌ی خود می‌دانم که تشکر خود را از تمامی این عزیزان ابراز نمایم.

از زحمات بی دریغ و مساعدت‌های دلسوزانه‌ی استاد راهنمای عزیزم جناب آقای دکتر بهروز ملک الکلامی که افتخار شاگردی ایشان را در دوران تحصیل داشته‌ام کمال تشکر و قدردانی را دارم.

چکیده

در این پایان نامه می‌خواهیم به بررسی حل جفت شده‌ی معادلات انیشتین – کلاین – گوردون برای میدان اسکالر حقیقی وابسته به زمان بپردازیم. حل این معادلات جواب‌هایی را که اوسیلاتون می‌نامیم آشکار می‌کند. اوسیلاتون‌ها وابسته به زمان، غیر تکین و سطح مجانبی حل معادلات انیشتین – کلاین – گوردون هستند. هر یک از این ویژگی‌ها را به کمک معادلات و نمودارها نشان خواهیم داد. در حل معادلات خود را به پتانسیل درجه دوم محدود کرده و فقط به بررسی این حالت می‌پردازیم.

از آنجایی که این جواب‌ها وابسته به زمانند به بررسی این پرسش می‌پردازیم که آیا حد نیوتونی برای آنها وجود دارد و اگر چنین حدی وجود دارد تحت چه شرایطی اتفاق می‌افتد. به بررسی شرط پایداری اوسیلاتون‌ها می‌پردازیم و نهایتا ژئودزیک‌های اطراف اوسیلاتون‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

کلمات کلیدی: معادلات انیشتین – کلاین – گوردون، اوسیلاتون.

فهرست مطالب

فصل ۱
مقدمه

میدان‌های اسکالر نقش مهمی در بسیاری از مدل‌ها در فیزیک ذرات و کیهان‌شناسی دارند. این ذرات می‌توانند در کنار یکدیگر قرار بگیرند و در کنار برخی مکانیسم‌های پایدار به فرم اشیاء کراندار گرانشی مثل نوسان ستاره‌های سالیتونی[۱] باشند [۱].

در بررسی یک سیستم گرانشی با برخی از میدان‌ها مثل میدان‌های اسکالر، مرتبه‌ایی از حل‌های متقارن کروی وجود دارد. این میدان‌های اسکالر می‌توانند حقیقی یا موهومی باشند. با بررسی یک سیستم گرانشی با میدان‌های اسکالر حقیقی، حل‌های غیر تکین خواهیم داشت [۲].

مدت زیادی فهمیده شده است که نظریه‌های میدان‌های کلاسیک حل‌های سالیتونی غیر توپولوژیکی را می‌پذیرد مانند حل‌هایی که جرم‌های متناهی و غیر صفردارند، برای همه‌ی زمان‌ها به ناحیه‌ایی از فضا محدود شده‌اند، رها از تکینگی‌اند و اینکه در طبیعت غیر مکانی‌اند. حالا پذیرفته شده است که ماده‌ی باریونی (ماده‌ی مرئی) فقط برای کسر کوچکی از جرم کل جهان می‌تواند محاسبه شود. انواع مختلفی از پیکر بندی‌های سالیتونی غیر مکانی برای ماده‌ی غیر باریونی پیشنهاد شده است و برای نقش‌های اختر فیزیکی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، شامل $Q - balls$، ستاره‌های سالیتونی و ستاره‌های بوزونی است. آنها پیکربندی‌های ساخته شده از میدان‌های اسکالرند، به واسطه‌ی جفت شدگی غیرخطی میدان اسکالر به خودش، به سایر میدان‌های ماده یا به گرانش.

[۱] Soliton Stars

لی[۲]، فریدبرگ[۳] و پنگ[۴] رده‌ی جدیدی از اشیاء نجومی را که ستاره‌های سالیتونی نامیده می‌شوند، کشف کرده‌اند. این ستاره‌ها توسط انبوهی از ذرات (بوزون‌ها و فرمیون‌ها)، جای‌گزیده شده در یک حالت همدوس کوانتومی، که ویژگی‌هایش مشابه خلأ است، ساخته شده توسط بوزون نوع هیگزاند. یک ویژگی قابل توجه ستاره‌های سالیتونی پایداری خیلی زیاد ماده سرد با جرم $۱۰^{۱۵}$ برابر جرم خورشید و اندازه‌ی $۱۰^{-۱}$ سال نوری است، بدون تبدیل شدن به یک سیاه‌چاله است. بر خلاف یک ستاره‌ی سرد معمولی مثل یک کوتوله‌ی سفید یا یک ستاره‌ی نوترونی که نمی‌توانند جرمی بزرگتر از ۵ برابر جرم خورشید داشته باشند [۳، ۴]. سالیتون به یک بسته موج همدوس اشاره دارد، از این رو این ستاره‌ها به این اسم خوانده می‌شوند.

نظریه لی، فریدبرگ و پنگ که نظریه FLP نامیده می‌شود، بر پایه‌ی فرض انرژی محدود است. تاکنون، بسیاری از ویژگی‌های این نوع ستارگان به صورت عمومی به دست آمده‌اند.

میدان اسکالر حقیقی که معادله‌ی کلاین-گوردون را ارضاء کند، می‌تواند فرم یک شیء سالیتونی خود بر هم کنش باشد که با گرانش انیشتین جفت شده باشد [۵].

از نظر تئوری، حل جفت شده‌ی معادلات انیشتین-کلاین-گوردون برای میدان اسکالر حقیقی اشیایی را که اوسیلاتون یا نوسان ستاره‌های سالیتونی نامیده می‌شود، آشکار می‌کند. در واقع اوسیلاتون مخففی برای نوسان ستاره‌های سالیتونی است.

ستاره‌های سالیتونی طیفی از حالت‌ها را دارا می‌باشند: حالت پایه و حالت برانگیخته. میدان اسکالر حالت پایه گره‌ایی ندارد، اولین حالت برانگیخته یک گره دارد و به همین ترتیب. اوسیلاتون‌ها حالت پایه‌ی متقارن کروی پایا به صورت عددی مشاهده می‌شوند [۱].

یک نوع شیء خود بر هم کنش گرانشی را مطالعه می‌کنیم که توسط یک حل جفت شده‌ی سولیتونی سیستمی از معادلات انیشتین و یک معادله‌ی میدان ماده بیان می‌شود. حل توسط اشیاء خود بر هم کنش توصیف می‌شوند که ایستا نیستند اما، در عوض، دوره‌ایی است، با هر دو میدان

[۲] Lee
[۳] Fridberg
[۴] Pang

ماده و هندسه‌ی فضا-زمانی در زمان نوسان می‌کنند.

این اشیاء نخستین بار در شبیه سازی عددی که توسط زیدل[۵] و سون[۶] انجام شد، مشاهده شدند [۶]. آنها یک میدان اسکالر حقیقی حجیم جفت شده‌ی گرانشی را بررسی کردند. از داده‌های اصلی مشخص شد که سیستم می‌تواند در یک فضای موضعی و ظاهرا دوره‌ی زمانی و حالت پایا مشخص شود. شبیه‌سازی عددی با وجود دوره‌ی زمانی اوسیلاتون‌ها با یک فرکانس ثابت، ثابت بود. فرض واقعی حالت تناوبی ساختار مثل حل‌ها بود، سپس بررسی توسط بسط فوریه‌ی میدان‌های مختلف، سیستم را توصیف کرد. این اشیاء نخستین بار به نوسان ستاره‌های بوزونی تعمیم داده شدند [۷]. اما مدتی بعد به اسم رایج اوسیلاتون تبدیل شد.

ستاره‌های بوزونی نتیجه‌ایی از حل‌های حالت ایستای معادلات انیشتین-کلاین-گوردون است.

وابستگی زمانی اوسیلاتون‌ها به صورت بنیادی ظاهر می‌شود که از تکینگی جلوگیری می‌کند، در مغایرت با حل‌های ایستا که تکینگی‌های تکراری ظاهر می‌شوند [۸].

اوسیلاتون‌ها در دو شاخه‌ی پایدار ($s-branch$) و ناپایدار ($u-branch$) وجود دارند. اوسیلاتون‌های غیر پایدار اگر جرمشان مناسب باشد، می‌توانند به شاخه‌ی اوسیلاتون‌های پایدار بروند [۹].

یک انگیزه برای مطالعه‌ی اوسیلاتون‌ها از مدل میدان‌های اسکالر مانند انرژی تاریک ناشی می‌شود. ایده‌ی مهم در چنین مدل‌هایی فرمول‌بندی ساختار کیهان با استفاده از میدان‌های اسکالر است.

به صورت خلاصه، اوسیلاتون‌ها وابسته به زمان، غیر توپولوژی، غیرتکین و سطح مجانبی حل‌های معادلات انیشتین-کلاین-گوردون هستند.

با در نظر گرفتن حالت متقارن کروی، به کمک معادلات انیشتین، معادله‌ایی برای میدان اسکالر به دست می‌آوریم که معادله‌ی کلاین-گوردون را ارضاء می‌کند. به کمک این روابط و شرایط مرزی ویژگی‌های اوسیلاتون‌ها را به دست می‌آوریم.

در ابتدا در فصل دوم به بیان معادلات انیشتین و معادله‌ی کلاین-گوردون می‌پردازیم و توضیحاتی

---

[۵] Seidel
[۶] Suen

در مورد آنها ارائه می‌شود.

در فصل سوم، به بررسی معادلات جفت شده‌ی انیشتین- کلاین- گوردون می‌پردازیم و به کمک حل عددی نمودار ضرایب متریک و برخی از ویژگی‌های دیگر اوسیلاتون‌ها را نشان می‌دهیم. همچنین شرط پایداری اوسیلاتون‌ها را به دست می‌آوریم.

در فصل چهارم به بررسی حد نیوتونی اوسیلاتون‌ها می‌پردازیم و در نهایت در فصل آخر ژئودزیک‌های اطراف اوسیلاتون‌ها را به دست می‌آوریم.

فصل ۲

معادلات انیشتین و معادله کلاین- گوردون

۱.۲ معادلات انیشتین

معادلات انیشتین[۱]، معادلات میدان‌های موضعی توصیف کننده‌ی ساختار موضعی از فضا-زمانند. این معادلات چگونگی تولید انحناء فضا-زمانی را توسط توزیع جرم-انرژی توصیف می‌کنند. یکی از الزامات اساسی این فرمول‌بندی بقای جرم-انرژی است. این نتایج نیازمند تعریف یک کمیت هندسی است که این شرایط را ارضاء کند. این کمیت تانسور انیشتین است که از خمش ریچی[۲] و اسکالر ریچی ساخته شده است. حل معادله‌ی انیشتین متریکی است که میدان گرانشی را توصیف می‌کند.

معادله‌ی انیشتین به صورت

$$G_{\mu\nu} = \kappa_{\circ} T_{\mu\nu} \tag{۱.۲}$$

بیان می‌شود، که $G_{\mu\nu}$ شامل تانسور ریچی و اسکالر ریچی است که وابسته به متریک و مشتقات متریک است. تانسور انیشتین با رابطه‌ی زیر بیان می‌شود:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{۱}{۲} R g_{\mu\nu} \tag{۲.۲}$$

که $R_{\mu\nu}$ تانسور ریچی و R اسکالر ریچی است. $T_{\mu\nu}$ تانسور انرژی-اندازه حرکت ماده است. همچنین

[۱] Einestin
[۲] Ricci

$\kappa_\circ = \frac{8\pi G}{c^4}$ است که می‌تواند به صورت $\kappa_\circ = \frac{8\pi}{m_{pl}^2}$ نیز نوشته شود. که از $c = 1$ استفاده شده است و m_{pl} جرم پلانک است. در واقع سمت چپ معادلات انیشتین بیان کننده‌ی هندسه‌ی فضا-زمانی وسمت راست این معادلات توصیف کننده‌ی ماده است. این معادلات به روش‌های زیر حل می‌شوند:

الف) معادلات میدان، معادلات دیفرانسیل برای تانسور متریک $g_{\mu\nu}$ است برای مشخص کردن تانسور انرژی-اندازه حرکت.

ب) معادلات میدان، معادلات دیفرانسیل برای تانسور انرژی-اندازه حرکت هستند برای مشخص کردن عناصر متریک $g_{\mu\nu}$.

۲.۲ حل معادلات میدان

با در نظر گرفتن حالت ایستا با تقارن کروی، عمومی‌ترین شکل متریک به صورت زیر است:

$$ds^2 = e^{2\nu}dt^2 - e^{2\lambda}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2sin^2\theta d\varphi^2 \qquad (۳.۲)$$

که ν و λ توابعی از r هستند. شرط ایستایی به این معنی است که $g_{\mu\nu}$ ها مستقل از زمانند و $g_{\circ i}$ ها باید برابر صفر باشند. می‌توان مقادیر $g_{\mu\nu}$ ها را از (۲-۳) نوشت:

$$g_{\circ\circ} = e^{2\nu}, g_{11} = -e^{2\lambda}, g_{22} = -r^2, g_{33} = -r^2sin^2\theta \qquad (۴.۲)$$

$$g^{\circ\circ} = e^{-2\nu}, g^{11} = -e^{-2\lambda}, g^{22} = -r^{-2}, g^{33} = -r^{-2}sin^{-2}\theta \qquad (۵.۲)$$

نمادهای کریستوفل نوع دوم، $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$، را از رابطه‌ی

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}(g_{\gamma\nu,\mu} + g_{\mu\gamma,\nu} - g_{\mu\nu,\gamma}) \qquad (۶.۲)$$

به دست می‌آوریم.

$$\Gamma^1_{\circ\circ} = \nu' e^{2\nu-2\lambda}, \Gamma^1_{11} = \lambda'$$

$$\Gamma^{1}_{22} = -re^{-2\lambda}, \Gamma^{1}_{33} = -rsin^{2}\theta e^{-2\lambda}$$

$$\Gamma^{0}_{10} = \nu', \Gamma^{1}_{13} = \Gamma^{2}_{12} = r^{-1}$$

$$\Gamma^{2}_{33} = -sin\theta cos\theta, \Gamma^{3}_{23} = cot\theta$$

با داشتن معادله‌ی تانسور ریچی

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} \tag{7.2}$$

خواهیم داشت:

$$R_{00} = (-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^{2} - \frac{2\nu'}{r})e^{2\nu-2\lambda}$$

$$R_{11} = \nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^{2} - \frac{2\lambda'}{r}$$

$$R_{22} = (1 + r\nu' - r\lambda')e^{-2\lambda} - 1$$

$$R_{33} = R_{22}sin^{2}\theta$$

مؤلفه‌های دیگر تانسور ریچی صفر می‌باشند. پریم مشتق نسبت به r است.

حل خلأ معادلات انیشتین ($T_{\mu\nu} = 0$) ایجاب می‌کند که این عبارات برابر صفر باشند.

با حل معادلات به رابطه‌ی

$$re^{2\nu} = r - 2m$$

می‌رسیم. که در آن m ثابت انتگرال‌گیری است. پس خواهیم داشت:

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r} \tag{8.2}$$

ثابت انتگرال‌گیری m دقیقا همان جرم جسم مرکزی است که میدان گرانشی را ایجاد کرده است.

می‌توان جواب کامل را به صورت زیر نوشت:

$$ds^2 = (1 - \frac{2m}{r})dt^2 - (1 - \frac{2m}{r})^{-1}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 sin^2\theta d\varphi^2 \tag{9.2}$$

این جواب متریک شوارتزشیلد[3] است که در خارج از سطح جسمی که میدان را ایجاد کرده است، صادق است [۱۰]. هم‌چنان که می‌بینیم، حل ایستای معادلات انیشتین دارای تکینگی است.

این حل معادله‌ی انیشتین برای فضای تهی بود. برای حل این معادلات برای فضای غیر تهی، از معادلات انیشتین با ثابت کیهان‌شناسی استفاده می‌کنیم. این معادله به صورت زیر است:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa_0 T_{\mu\nu} \tag{10.2}$$

$R_{\mu\nu}$ های فضای غیر تهی نیز مانند $R_{\mu\nu}$ های فضای تهی به دست می‌آیند، با این تفاوت که به جای $R_{\mu\nu} = 0$ باید قرار دهیم $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$ که جواب آن را می‌توان به صورت زیر نوشت [۱۱]:

$$ds^2 = (1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2)dt^2 - (1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2)^{-1}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 sin^2\theta d\varphi^2 \tag{11.2}$$

۳.۲ معادله کلاین- گوردون

معادله کلاین- گوردون به سال ۱۹۲۶ به کار شرودینگر[4]، کلاین[5] و گوردون[6] در بررسی معادله‌ی موج کوانتوم نسبیتی برمی‌گردد. اگر چه به اسم کلاین و گوردون نام‌گذاری شد. این معادله حرکت یک ذره‌ی اسکالر یا یک میدان اسکالر فرضی با ذرات اسپین صفر است. در واقع معادله کلاین- گوردون معادل نسبیتی معادله شرودینگر است اما در مقایسه با معادله شرودینگر دارای مشتق زمانی مرتبه‌ی دوم می‌باشد [۱۲]. در واقع، خود شرودینگر معادل نسبیتی معادله‌اش را به دست آورد اما به سه دلیل زیر آن را کنار گذاشت:

[3] Schwartzshild
[4] Schrodinger
[5] Klein
[6] Gordon

۱) ظاهر شدن حل‌هایی با انرژی منفی

۲) ظاهر شدن احتمال پخش منفی

۳) ظاهر شدن طیف نادرست برای اتم هیدروژن

بنابراین، او چیزی را که به عنوان معادله کلاین-گوردون می‌شناسیم کنار گذاشت [۱۳]. اما مهم‌ترین مسئله در معادله کلاین-گوردون در تفسیر آن است. نسبیت با زمان و مکان رفتاری مشابه دارد. این در معادلات موج، ایجاب می‌کند که مشتقات زمانی و مکانی باید در یک مرتبه از بزرگی به کار برده شوند. در معادله غیر نسبیتی شرودینگر، یک مشتق مرتبه‌ی اول نسبت به زمان وجود دارد اما مشتق نسبت به مختصات فضایی مرتبه دوم می‌باشد.

معادله شرودینگر را در یک بعد فضایی می‌نویسیم:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{\partial^{2}\psi}{\partial x^{2}} + V\psi \qquad (۱۲.۲)$$

این معادله نمی‌تواند نسبیتی باشد تا زمانی که یک مشتق مرتبه اول از زمان در سمت چپ، و یک مشتق مرتبه دوم نسبت به مکان در سمت راست داریم.

معادله کلاین-گوردون را به دست می‌آوریم. با رابطه‌ی بنیادی بین انرژی، تکانه و جرم در نسبیت خاص شروع می‌کنیم.

$$E^{2} = p^{2}c^{2} + m^{2}c^{4}$$

در مکانیک کوانتوم E و p عمل‌گرند. برای این منظور معادله‌ی مستقل از زمان شرودینگر را در نظر می‌گیریم

$$E\psi = -\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{\partial^{2}\psi}{\partial x^{2}} + V\psi$$

یک جایگذاری برای انرژی در نظر می‌گیریم و آن را با یک عمل‌گر نشان می‌دهیم

$$E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

و برای تکانه داریم

$$p \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

که برای سه بعد

$$\vec{p} \to -i\hbar\nabla$$

برای به دست آوردن معادله کلاین-گوردون، این جایگذاری‌ها را در رابطه‌ی انیشتین برای انرژی، تکانه و جرم انجام می‌دهیم و به یک تابع موج φ اعمال می‌کنیم. داریم

$$E^۲ = -\hbar^۲\frac{\partial^۲}{\partial t^۲}, p^۲ = -\hbar^۲\nabla^۲$$

بنابراین، بر حسب عملگرها، رابطه‌ی انیشتین بین انرژی، جرم و تکانه به صورت زیر نوشته می‌شود

$$-\hbar^۲\frac{\partial^۲}{\partial t^۲} = -\hbar^۲c^۲\nabla^۲ + m^۲c^۴$$

یک تابع فضا-زمانی را اعمال می‌کنیم، $\varphi = \varphi(t, x)$، با این کار و بازنویسی معادله، معادله کلاین-گوردون به دست می‌آید

$$\hbar^۲\frac{\partial^۲\varphi}{\partial t^۲} - \hbar^۲c^۲\nabla^۲\varphi + m^۲c^۴\varphi = ۰$$

و با $\hbar = c = ۱$ داریم:

$$\frac{\partial^۲\varphi}{\partial t^۲} - \nabla^۲\varphi + m^۲\varphi = ۰ \qquad (۱۳.۲)$$

با تعریف عمل‌گر دالامبرین، می‌توان معادله را در فرم مناسب‌تری نوشت.

$$\Box = \frac{\partial^۲}{\partial t^۲} - \nabla^۲$$

عمل‌گر دالامبرین است. پس داریم:

$$(\Box + m^۲)\varphi = ۰ \qquad (۱۴.۲)$$

دالامبرین یک ناوردای نسبیتی است زیرا در همه‌ی چارچوب‌ها به همان برمی‌گردد و مثل یک اسکالر رفتار می‌کند. جرم m هم یک اسکالر است پس $\Box + m^2$ را عمل‌گر در نظر می‌گیریم. این به ما می‌گوید، معادله کلاین-گوردون در صورتی هم‌وردا[7] خواهد بود که تابع φ یک اسکالر باشد.

همچنین، در مختصات x^μ تبدیل به صورت

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

خواهد بود و اگر میدان $\varphi(x)$ یک میدان اسکالر باشد، تبدیل به صورت

$$\varphi'(x) = \varphi(\Lambda^{-1} x)$$

است که در اینجا Λ ماتریس تبدیل است. پس می‌توانیم ویژگی‌های مهم معادله کلاین-گوردون را به صورت زیر بیان کنیم:

۱) بر ذرات اسکالر عمل می‌کند(در واقع میدان‌های اسکالر)

۲) این ذرات، ذرات اسپین صفراند

معادله کلاین-گوردون ذکر شده ذرات آزاد را توصیف می‌کند. حل ذرات آزاد $\varphi(x,t) = e^{-ip.x}$ را می‌دهد. در نسبیت خاص کار می‌کنیم، پس x و p چهار بردارند که توسط $p = (E, \vec{p})$ و $x = (t, \vec{x})$ داده می‌شوند. حاصل‌ضرب اسکالر در تعریف به صورت

$$p.x = p_\mu x^\mu = Et - \vec{p}.\vec{x}$$

است. حل ذرات آزاد رابطه‌ی نسبیتی بین انرژی، تکانه و جرم را ایجاب می‌کند. برای یک بعد فضایی

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} e^{-i(Et-px)} = -iE e^{-i(Et-px)} = -iE\varphi$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} e^{-i(Et-px)} = ip e^{-i(Et-px)} = ip\varphi$$

[7] covariant

پس خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^۲ \varphi}{\partial t^۲} - \frac{\partial^۲ \varphi}{\partial x^۲} = -E^۲ \varphi + p^۲ \varphi$$

بنابراین، با به کار بردن معادله کامل کلاین-گوردون خواهیم داشت:

$$(E^۲ - p^۲)\varphi = m^۲ \varphi \qquad (۱۵.۲)$$

با حذف تابع موج و بازنویسی ترم‌ها خواهیم داشت:

$$E^۲ = p^۲ + m^۲$$

حل برای انرژی، ریشه‌های مربعی مثبت و منفی را می‌دهد:

$$E = \pm\sqrt{p^۲ + m^۲}$$

یکی از دلایلی که باعث شد شرودینگر معادله کلاین-گوردون را رها کند، این نتیجه بود. این حل برای انرژی ذرات آزاد می‌گوید که ممکن است ذرات دارای حالت‌هایی با هر دو انرژی مثبت و منفی باشند.

یافتن حالت انرژی منفی، اولین دلیلی بود که از معادله کلاین-گوردون مثل یک معادله‌ی موج ذرات تفسیر شد. حل‌هایی با انرژی منفی، در واقع حل‌های توصیف کننده‌ی پاد ذرات[۸] هستند، که ذراتی با همان جرم اما با بار مثبت و با انرژی مثبت هستند.

اما دومین مسئله، مشتق زمانی مرتبه‌ی دوم، توزیع منفی چگالی را اجازه می‌دهد. برای حل این مشکل از رابطه‌ی چگالی جریان در مکانیک کوانتوم شروع می‌کنیم. با $\hbar = ۱$ جریان احتمال

$$J = -i\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial x}$$

تعریف می‌شود. می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -i\frac{\partial \varphi^*}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\varphi^* \frac{\partial^۲ \varphi}{\partial x^۲} + i\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} + i\varphi \frac{\partial^۲ \varphi^*}{\partial x^۲}$$

[۸] antiparticles