دانشکده علوم پایه

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

موضوع

قطری سازی ماتریس‌ها روی حلقه‌های منظم

نگارش

هاجر دهقانی

استاد راهنما

دکتر ناهید اشرفی

استاد مشاور

دکتر راضیه محجوب

شهریور ۱۳۹۱

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

پروردگارا:

مرا نیرویی بخش و چنان بینشم ده

که با دیدن روشنایی به نور مهر ورزم،

نه به مشعل

و با بوئیدن گل به رائحه مست شوم،

نه به شمایل گل

و مرا فهمی ده

تا تفاوتش را بدانم.

«آمین»

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس بی‌کران شایسته الطاف واسعه خدائی است که توفیق سلامتی و تحصیل علم را به من عطا فرمود. به‌علاوه وظیفه‌ی خویش می‌دانم که تمام قدردانی خویش را نثار اساتید محترم به‌ویژه سرکار خانم دکتر ناهید اشرفی نمایم که در طی مراحل تحصیلی و تدوین این پایان‌نامه همواره مشوق من بوده و با حوصله تمام مرا یاری نموده‌اند.

از اساتید محترم دکتر رحمان بهمنی سنگسری (داور داخلی) و دکتر حمیدرضا میمنی (داور خارجی) که زحمت مطالعه و اصلاح پایان‌نامه اینجانب را بر عهده گرفته‌اند تشکر و قدردانی می‌نمایم. همچنین از استاد مشاور محترم، سرکار خانم دکتر راضیه محجوب که یاریم رساندند، تشکر نموده و در پایان از دوستان مهربانی که مرا در این مهم همراهی نمودند، خالصانه سپاسگزارم .

هاجر دهقانی

شهریور۱۳۹۱

تقدیم به :

«به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی»

«به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که بهترین پشتیبانان‌اند»

«به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید»

«به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند»

این مجموعه را به :

(پدر و مادر عزیزم)

تقدیم می‌کنم.

چکیده

در این پایان نامه که برگرفته از مرجع [۲] است، به بررسی قطری پذیری حلقه‌ی ماتریس‌ها روی حلقه‌های منظم (فون—نیومن) می‌پردازیم. در واقع نشان می‌دهیم که خاصیت قطری پذیری معادل خاصیت حذفی برای مدول‌های تصویری متناهیاً تولید شده است، به عبارت دیگر اگر R یک حلقه‌ی تبادلی و A و B دو Rـمدول تصویری متناهیاً تولید شده باشند به قسمی که از رابطه‌ی $R \oplus A \cong R \oplus B$ ۲ نتیجه شود $R \oplus A \cong B$، آن‌گاه هر ماتریس منظم روی R قطری پذیر است و برعکس.

به این منظور حلقه‌ی تبادلی را معرفی کرده و برخی از ویژگی‌های آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم، سپس به بررسی ارتباط بین قطری پذیری ماتریس‌ها، اعم از مربعی و مستطیلی و خاصیت حذفی می‌پردازیم و در انتها نشان می‌دهیم که تفکیک پذیری روی حلقه‌ی تبادلی R معادل آن است که هر ماتریس مربعی منظم از مرتبه‌ی دو روی eRe قطری پذیر باشد.

واژه های کلیدی: قطری پذیری، خاصیت تبادلی، حلقه‌ی تبادلی، مدول تصویری متناهیاً تولید شده، تفکیک پذیری، قانون حذف، حلقه‌ی گوشه ای eRe، تظریف قطری

مقدمه

در این پایان‌نامه که اکثر مطالب آن بر اساس مرجع [۲] تنظیم شده است، به سوال قطری پذیری ماتریس‌ها روی حلقه‌های منظم و در حالت کلی‌تر قطری‌پذیری ماتریس‌های منظم روی حلقه‌های تبادلی پاسخ می‌دهیم.

گوییم ماتریس $m \times n$، A روی حلقه‌ی R قطری پذیر است، هرگاه ماتریس‌های معکوس پذیر $P \in GL_m(R)$ و $Q \in GL_n(R)$، موجود باشند به طوری که PAQ یک ماتریس قطری باشد. همچنین حلقه‌ی R را یک حلقه تقسیم ابتدایی نامیم، هرگاه همه‌ی ماتریس‌های مربعی روی R، قطری‌پذیر باشند. سؤال اساسی که ما به بررسی آن می‌پردازیم این است که آیا هر حلقه‌ی منظم (فون—نیومن) یک حلقه تقسیم ابتدایی است؟

هنریکسن[۱] در قضیه‌ی ۳ از مرجع [۱۰]، ثابت کرد که هر حلقه‌ی منظم یکه، یک حلقه تقسیم ابتدایی است.

سؤال قطری پذیری ماتریس‌های مستطیلی نیز توسط منال[۲] و مونکاسی [۳] در قضیه ۹ از مرجع [۱۵]، پاسخ داده شد. آن‌ها نشان دادند که ماتریس های مستطیلی روی حلقه‌ی منظم R، قطری‌پذیرند اگر و فقط اگر Rـمدول‌های تصویری متناهیاً تولید شده چون A و B در قانون حذفی زیر صدق کنند:

$$۲R \oplus A \cong R \oplus B \qquad \Longrightarrow \qquad R \oplus A \cong B$$

همان‌طور که می‌دانیم این شرط در حالت کلی برقرار نیست. به عنوان مثال اگر $A = B = ۰$ و برای حلقه‌ی R داشته باشیم $۲R \cong R \neq ۰$، آن‌گاه خاصیت حذفی برقرار نیست.

ما ثابت می‌کنیم که حلقه‌ی منظم R، یک حلقه تقسیم ابتدایی است، هرگاه مدول‌های تصویری متناهیاً تولید شده روی آن در قانون حذفی زیر صادق باشند، که آن را تفکیک‌پذیری می‌نامیم:

$$A \oplus A \cong A \oplus B \cong B \oplus B \qquad \Longrightarrow \qquad A \cong B$$

در واقع تفکیک‌پذیری معادل این فرض است که همه‌ی حلقه‌های گوشه‌ای eRe (برای هر خودتوان

---

[۱] Henriksen
[۲] Menal
[۳] Moncasi

$e \in R$) حلقه تقسیم ابتدایی هستند.

این پایان‌نامه مشتمل بر ۴ فصل است و فصول آن به شرح زیر می‌باشند:

در فصل اول سعی شده است که تنها تعاریف و قضایایی که در فصول بعدی مورد نیاز است، مورد بررسی و مطالعه قرار گیرد و از آوردن برهان خودداری شده که جهت مطالعه‌ی بیشتر در این زمینه می‌توان از منابع ذکر شده در انتهای پایان‌نامه از جمله [۱]، [۵]، [۸]، [۱۲] و [۲۴] کمک گرفت.

در فصل دوم، ابتدا حلقه‌ی تبادلی را معرفی کرده، سپس مفهوم تفکیک پذیری حلقه‌ی R بیان شده که از جمله مفاهیم اساسی و پرکاربرد در این پایان نامه هستند.

در فصل سوم که مهمترین فصل این پایان‌نامه می‌باشد، تلاش گسترده‌ای برای بررسی قطری‌پذیری ماتریس‌ها به زبان نظریه مدول‌ها تحت شرایط متفاوت صورت گرفته است.

فصل آخر نیز قضیه‌ی مهمی را دربر گرفته، که در آن شرط معادلی برای تفکیک پذیری حلقه‌های تبادلی R ارائه می‌شود.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این بخش با تعاریف و قضایای مورد نیازی آشنا خواهیم شد که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. این فصل مشتمل بر ۳ بخش می‌باشد، بخش اول تعاریف اولیه و قضایای مورد نیاز در باب نظریه مدول، بخش دوم تعاریف و قضایای مورد نیاز در نظریه حلقه ها و بخش سوم مفاهیمی در مورد تانسورها را دربر دارد. اثبات قضایایی که دشوارتر هستند، ارائه می‌گردد. از اثبات سایر قضایا صرف‌نظر کرده و آن‌ها را ارجاع می‌دهیم.

قرارداد ۱.۰.۱ در این پایان نامه حلقه‌ها و مدول‌ها را یکدار در نظر می‌گیریم. مدول ها، مدول‌های راست هستند مگر مواردی که خلاف آن ذکر شده باشد و همریختی‌ها از چپ عمل می‌کنند. همچنین مجموع مستقیم n کپی از یک مدول A را با nA نمایش می‌دهیم.

۱.۱ مدول

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم M، Rـمدولی غیر صفر باشد. زیرمدول سره‌ای از M مثل N را زیرمدول ماکسیمال M می‌نامیم اگر به ازای هر زیرمدول از M مثل K که $N \lneqq K$ نتیجه شود $K = M$.

قضیه ۲.۱.۱ فرض کنیم M، Rـمدولی غیرصفر و متناهی مولد باشد. در این صورت،

۱) اگر L زیرمدول سره‌ای از M باشد، آن‌گاه زیرمدول ماکسیمالی از M موجود است که شامل L است.

۲) M زیرمدول ماکسیمال دارد.

برهان: به قضیه‌ی ۳.۱ از مرجع [۲۴]، مراجعه کنید. □

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از Rـمدول‌ها باشد. حاصل‌ضرب این خانواده، یعنی

$$\prod_{i\in I} M_i = \{(x_i) \mid \forall i \in I, x_i \in M_i\}$$

را در نظر می‌گیریم، جمع و ضرب اسکالر را به‌صورت

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i),$$

$$(x_i)r = (x_i r)$$

تعریف می‌کنیم. به‌سادگی دیده می‌شود که $\prod_{i\in I} M_i$ به همراه این جمع و ضرب اسکالر به Rـمدول تبدیل می‌شود. این Rـمدول را حاصل‌ضرب مستقیم خانواده‌ی داده شده تعریف می‌کنیم و اگر این خانواده تهی باشد، قرار می‌دهیم $\prod_{i\in I} M_i = 0$.

اکنون می‌خواهیم زیرمدول خاصی از $\prod_{i\in I} M_i$ که نقش مهمی را داراست معرفی کنیم.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از Rـمدول‌ها باشد. واضح است که

$$\{\ (a_i)\in\prod_{i\in I}M_i \mid a_i=\circ \quad \text{بجز تعداد متناهی از آن‌ها،}\ i\in I\ \text{برای هر}\ \}$$

زیرمدولی از $\prod_{i\in I}M_i$ است. این زیرمدول را با $\coprod_{i\in I}M_i$ نمایش می‌دهیم و به آن حاصل‌جمع مستقیم (خارجی) خانواده داده شده می‌گوییم. واضح است که اگر این خانواده تهی باشد، $\coprod_{i\in I}M_i=\circ$. در حالتی که $I=\{۱,۲,...,n\}$، به‌جای $\coprod_{i\in I}M_i$ می‌نویسیم $M_۱\sqcup...\sqcup M_n$.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنیم M، Rـمدول باشد و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیرمدول‌های M. اگر I ناتهی باشد، مجموعه‌ی $\sum_{i\in I}M_i$ را به‌صورت

$$\sum_{i\in I}M_i=\{\sum_{k=۱}^{n}x_{i_k}\mid n\geq ۱, i_k\in I, x_{i_k}\in M_{i_k}\}$$

تعریف می‌کنیم و اگر I تهی باشد، قرار می‌دهیم $\sum_{i\in I}M_i=\circ$. به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که $\sum_{i\in I}M_i$ زیرمدولی از M است. $\sum_{i\in I}M_i$ را مجموع زیرمدول‌های خانواده $\{M_i\}_{i\in I}$ می‌نامیم.

قضیه ۶.۱.۱ فرض کنیم M یک Rـمدول باشد و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از زیرمدول‌های M. دراین‌صورت شرایط زیر معادل‌اند.

۱) $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای مستقل است، یعنی به‌ازای هر $n\geq ۱$، هر عضو از I مثل i_k و هر عضو از M_{i_k} مثل x_{i_k}، از $\sum_{k=۱}^{n}x_{i_k}=\circ$ نتیجه می‌شود که به‌ازای هر k، $۱\leq k\leq n$، $x_{i_k}=\circ$؛

۲) به‌ازای هر عضو از I مثل j، $M_j\cap(\sum_{i\in I-\{j\}}M_i)=\circ$؛

۳) هر عضو از $\sum_{i\in I}M_i$ نمایشی منحصر به‌فرد بر حسب مجموعی متناهی از اعضای M_iها دارد.

برهان: به مرجع [۲۴] قضیه ۲.۱ مراجعه کنید. □

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنیم M یک Rـمدول باشد و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از زیرمدول‌های M. اگر یکی از شرایط معادل در قضیه‌ی قبل برای این خانواده فراهم شود، آن‌گاه مجموع $\sum_{i\in I}M_i$ را

مجموع مستقیم داخلی می‌نامیم و آن را با $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ نمایش می‌دهیم. در حالتی که $I=\{۱,...,n\}$، به‌جای $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ می‌نویسیم $\bigoplus\limits_{i=۱}^{n} M_i$ یا $M_۱\oplus ...\oplus M_n$.

قضیه ۸.۱.۱ فرض کنیم M یک Rـمدول باشد و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از زیرمدول‌های M که در یکی از شرایط معادل در قضیه‌ی ٦.۱.۱ صدق می‌کند. در این صورت، $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ با $\coprod\limits_{i\in I} M_i$ به‌عنوان Rـمدول یکریخت است.

برهان: به مرجع [۲۴] قضیه‌ی ۳.۳ مراجعه کنید. □

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنیم M، یک Rـمدول و $M_۱$ یک زیرمدول از M باشد، گوییم $M_۱$ یک جمعوند مستقیم از مدول M است هرگاه زیرمدول دیگری از M چون K موجود باشد به طوری که، $M=K\oplus M_۱$. در این صورت گوییم $M_۱$، دارای مکمل است و مکمل آن برابر K است.

لم ۱۰.۱.۱ فرض کنیم M و N دو Rـمدول، $f:M\longrightarrow N$ و $f':N\longrightarrow M$ دو Rـهم‌ریختی باشند به قسمی که

$$ff'=۱_N$$

در این صورت f یک به‌روریختی و f' یک تک‌ریختی است و

$$M=Kerf\oplus Imf'$$

برهان: به لم ۱.۵ از مرجع [۱] رجوع شود. □

گزاره ۱۱.۱.۱ اگر $M=K\oplus K'$، آن‌گاه تصویرگر M روی K در امتداد K'، به‌روریختی منحصر به فرد

$$P_K:M\longrightarrow K$$

می‌باشد، که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$(P_K|K) = 1_K, \qquad kerP_K = K'$$

برهان: به گزاره‌ی ۴.۵ از مرجع [۱] رجوع شود. □

گزاره ۱۲.۱.۱ فرض کنیم $M = K \oplus K'$، P_K تصویرگر M روی K در امتداد K' و L زیرمدولی از M باشد. در این صورت

$$M = L \oplus K'$$

اگر و فقط اگر

$$P_K|L : L \longrightarrow K$$

یک‌ریختی باشد.

برهان: به گزاره‌ی ۵.۵ از مرجع [۱] رجوع شود. □

قضیه ۱۳.۱.۱ فرض کنیم M یک Rـمدول باشد. در این‌صورت،

$$End_R(\underbrace{M \sqcup \ldots \sqcup M}_{\text{مرتبه } n}) \cong M_n(End_R(M))$$

(در این‌جا $M_n(End_R(M))$ حلقه‌ی ماتریس‌های مربعی از مرتبه‌ی n است با درایه‌هایی از حلقه $End_R(M)$ و $\cong$ یک یک‌ریختی حلقه‌ای است.)

برهان: به مرجع [۲۴] قضیه‌ی ۸.۱۴ مراجعه کنید. □

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنیم M و N دو Rـمدول باشند. $Hom_R(M, N)$ مجموعه‌ی همه‌ی $R-$مدول هم‌ریختی‌ها ازM به N است که تحت جمع توابع یک گروه آبلی است و با ترکیب توابع

یک حلقه خواهد شد. $Hom_R(M,M)$ را حلقه‌ی Rـدرون‌ریختی‌های M نامیم و با نماد $End_R(M)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۱.۱ قانون مدولی : اگر A و B و C سه Rـمدول باشند به طوری که، $A \subseteq B$ آن‌گاه

$$B \cap (A + C) = A + (B \cap C).$$

مدول های آزاد، تصویری و انژکتیو

تعریف ۱۶.۱.۱ گوییم Rـمدول M با تولید متناهی است هر گاه $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq M$ موجود باشد که

$$M = Rx_1 + \ldots + Rx_n.$$

تعریف ۱۷.۱.۱ فرض کنیم F یک Rـمدول باشد. مجموعه مولد X برای F را یک پایه برای F می‌نامیم هر گاه مستقل خطی باشد، یعنی به ازای هر n عضو از X که متمایز باشند، مثل $x_1, \ldots, x_n$، و هر n عضو از R مثل $r_1, \ldots, r_n$، $\sum_{i=1}^{n} x_i r_i = 0$، نتیجه دهد $r_1 = \ldots = r_n = 0$.

تعریف ۱۸.۱.۱ Rـمدول F را یک مدول آزاد می‌نامیم هرگاه پایه‌ای چون X داشته باشد.

قضیه ۱۹.۱.۱ اگر F یک Rـمدول آزاد با پایه X باشد، آن‌گاه $F \cong_R \coprod_{x \in X} R$ و اگر R مدول F با $\coprod_{x \in X} R$ به عنوان Rـمدول یک‌ریخت باشد، آن‌گاه آزاد است.

برهان: به قضیه‌ی ۳.۷ از مرجع [۲۴] مراجعه شود. $\square$

گزاره ۲۰.۱.۱ هر Rـمدول مثل M، تصویر همریخت Rـمدولی آزاد مانند F است. علاوه براین، اگر M متناهی مولد باشد، می‌توانیم F را نیز متناهی مولد اختیار کنیم.

برهان: به قضیه ۴.۷ از مرجع [۲۴] رجوع شود. $\square$

تعریف ۲۱.۱.۱ Rـمدول P، تصویری است هرگاه برای هر Rـهم‌ریختی پوشا از M به N و هر Rـهم‌ریختی از P به N، یک Rـهم‌ریختی از P به M موجود باشد به طوری که نمودار زیر جابه‌جایی باشد.

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & h\swarrow & \downarrow f & & \\ M & \xrightarrow{g} & N & \rightarrow & 0 \end{array}$$

قضیه ۲۲.۱.۱ برای Rـمدول P شرایط زیر معادلند.

۱) P، تصویری است؛

۲) هر دنباله دقیق کوتاه مثل $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\mathrm{f}} N \xrightarrow{\mathrm{g}} P \longrightarrow 0$ شکافته‌شدنی است؛

۳) Rـمدول آزادی مثل F و Rـمدولی مثل K موجود است که $F \cong K \oplus P$.

برهان: به قضیه ۴.۸ از مرجع [۲۴] رجوع شود. □

قضیه ۲۳.۱.۱ Rـمدول P متناهیاً تولید شده و تصویری است اگر و فقط اگر برای هر مدول P' و هر عدد صحیح $n > 0$، Rـیک‌ریختی $nR \cong P \oplus P'$ موجود باشد.

برهان: به قضیه ۳.۱۷ از مرجع [۱] مراجعه شود. □

قضیه ۲۴.۱.۱ فرض کنید P یک Rـمدول باشد، در این صورت P تصویری و متناهیاً تولید شده است اگر و فقط اگر برای $n \in N$، $P \cong enR$ باشد که در آن $e = e^2 \in End_R(nR)$ می‌باشد.

برهان: به قضیه ۱۰.۵.۲ از مرجع [۴] مراجعه شود. □

تعریف ۲۵.۱.۱ فرض کنیم I ایدالی از حلقه‌ی R باشد. مدول E را انژکتیو نامیم، هرگاه هر هم‌ریختی از I به E، به یک هم‌ریختی از R به E توسیع یابد یعنی نمودار زیر جابه‌جایی باشد.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & I & \xrightarrow{f} & R \\ & & g\downarrow & \swarrow h & \\ & & E & & \end{array}$$

تعریف ۲۶.۱.۱ حلقه‌ی R را خود انژکتیو راست (چپ) گوییم هرگاه R به عنوان Rـمدول راست (چپ) انژکتیو باشد.

مفاهیمی در مورد مولدها

تعریف ۲۷.۱.۱ فرض کنیم U خانواده‌ای از مدول‌ها باشد، مدول M (متناهیاً) تولید شده توسط U است، یا U (به طور متناهی) M را تولید می‌کند، هرگاه مجموعه‌ی اندیس گذار (متناهی) A که $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq U$ و هم‌ریختی پوشای $\phi : \bigoplus_{\alpha \in A} u_\alpha \longrightarrow M$ موجود باشند. در این صورت U را یک مولد برای M می‌نامیم.

حال اگر $U = \{u\}$، گوییم M توسط u (به طور متناهی) تولید می‌شود هرگاه مجموعه‌ی (متناهی) اندیس گذار A و هم‌ریختی پوشای $\phi : \bigoplus_{\alpha \in A} u_\alpha \longrightarrow M$ موجود باشند که در آن برای هر $\alpha \in A$، $u_\alpha \cong u$.

گزاره ۲۸.۱.۱ Rـمدول A، مولد است اگر و فقط اگر برای مدولی چون R' و عدد صحیحی چون $n > 0$، Rـیک‌ریختی زیر موجود باشد:

$$nA \cong R \oplus R'$$

برهان: به مرجع [۱]، گزاره‌ی ۶.۱۷ مراجعه کنید. $\square$