بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده فیزیک

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته فیزیک گرایش بنیادی

نقض کوانتومی واقع‌گرایی ماکروسکوپی وگذار از فیزیک کوانتوم به فیزیک کلاسیک

مؤلف:

فرشته ایزدپناه

استاد راهنما :

دکتر مجید رهنما

بهمن ماه 1390

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد به

بخش فیزیک

دانشکده فیزیک

دانشگاه شهید باهنرکرمان

تسلیم شده است و هیچ گونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: فرشته ایزدپناه

استاد راهنما: دکترمجید رهنما

داور ۱: دکترعلیرضا بهرامپور

داور ۲: دکترمجید تراز

نماینده تحصیلات تکمیلی: دکترحسین روح الامینی نژاد

حق چاپ محفوظ و مخصوص به دانشگاه شهید باهنر است.

تقدیم به:

پدر و مادر مهربانم که در طول زندگی همواره راهنما، مشوق و محرک من بوده و مهر و محبت های آنها همیشه مایه ی دلگرمی و انگیزه در من بوده است

تقدیم به:

همسرم که با تحمل همه ی مشکلات، همواره با من همراه بود و برای پیشرفت تحصیلی ام کمک فراوانی به من نمود

تقدیم به:

فرزندان دلبندم که در دوران تحصیل با همه ی مشکلات، در کنارم بودند و صبور

و تقدیم به:

همه ی کسانی که در راه پیشرفت علم می کوشند و تلاش دارند تا با پیشبرد آن به جامعه ی بشری خدمت کنند

تشکر و قدردانی:

سپاس فراوان خداوند متعال را که همواره در دوران زندگی مورد لطف و رحمت و عنایت او بوده و خواهم بود.

تشکر فراوان دارم از استاد ارجمند جناب آقای دکتر مجید رهنما که زحمت راهنمایی و مشاوره ی این پایان نامه را بعهده گرفتند.

از اساتید و کارکنان دانشکده فیزیک نیز بدلیل حمایت های لازم در انجام امور آموزشی و پژوهشی قدردانی می نمایم.

و همچنین از همه ی دوستانی که در امور مربوط به تنظیم و گرداوری این پایان نامه مرا یاری نموده اند تشکر می نمایم.

چکیده:

توصیف‌های فیزیک کوانتومی و فیزیک کلاسیکی در فرمول‌بندی ریاضیاتی، مفاهیم بنیادی و نتایج فلسفی با هم تفاوت دارند. فرض‌های یک دنیای کلاسیکی واقعی (واقع‌گرایی موضعی و واقع‌گرایی ماکروسکوپی) با پیش‌بینی‌های مکانیک کوانتومی مغایرت دارند، چنانچه با نقض نابرابری بل و نا برابری لگت-گارگ نشان داده شده است. این موضوع که چه وقت و چگونه سیستم های فیزیکی رفتار کوانتومی‌شان متوقف شده و رفتار کلاسیکی را آغاز می کنند، هنوز بطور گسترده‌ای در جامعه فیزیک مورد بحث است و موضوع اصلی پژوهش‌های علمی و نظری می‌باشد. در فصل اول، نابرابری بل را بررسی می کنیم، که بر اساس فرض‌های واقع‌گرایی موضعی در سطح میکروسکوپی استوار است، توسط پیش‌بینی‌های مکانیک کوانتومی نقض شده است.

در فصل دوم این پایان نامه، نشان می‌دهیم که نابرابری لگت-گارگ، که بوسیله‌ی همه‌ی تئوری‌های فیزیکی ماکرورئالیستی به تحقق پیوسته است، برای سیستم‌های کوانتومی میکروسکوپی همواره نقض می شود اما برای سیستم های کوانتومی ماکروسکوپی تحت اندازه‌گیری‌های دقیق کوانتومی *(Sharp Quantum Measurements)* نقض می‌شود.

در فصل سوم، بطور کامل یک دیدگاه تئوری نوین را برای گذار از کوانتوم به کلاسیک مورد بررسی قرار می‌دهیم که بر محدودیت مشاهده‌پذیری پدیده‌های کوانتومی ناشی از بی‌دقتی دستگاه‌های اندازه‌گیری‌مان تاکید دارد، که بطور ساده می‌توانیم بگوییم که پیش‌بینی‌های مکانیک کوانتومی تحت اندازه‌گیری‌های "در ابعاد بزرگ و غیردقیق(*Coarse-Grained ((C.-G.)*)" به فیزیک کلاسیک تقلیل می یابد. در فصل چهارم درمی‌یابیم که، واهمدوسی دستگاه یا محدودیت اندازه‌گیری‌های در ابعاد بزرگ و غیر دقیق (*C.-G.*) اجازه می‌دهند که حالت را صرفا توسط یک مخلوط کلاسیکی در هر لحظه از زمان توصیف کنیم، ولی یک هامیلتونی غیرکلاسیکی برهم نهی‌هایی را از حالت‌های مشخص ماکروسکوپی ایجاد کرده و ماکرورئالیسم را نقض می کند.در فصل پنجم نشان می‌دهیم که برای هامیلتونی‌های غیرکلاسیکی، واهمدوسی سیستم سبب ابقای ماکرورئالیسم می شود ولی یک توصیف فضایی- زمانی پیوسته از تحول های زمانی غیرکلاسیکی بر حسب قوانین کلاسیکی حرکت امکانپذیر نمی باشد.

کلید واژه: ماکرورئالیسم، نابرابری لگت-گارگ، قابلیت اندازه‌گیری غیراختلالی، هامیلتونی-های کلاسیکی و غیرکلاسیکی.

فهرست مطالب

فصل اول : مقدمه

1-1) واقع‌گرایی موضعی و عناصر واقعیت.....3

2-1) تناقض EPR.....4

3-1) آزمایش واقع گرایی موضعی میکروسکوپی و نا برابری بل.....6

4-1) مشخصه‌های اصلی مکانیک کوانتومی.....13

1-4-1) درهم‌تنیدگی کوانتومی.....13

2-4-1) اصل برهم نهی و تناقض گربه‌ی شرودینگر.....14

3-4-1) واهمدوسی.....16

فصل دوم : نقض واقع‌گرایی ماکروسکوپی برای سیستمهای کوانتومی

1-2) نابرابری لگت-گارگ.....21

2-2) نقض نابرابری لگت-گارگ برای یک شیء کوانتومی میکروسکوپی.....24

3-2) نقض نابرابری لگت – گارگ برای اسپین‌های به دلخواه بزرگ.....27

فصل سوم : فیزیک کلاسیک از فیزیک کوانتوم پدید می‌آید

1-3) بررسی حالت‌ها در نظریه‌ی کوانتوم و کلاسیک.....34

2-3) گذار از کوانتوم به کلاسیک برای یک حالت همدوس تک اسپین.....34

3-3) قابلیت اندازه‌گیری غیراختلالی برای یک حالت همدوس.....38

4-3) فرمول‌بندی سیستم اسپین کوانتومی توسط فیزیک کلاسیک.....39

5-3) گذار از کوانتوم به کلاسیک برای یک حالت اسپین دلخواه.....40

6-3) قابلیت اندازه‌گیری غیراختلالی توزیع مثبت Q.....43

فصل چهارم : شرایط برای نقض کوانتومی واقع‌گرایی ماکروسکوپی

1-4) نقض نابرابری لگت– گارگ برای هاملیتونی دلخواه.....48

2-4) خود ماکرورئالیسم.....51

3-4) قابلیت اندازه‌گیری غیراختلالی.....54

4-4) شرط کافی برای ماکرورئالیسم.....58

5-4) مثال یک گربه شرودینگر در حال نوسان.....59

فصل پنجم : واقع‌گرایی ماکروسکوپی و پیوستگی فضایی - زمانی

1-5) واقع‌گرایی ماکروسکوپی و پیوستگی.....66

2-5) کنترل پیوسته سیستم توسط یک محیط.....68

فصل ششم : نتیجه‌گیری.....74

منابع.....78

فصل اول

مقدمه

واقع‌گرایی[1] یک مکتب فلسفی است و براساس آن یک واقعیتی با ویژگی‌های مشخص وجود دارد که مستقل از اینکه این واقعیت توسط شخصی مشاهده شود یا خیر، می‌باشد. این یک اصل، زیرمجموعه‌ی فیزیک کلاسیک است. بسیاری از افراد سعی کرده‌اند که تعبیرهای مکانیک کوانتومی را طوری اصلاح کنند که به طور واضح با واقع‌گرایی سازگار باشد.

واقع‌گرایی موضعی یک فرض است که توسط اینشتین[2]، پودولسکی[3] و روزن[4] در سال 1935 در قالب استدلال معروف EPR مطرح گردید[1].

در سال 1964 توسط بل[5] نشان داده شده است[2] که فرض واقع‌گرایی موضعی نمی‌تواند با مکانیک کوانتومی سازگار باشد همانطور که EPR فرض کرده بود. البته، آزمایشهای انجام شده توسط اسپکت و همکاران نشان دادند که فرض‌های واقع‌گرایی موضعی تنها در سطح میکروسکوپی[6]نامعتبر هستند[3] و اعتبار این فرض ها در یک سطح ماکروسکوپی‌تر یک سئوال مطرح است.

شخص می‌تواند بگوید که مکانیک کوانتومی باید به مکانیک کلاسیک در حد ماکروسکوپی[7] تقلیل یابد که در این صورت واقع‌گرایی موضعی ماکروسکوپی[8] با پیش‌بینی‌های مکانیک کوانتومی سازگار است و یا اینکه در مکانیک کوانتومی، ایجاد برهم نهی‌های کوانتومی حالت‌های متمایز ماکروسکوپی را نمی‌توان نادیده گرفت که در این صورت واقع‌گرایی موضعی ماکروسکوپی با مکانیک کوانتومی ناسازگار است.

واقع‌گرایی موضعی ماکروسکوپی برخلاف واقع‌گرایی موضعی میکروسکوپی که توسط آزمایش‌های نابرابری بل نامعتبر شده است هنوز تا کنون زیر سئوال نرفته است. هدف این پایان نامه این است که یک دیدگاه تئوری نوین برای واقع‌گرایی ماکروسکوپی و فیزیک کلاسیک در محدوده‌ی تئوری کوانتوم ارائه دهیم که روی محدودیت‌های مشاهده‌پذیری اثرهای کوانتومی

---

[1] Realism
[2] Einstein
[3] Podolsky
[4] Rosen
[5] Bell
[6] Microscopic
[7] Macroscopic
[8] Macroscopic local realism

اشیاء ماکروسکوپی تأکید دارند، یعنی روی دقت مورد نیاز دستگاه‌های اندازه‌گیری‌مان، چنانچه پدیده‌های کوانتومی هنوز می‌توانند مشاهده شوند[4].

فیزیک کوانتوم با فیزیک کلاسیک هم از جهت مفهومی و هم از نظر ریاضی تفاوت دارد. فرض یک دنیای کلاسیکی (واقع‌گرایی موضعی و واقع‌گرایی ماکروسکوپی) در مغایرت با پیش‌بینی‌های مکانیک کوانتومی هستند، چنانچه توسط نقض نابرابری بل و نابرابری لگت – گارگ[1] مشخص می شود[2 و 5]. این بدان معنی است که آیا دنیای کلاسیکی اساساً با دنیای کوانتوم متفاوت است؟ چه وقت و چگونه سیستم‌های فیزیکی رفتار کوانتومی را متوقف کرده و رفتار کلاسیکی را آغاز می‌کنند؟

در این فصل ابتدا واقع‌گرایی موضعی و عناصر واقعیت[2] را معرفی می‌کنیم. سپس تناقض EPR را مطرح کرده و به دنبال آن آزمایش واقع‌گرایی موضعی میکروسکوپی و نابرابری بل را بررسی می‌کنیم.

1-1) واقع‌گرایی موضعی و عناصر واقعیت

ابتدا مفهوم فرض واقع‌گرایی موضعی را مطرح می‌کنیم، همان‌طور که توسط اینشتین، پودولسکی و روزن تعریف شد [1]. فرض موضعیت، نشان می‌دهد که یک اندازه‌گیری انجام شده در یک ناحیه‌ی فضایی B نمی‌تواند فوراً (با سرعتی بالاتر از سرعت نور) بر رویدادهایی که در ناحیه‌ی فضایی A اتفاق می افتند، که از نظر فضایی از B جدا است، تاثیر گذارد.

همچنین فرض واقع‌گرایی کافی است که نشان دهد، اگر شخص بتواند با قطعیت نتیجه‌ی یک اندازه‌گیری را که روی یک سیستم انجام شده است، بدون ایجاد هر آشفتگی[3] در سیستم، پیش‌بینی کند. بنابراین، نتیجه‌ی این اندازه‌گیری یک ویژگی پیش‌تعیین‌شده‌ی سیستم است. اینشتین، پودولسکی و روزن این ویژگی‌های پیش‌تعیین‌شده را «عناصر واقعیت» نامیدند. بدین ترتیب، فرض واقع‌گرایی موضعی ترکیبی از این دو فرض می باشد.

[1] Leggett – Garg inequality
[2] Elements of reality
[3] Disturbing

2-1) تناقض EPR

نظریه‌ی معروف اینشیتن، پودولسکی و روزن در درک مفاهیم واقع‌گرایی موضعی و سازگاری آن با مکانیک کوانتومی آموزنده است. نظریه‌ی EPR به راه‌های گوناگون فرمول‌بندی شده است. شاید بهترین فرمول‌بندی همان نظریه‌ی EPR اصلی می‌باشد که در سال 1935 ارائه شد [1]. سیستم مورد نظر شامل دو ذره از نظر فضایی جدا از هم می‌باشند که در موقعیت و ممنتوم همبسته‌اند. (شکل1-1)

شکل (1-1) : ذره‌های از نظر فضایی جدا از هم و همبسته در موقعیت و ممنتوم، در اینجا x_n , P_n موقعیت و ممنتوم ذره‌ی n ام را نشان می‌دهند.

از آن‌جایی که سیستم‌ها (که آن‌ها را A و B می نامیم) کاملاً همبسته هستند، شخص می‌تواند نتیجه‌ی یک اندازه‌گیری موقعیت همزمان در B را، با اندازه‌گیری موقعیت A به دست آورد (و بالعکس، نتیجه‌ی یک اندازه‌گیری موقعیت در A را با اندازه‌گیری موقعیت B به دست آورد).

به طور مشابه، اگر شخص یک اندازه‌گیری ممنتوم را روی A در زمان t انجام دهد، شخص می‌تواند نتیجه‌ی یک اندازه‌گیری ممنتوم را در B در همین زمان t به دست آورد. اکنون بخاطر اینکه موضعیت فرض شده است، یک اندازه‌گیری موقعیت A در زمان t نمی‌تواند ذره را در B حتی‌الامکان در زمان‌های بعدی مختل کند.

بنابراین، نتیجه‌ی یک اندازه‌گیری موقعیت ذره‌ی B در زمان t را می‌توانیم بدون برهم زدن آن سیستم پیش‌بینی کنیم. این‌ها شرایط مورد نیازهستند، تا با فرض واقع‌گرایی موضعی، یک عنصر واقعی که مربوط به موقعیت ذره‌ی B در زمان t است را مشخص نماییم. این عنصر واقعی را $x_B(t)$ می‌نامیم. با استدلال‌های مشابه می‌توانیم وجود دیگر عناصر واقعی را برای سیستم، همچون $x_A(t)$ (موقعیت ذره‌ی A در زمان t) و $P_A(t)$ و $P_B(t)$ (ممنتوم‌های ذره‌های A و B در زمان t) نتیجه بگیریم.

اکنون با فرض واقع‌گرایی، $x_A(t)$ و دیگر عناصر واقعی، ویژگی‌های پیش‌تعیین‌شده‌ی سیستم هستند، که موجودیتی دارند مستقل از اینکه اندازه‌گیری ای که ما به آن می‌رسیم انجام شده یا نشده است.

اکنون تناقض نظریه‌ی EPR همان چیزی است که برای یک ذره‌ی A ، به دست آورده‌ایم که هر دوی موقعیت x_A و ممنتوم P_A دارای مقادیر پیش‌تعیین‌شده‌ی معین هستند، که نمی‌تواند با هر گونه توصیف مکانیک کوانتومی از سیستم ارائه شود. از آن جایی که مکانیک کوانتومی نمی‌تواند دقتی فراتر از آنچه که توسط رابطه‌ی عدم قطعیت هایزنبرگ[1] داده شده است، یعنی $\Delta x \Delta p \geq \hbar / 2$، بدهد. بدین ترتیب EPR نتیجه‌گیری کرده است، حداقل برای این سیستم، توصیف مکانیک کوانتومی سیستم باید ناکامل باشد.

با تفسیر اظهارات فوق، به طور نظری می‌توانیم دستگاه‌هایی را برای اندازه‌گیری موقعیت و ممنتوم (البته نه هر دو به طور همزمان) یکی از ذره‌ها با یک دقت کافی طراحی کنیم، آنچنان که وضعیت زیر ایجاد شود:

ابتدا موقعیت ذره‌ی A را در زمان t با یک دقت Δx_A، و به طور همزمان ممنتوم ذره‌ی B را با یک دقت Δp_B اندازه می‌گیریم، اما مقدار ممنتوم ذره‌ی A را در زمان t به خاطر همبستگی ذره‌ها می‌توانیم به دست آوریم.

برای سادگی فرض می‌کنیم که همبستگی، تساوی $P_A = - P_B$ را نشان می دهد. بنابراین، ممنتوم ذره‌ی A در زمان t با یک دقت $\Delta p_A = \Delta p_B$ مشخص شده است. با فرض واقع‌گرایی

[1] Heisenberg uncertainty

موضعی به طور نظری می توانیم وسایل اندازه‌گیری را به گونه ای طراحی کنیم که $\Delta x_A \, \Delta p_A \langle \frac{\hbar}{2}$ را نتیجه می‌دهند.

بنابراین، با فرض موضعیت و واقع‌گرایی، به سوی این نتیجه هدایت می‌شویم که مکانیک کوانتومی در توصیف یک سیستم فیزیکی ناکامل است. حال با آزمایش نابرابری بل و نقض آن توسط مکانیک کوانتومی به این نتیجه می‌رسیم که واقع‌گرایی موضعی در سطح میکروسکوپی رد می‌شود.

3-1) آزمایش واقع‌گرایی موضعی میکروسکوپی و نابرابری بل

ابتدا فرض واقع‌گرایی موضعی توسط نظریه‌ی EPR در سال 1935 و بعد در سال 1964 توسط بل در فرضیه‌ی بل مطرح شد. ابتدا توسط بل نشان داده شد که حالت‌های مکانیک کوانتومی معینی با واقع‌گرایی موضعی سازگار نیستند. شواهد تجربی که مکانیک کوانتومی را تأیید می‌کنند، به این نکته اشاره دارند که واقع‌گرایی موضعی رد می‌شود[6].

حال اختلاف بین نظریه‌ی EPR و فرضیه‌ی بل را مطرح می‌کنیم. نظریه‌ی EPR واقع‌گرایی موضعی را فرض می‌کند و نشان می‌دهد که با وجود حالت‌های همبسته‌ی ایجاد شده مکانیک کوانتومی در توصیف سیستم فیزیکی ناکامل است و فرضیه‌ی بل نتیجه‌گیری می‌کند که «واقع گرایی موضعی» نمی‌تواند با پیش‌بینی‌های برهم نهی حالت‌های کوانتومی ایده‌آل معین سازگار باشد.

اگر این حالت‌ها بتوانند به طور تجربی تحقق یابند آن‌گاه، می‌توان نتیجه گرفت که «واقع گرایی موضعی » نادرست است. به دلیل اینکه فرضیه‌ی بل، واقع‌گرایی موضعی را فوراً آزمایش می‌کند، پس نتایج فرضیه‌ی بل از نتایج نظریه‌ی EPR قوی‌تر است.

فرضیه‌ی بل به آزمایش فکری بوهم[1] مربوط می‌شود که میکروسکوپی می‌باشد. لازم به ذکر است که این آزمایش مردود نمودن واقع‌گرایی موضعی را در یک سطح میکروسکوپی نشان می‌دهد و اینکه سطح ماکروسکوپی‌تر واقع‌گرایی موضعی مورد آزمایش قرار نگرفته است.

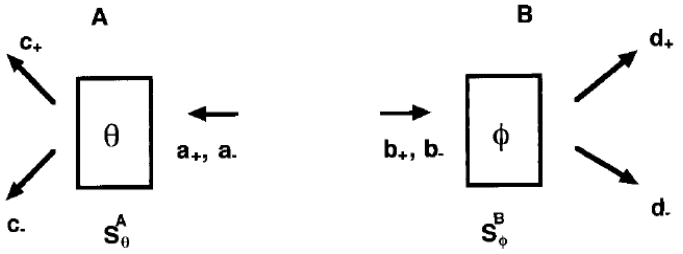
ابتدا حالت برهم نهی کوانتومی درهم تنیده‌ی[2] زیر را در نظر می‌گیریم.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^{\dagger}_{+}b^{\dagger}_{+} + a^{\dagger}_{-}b^{\dagger}_{-})|0\rangle\langle 0| \qquad (1\text{-}1)$$

در اینجا $a_{\pm}, b_{\pm}$ عملگرهای بوزون[3] برای دو جفت از میدان‌های فوتون، میدان‌های $a_{\pm}, b_{\pm}$ از نظر فضایی جدا از هم هستند. در این مورد یک فوتون در میدان‌های a و یک فوتون در میدانهای b تولید شده است. در این صورت، با استفاده از شکافنده‌ی پرتو[4] یا قطبنده‌ها[5]، میدان‌های تبدیل شده‌ی $c_{\pm}, d_{\pm}$ به ترتیب در موقعیت‌های A و B را می‌توانیم تولید کنیم (شکل 1-2 را ببینید)، که از رابطه‌ی زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} c_{+} &= a_{+}\cos\theta + a_{-}\sin\theta \\ c_{-} &= -a_{+}\sin\theta + a_{-}\cos\theta \\ d_{+} &= b_{+}\cos\varphi + b_{-}\sin\varphi \\ d_{-} &= -b_{+}\sin\varphi + b_{-}\cos\varphi \end{aligned} \qquad (2\text{-}1)$$

[1] Bohm gedanken experiment
[2] Entangled quantum superposition
[3] Boson operators
[4] Beamsplitters
[5] Polarisers



شکل (1-2) : نمودار مقایسه‌ای آزمایش بل با استفاده از فوتون‌ها، اندازه‌گیری‌ها روی دو میدان از نظر فضایی جدا از هم در B و A به ترتیب انجام شده‌اند، θ انتخاب اندازه‌گیری در A و φ انتخاب اندازه‌گیری در B را نشان می‌دهد. هر اندازه‌گیری یکی از دو نتایج را، یعنی یک فوتون در موقعیت + یا در موقعیت - ، را می‌دهد [2].

ابتدا عملگرهای شوینگر[1] زیر راتعریف می‌کنیم که وابستگی این حالات بوزونی را به فرمول‌بندی اسپین $\frac{1}{2}$ مشخص می‌کند.

$$S_Z^A(\theta) = (c_+^\dagger c_+ - c^\dagger_- c_-)/2$$
$$S_Z^B(\phi) = (d^\dagger_+ d_+ - d^\dagger_- d_-)/2 \qquad (3\text{-}1)$$

این عملگرها که توسط آشکارسازهای فوتون در نقطه‌های A و B اندازه‌گیری شده‌اند، پشت شکافنده‌های پرتو / قطبنده‌ها قرار گرفته‌اند و برای ایجاد تبدیل به میدان‌های $c_\pm$, $d_\pm$ به کار می‌روند.

آشکارسازهای نوری تعداد فوتون‌ها $c_+^\dagger c_+$ و $d_+^\dagger d_+$ را تعیین می‌کنند. نتیجه‌ی به دست آمده برای هر تعداد فوتون $c_+^\dagger c_+$ و $d_+^\dagger d_+$ صفر یا یک است. نتیجه‌ی یک نشان می‌دهد که $S_Z^A(\theta) = 1/2$ است. در حالی که نتیجه‌ی صفر نشان می‌دهد که $S_Z^A(\theta) = -1/2$ است.

[1] Schwinger operator

توجه می‌کنیم که هر اندازه‌گیری در نقطه‌ی A با یک انتخاب معین از پارامتر θ مربوط است و به طور مشابه، یک اندازه‌گیری در B با یک انتخاب معین از φ مرتبط است. برای مثال اگر $\theta = 0$ باشد، رابطه‌ی زیر را می‌توانیم به دست آوریم.

$$S_Z^A(0) = (a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-)/2 \qquad (4\text{-}1)$$

که این رابطه مربوط به مولفه‌ی z اسپین در فرمول‌بندی شوینگر است. در ادامه، یک نماد اختصاری را به ترتیب با نوشتن $S_Z^A(\theta)$ و $S_Z^B(\varphi)$ به شکل S_θ^A و S_φ^B، معرفی می‌کنیم.

حالت $|\psi\rangle$ یک همبستگی را برای نتایج اندازه‌گیری $S_Z^A(\theta)$ و $S_Z^B(\varphi=\theta)$ پیش‌بینی می‌کند. این همبستگی برای حالت دلخواه $\theta = \varphi$ به سادگی با دوباره نویسی حالت $|\psi\rangle$ بر حسب میدان‌های تبدیل شده‌ی $c_\pm$ و $d_\pm$ دیده می‌شود، که در آن $\theta = \varphi$ است. یک همبستگی بین نتایج $c_+^\dagger c_+$ و $d_+^\dagger d_+$ به نظر می‌رسد که به ترتیب یک نتیجه‌ی صفر (یا یک) برای $c_+^\dagger c_+$ و صفر (یا یک) برای $d_+^\dagger d_+$ نشان خواهد داد.

یک اندازه‌گیری $S_Z^B(\theta)$ (با انتخاب $\theta = \varphi$) اجازه می‌دهد تا مقدار دقیق $+\frac{1}{2}$ یا $-\frac{1}{2}$ را برای نتیجه‌ی اندازه‌گیری $S_Z^A(\theta)$ همزمان روی ذره‌ی دوم در نقطه‌ی A به دست آوریم. با دنبال کردن مبحث EPR، فرض «واقع‌گرایی موضعی» نشان می‌دهد که مولفه‌های اسپین $S_Z^A(\theta)$ برای ذره ی A، پیش تعیین شده هستند.

به این کمیت‌های پیش‌تعیین‌شده عنصرهای واقعیت می‌گفتیم و از این به بعد با نماد s_θ^A نشان می‌دهیم. s_θ^A همیشه روی یکی از دو مقدار $+\frac{1}{2}$ یا $-\frac{1}{2}$ قرار می‌گیرد. به طور مشابه، «واقع-گرایی موضعی» برای مولفه‌های اسپین ذره در نقطه‌ی B وجود «عنصرهای واقعیت» s_φ^B را نشان می‌دهد.

از آنجایی‌که ذره A همیشه در یکی از دو حالت $s_\theta^A = 1/2$ یا $s_\theta^A = -1/2$ است و ذره‌ی B نیز همیشه در یکی از دو حالت $s_\varphi^B = 1/2$ و $s_\varphi^B = -1/2$ است، بنابراین می‌توانیم یک توزیع احتمال الحاقی[1] $\rho(s_\theta^A, s_\varphi^B)$ را معرفی کنیم که سیستم دو ذره «عنصرهای واقعیت» دارد که روی

[1] Join probability distribution

مقادیر s_θ^A, s_φ^B به طور همزمان قرار گرفته‌اند. در این مورد اندازه‌گیری‌های همزمان S_θ^A, S_φ^B نتایج s_θ^A, s_φ^B را می‌دهند.

کل مجموعه‌ی عناصر واقعیت s_θ^A, s_φ^B تشکیل یک مجموعه از متغیرهای پنهان[1] را می‌دهند که می‌توانند به سیستم دو ذره‌ای در زمان داده شده مربوط باشند. نماد مشترک مجموعه‌ی کامل متغیرهای پنهان را با λ نمادگذاری می‌کنیم، و توزیع احتمال الحاقی $\rho(s_\theta^A, s_\varphi^B)$، احتمال برای یک متغیر پنهانی معین حالت S_θ^A, S_φ^B برای سیستم ارائه می‌دهد که در کل به صورت $\rho(\lambda) = \rho(s_\theta^A, s_\varphi^B)$ نوشته می‌شود.

اکنون با فرض واقع‌گرایی موضعی می‌توانیم نتیجه بگیریم که سیستم همیشه در یکی از حالت‌های متغیر پنهانی است، که با یک انتخاب از مقادیر λ داده شده است. در اینجا λ به عنصرهای واقعیت s_θ^A, s_φ^B مربوط است.

برای هر کدام از چنین حالت‌هایλ ، یک احتمال $P_+^A(\theta,\lambda)$ وجود دارد که نتیجه‌ی یک اندازه‌گیری S_θ^A «بالا» است. به طور مشابه برای هر حالت λ یک احتمال $P_+^B(\varphi,\lambda)$ وجود دارد که نتیجه‌ی یک اندازه‌گیری S_φ^B «بالا» خواهد بود.

برای برقرار بودن نتیجه‌ی بل، اندازه‌گیری‌های الحاقی را در نظر می‌گیریم که در آن مولفه‌ی اسپین S_θ^A و مولفه‌ی اسپین S_φ^B به ترتیب در موقعیت‌هایA , B که از نظر فضایی از هم جدا هستند، اندازه‌گیری شده‌اند. یک اندازه‌گیری الحاقی، یکی از چهار نتایج $+\frac{1}{2}$ یا $-\frac{1}{2}$ را برای هر ذره می‌دهد.

با انجام بسیاری از این اندازه‌گیری‌ها بر روی یک مجموعه، می‌توانیم به طور تجربی تعیین کنیم:

$P_{++}^{AB}(\theta,\varphi)$احتمال اینکه $+\frac{1}{2}$ برای ذره‌یA و $+\frac{1}{2}$ برای ذره‌ی B با اندازه‌گیری همزمان S_φ^B, S_θ^Aبه دست آوریم.

[1] Hidden variables

$P_+^A(\theta)$ احتمال برای اینکه نتیجه‌ی $+\frac{1}{2}$ در اندازه‌گیری S_θ^A و $P_+^B(\varphi)$ احتمال برای اینکه نتیجه‌ی $+\frac{1}{2}$ در اندازه‌گیری S_φ^B به دست آید.

در تصویر عنصر واقعیت براساس فرض «واقع‌گرایی موضعی» مقدار به دست آمده در یک اندازه‌گیری S_θ^A مستقیماً توسط مقدار عنصر واقعیت s_θ^A داده شده است. بدین ترتیب احتمال به دست آوردن «بالا» به صورت زیر قابل بیان است.

$$P_+^A(\theta) = \int \rho(\lambda) P_+^A(\theta,\lambda) d\lambda \qquad (5\text{-}1)$$

و احتمال به دست آوردن «بالا» برای S_φ^B نیز به شکل زیر است.

$$P_+^B(\varphi) = \int \rho(\lambda) P_+^B(\varphi,\lambda) d\lambda \qquad (6\text{-}1)$$

و احتمال الحاقی برای به دست آوردن «بالا» برای هر دو اندازه‌گیری همزمان S_φ^B, S_θ^A به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$P_{++}^{AB}(\theta,\varphi) = \int \rho(\lambda) P_+^A(\theta,\lambda) P_+^B(\varphi,\lambda) d\lambda \qquad (7\text{-}1)$$

در اینجا φ, θ تعیین می‌کنند که کدام مولفه‌ی اسپین در نقطه‌ی A و کدام در نقطه‌ی B به ترتیب، اندازه گرفته شده‌اند. «عنصر واقعی» s_θ^A مولفه‌ی اسپین ذره درنقطه‌ی A را توصیف می‌کند که نتیجه‌ی اندازه‌گیری S_θ^A می‌باشد که دارای مقدار $+\frac{1}{2}$ یا $-\frac{1}{2}$ است که از مقدار φ مستقل می‌باشد. این عدم وابستگی $P_+^B(\varphi,\lambda)$ از θ و $P_+^A(\varphi,\lambda)$ از φ از فرض موضعیت به دست می‌آید، که اندازه‌گیری در B (s_φ^B) نمی‌تواند سریعاً روی سیستم یا بر عناصر واقعی در نقطه‌ی A تاثیر بگذارد.

بخوبی مشخص شده است که نابرابری بل می تواند از نتایج (1-5) تا (1-7) به دست آید که از تصویر عنصر واقعی براساس واقع‌گرایی موضعی نتیجه شده است. معادله‌ی زیر مستقیما $0 \le P_+^A(\theta,\lambda), P_+^B(\varphi,\lambda) \le 1$ ناشی می‌شود.

$$B = \frac{P_{++}^{AB}(\theta,\varphi) - P_{++}^{AB}(\theta,\varphi') + P_{++}^{AB}(\theta',\varphi) + P_{++}^{AB}(\theta',\varphi')}{P_{+}^{A}(\theta') + P_{+}^{B}(\varphi)} \leq 1 \qquad (8\text{-}1)$$

پیش‌بینی کوانتوم برای حالت $|\psi\rangle$ به صورت زیر است.

$$P_{++}^{AB}(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}\cos^2(\theta-\varphi)$$
$$P_{+}^{A}(\theta') = P_{+}^{B}(\varphi) = \frac{1}{2} \qquad (9\text{-}1)$$

با انتخاب زوایایی مثل $\varphi' - \theta = \frac{3\pi}{8}, \varphi' - \theta' = \theta' - \varphi = \varphi - \theta = \frac{\pi}{8}$ نابرابری فوق نقض می‌شود و بیانگر این واقعیت است که پیش‌بینی‌های برهم نهی کوانتومی با فرض واقع‌گرایی موضعی در سطح میکروسکوپی سازگار نیستند و اساس این نابرابری برفرضیه‌های واقع‌گرایی موضعی میکروسکوپی است.

آزمایش‌های انجام شده توسط اسپکت و همکاران [3 و7] و کلوزر[1] و فریدمن[2] [8] در اثبات این نقض نابرابری، موفقیت آمیز بوده است.

[1] Clauser
[2] Freedman